Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Barem de evaluare şi de notare

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$b_4 = b_1 q^3 \Rightarrow q^3 = 27$ $q = 3$	**3p** **2p**
2.	$x_V = 3$ $y_V = -1$	**2p** **3p**
3.	$3^{x+2} = 3^{2(1-x)} \Rightarrow x+2 = 2-2x$ $x = 0$	**3p** **2p**
4.	Numerele de două cifre, pătrate perfecte, sunt 16, 25, 36, 49, 64 şi $81 \Rightarrow$ 6 cazuri favorabile Numărul de numere naturale de două cifre este $90 \Rightarrow$ 90 de cazuri posibile $p = \dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \dfrac{1}{15}$	**2p** **1p** **2p**
5.	$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 6\vec{i} - 8\vec{j}$ $AC = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = 10$	**3p** **2p**
6.	$\dfrac{AB}{\sin C} = \dfrac{BC}{\sin A}$ $\sin A = 1$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$ $= -1$	**2p** **3p**
b)	$A(m) \cdot A(-m) = \begin{pmatrix} 1-2m & 1 & 1-m \\ m & m & m \\ m-m^2 & m & m-m^2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1-2m & 1 & 1-m \\ m & m & m \\ m-m^2 & m & m-m^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow m = 1$	**3p** **2p**
c)	$A(1) + A(2) + \ldots + A(101) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 101 & 0 & 0 \\ 101 & 0 & 101 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 101 & 101 & 101 \\ 101 \cdot 51 & 0 & 0 \\ 101 \cdot 51 & 0 & 101 \cdot 51 \end{pmatrix}$ $\det(A(1) + A(2) + \ldots + A(101)) = \begin{vmatrix} 101 & 101 & 101 \\ 101 \cdot 51 & 0 & 0 \\ 101 \cdot 51 & 0 & 101 \cdot 51 \end{vmatrix} = -51^2 \cdot 101^3$	**3p** **2p**

2.a)	$3\circ 4=3\cdot 4-4\cdot 3-4\cdot 4+20=$ $=4$	**3p** **2p**
b)	$x\circ y=x(y-4)-4(y-4)+4=$ $=(x-4)(y-4)+4$, pentru orice numere reale x şi y	**3p** **2p**
c)	$x\circ x=(x-4)^2+4$ $\underbrace{x\circ x\circ ...\circ x}_{x \text{ de } 2013 \text{ ori}}=(x-4)^{2013}+4$ $(x-4)^{2013}+4=5\Rightarrow x=5$	**1p** **2p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{e^x\left(x+e^x\right)-e^x\left(1+e^x\right)}{\left(x+e^x\right)^2}=$ $=\dfrac{(x-1)e^x}{\left(x+e^x\right)^2}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**3p** **2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x+e^x}=1$ Ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei f este $y=1$	**3p** **2p**
c)	$f'(1)=0$; $f'(x)\le 0$, pentru $x\in(0,1]$ şi $f'(x)\ge 0$, pentru $x\in[1,+\infty)$ $f(x)\ge f(1)\Rightarrow f(x)\ge\dfrac{e}{e+1}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**3p** **2p**
2.a)	$I_0=\int_0^1 xdx=\dfrac{x^2}{2}\Big\vert_0^1=$ $=\dfrac{1}{2}$	**3p** **2p**
b)	$I_{n+1}-I_n=\int_0^1 xe^{-nx^2}\left(e^{-x^2}-1\right)dx$ Pentru orice $n\in\mathbb{N}$ şi $x\in[0,1]$ avem $e^{-nx^2}>0$ şi $e^{-x^2}-1\le 0\Rightarrow I_{n+1}\le I_n$	**2p** **3p**
c)	Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ avem $I_n=\int_0^1 xe^{-nx^2}dx=-\dfrac{1}{2n}\int_0^1(e^{-nx^2})'dx=$ $=-\dfrac{1}{2n}e^{-nx^2}\Big\vert_0^1=\dfrac{1}{2n}\left(1-\dfrac{1}{e^n}\right)$	**3p** **2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinaţi raţia progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ cu termeni reali, ştiind că $b_1=1$ şi $b_4=27$.

5p **2.** Determinaţi coordonatele vârfului parabolei asociate funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-6x+8$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{x+2}=9^{1-x}$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie pătrat perfect.

5p **5.** Se consideră punctele A, B şi C astfel încât $\overrightarrow{AB}=4\vec{i}-3\vec{j}$ şi $\overrightarrow{BC}=2\vec{i}-5\vec{j}$. Determinaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{AC}$.

5p **6.** Calculaţi sinusul unghiului A al triunghiului ABC în care $AB=4$, $BC=5$ şi $\sin C=\frac{4}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Pentru fiecare număr real m se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}1&1&1\\m&0&0\\m&0&m\end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculaţi $\det(A(1))$.

5p **b)** Determinaţi numerele reale m ştiind că $A(m)\cdot A(-m)=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}$.

5p **c)** Arătaţi că $\det(A(1)+A(2)+...+A(101))=-51^2\cdot 101^3$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă dată de $x\circ y=xy-4x-4y+20$.

5p **a)** Calculaţi $3\circ 4$.

5p **b)** Arătaţi că $x\circ y=(x-4)(y-4)+4$, pentru orice numere reale x şi y.

5p **c)** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\underbrace{x\circ x\circ ...\circ x}_{x \text{ de } 2013 \text{ ori}}=5$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^x}{x+e^x}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{(x-1)e^x}{(x+e^x)^2}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

5p **c)** Demonstraţi că $f(x)\geq\frac{e}{e+1}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Pentru fiecare număr natural n se consideră numărul $I_n=\int_0^1 xe^{-nx^2}dx$.

5p **a)** Calculaţi I_0.

5p **b)** Arătaţi că $I_{n+1}\leq I_n$, pentru orice număr natural n.

5p **c)** Demonstraţi că $I_n=\frac{1}{2n}\left(1-\frac{1}{e^n}\right)$, pentru orice număr natural nenul n.

4. Perimetrul unui teren dreptunghiular este 792 de *metri*. Împărţind lungimea la lăţime se obţine câtul 15 şi restul 12. Atunci lungimea este egală cu ..372 *metri.*

SUBIECTUL III. (25 puncte)

Scrieţi rezolvările complete pe foaia de concurs:

1. (10p) Andrei, Bianca, Cosmin şi Diana au împreună 205 lei.

Bianca are de trei ori mai mulţi lei decât Andrei.

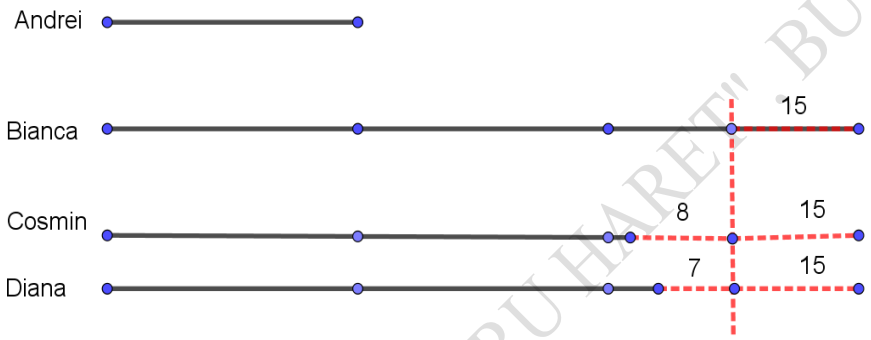
Dacă Bianca ar da 15 lei din suma ei astfel: 8 lei lui Cosmin şi 7 lei Dianei, atunci Bianca, Cosmin şi Diana ar avea sume de bani egale.

Câţi lei are fiecare copil?

Rezolvare *Metoda grafică*

Diferenta dintre suma Biancăi si a lui Cosmin este de $15+8=23$ de lei

Diferenta dintre suma Biancăi si a Dianei este de $15+7=22$ de lei



Daca suma lui Andrei reprezintă o parte, Bianca are 3 părti, Cosmin 3 părti -23, iar Diana 3 parti -22

$205+22+23=250$ *lei* care reprezinta 10 părţi.....**4 puncte**

$250:10=25$*lei* suma lui Andrei... ..... **2puncte**

Bianca are $3\cdot 25=75$*lei* .....**2puncte**.

Cosmin are $75-23=52$*lei* **1punct**

Diana are $75-22=53$*lei* .....**1 punct**.

Sau

Metoda algebrică

Notăm cu a,b,c,d sumele celor 4 copii

$a+b+c+d=205$;

$b=3\cdot a$; $c=b-8-15=b-23$; $d=b-22$

$a+3a+3a-23+3a-22=205$ **4p**

$a=25$ lei.....**2p**

$b=75$ lei.....**2p**

$c=52$ lei.....**1p**

$d=53$ lei.....**1p**

COLEGIUL NAȚIONAL "SPIRU HARET" BUCUREȘTI

2. (15p) Într-un săculeţ sunt bile albastre, galbene şi roşii. Bilele albastre sunt cu 126 mai multe decât cele roşii, iar $\frac{2}{5}$ din numărul de bile albastre este cu 36 mai mare decât numărul de bile roşii. Numărul de bile rosii este o treime din numărul de bile galbene.

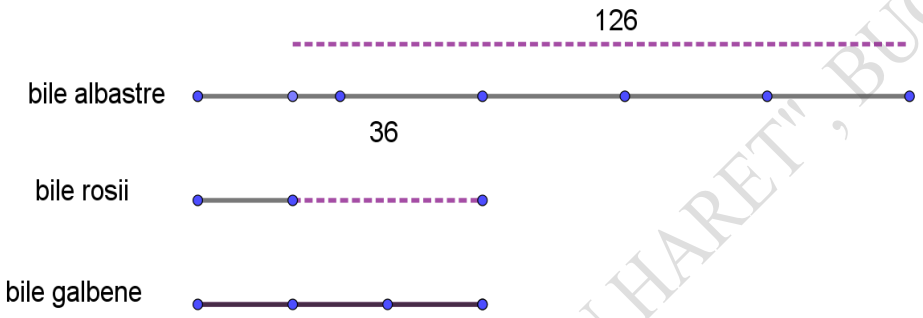
a) Câte bile roşii sunt?

b) Câte bile albastre sunt?

c) Care este numărul total al bilelor din săculeţ?

Rezolvare

a) Dacă *o cincime* din numărul de bile albastre este o parte, atunci nr de bile albastre are 5 părţi, iar cele rosii 2 parti-36



126-36 =90 bile reprezinta 3 cincimi

$90:3=30$ este o cincime.....**6p**

$2\cdot 30-36=24$ bile rosii..... **2p**

b) $30\cdot 5=150$ bile albastre.....**2p**

c) $24\cdot 3=72$ bile gabene.....**1p**

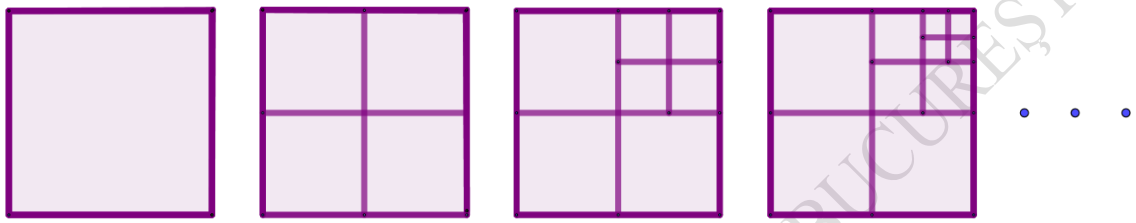
$72+24+150=246$ bile in total.....**4p**

COLEGIUL NAȚIONAL "SPIRU HARET", BUCUREȘTI

SUBIECTUL IV. (15puncte)

Scrieţi rezolvările complete pe foaia de concurs:

Tudor construieşte modele folosind plăci de faianţă din ce în ce mai mici ca în desen. De exemplu, al doilea model este este alcătuit din 4 plăci, al treilea model este alcătuit din 7 plăci.



Modelul 1 Modelul 2 Modelul 3 Modelul 4

3p a) Din câte plăci va fi alcătuit modelul următor (modelul 5) ?

4p b) Care este perimetrul celui de-al patrulea model, dacă cea mai mică placă de faianţă folosită are perimetrul egal cu 36 cm?

4p c) Din câte plăci este alcătuit modelul 30? Justificaţi răspunsul.

4p d)Câte plăci sunt necesare pentru a construi primele 30 de modele, în total?

Rezolvare

IV a) Numarul placilor se mareste cu 3 de la un model la celalalt.

$1+3\cdot 4=13$ plăci.....**3puncte**

b) $36:4=9cm$ are latura celei mai mici plăci.....**1 punct**

$9\cdot 8=72cm$ este lungimea laturii celei mai mari.....**2 puncte**

Perimetrul modelului 4 este $72\cdot 4=288cm$ .....**1 punct**

c) Al 30-lea model are $1+29\cdot 3=88$ de plăci.....**4 puncte**

d) $S=1+4+7+10+.....+88$

$S=88+85+82+.....+1$

$2\cdot S=88+1\cdot 30$

$S=89\cdot 30:2=1335$ .....**4 puncte**

Toate subiectele sunt obligatorii. Punctajul maxim este de 90 de puncte.

Se acordă 10 puncte din oficiu.

COLEGIUL NAŢIONAL "SPIRU HARET", BUCUREŞTI

ADMITEREA ÎN CLASA A V-A 16 IUNIE 2018

COLEGIUL NATIONAL "SPIRU HARET" Bucureşti

CONCURSUL „ MICII SPIRIŞTI" –PROBA DE MATEMATICĂ

SUBIECTUL I. (6x5 puncte=30 de puncte)

La următoarele 6 cerinţe un singur răspuns este corect !

Alegeti răspunsul corect şi scrieţi-l pe foaia de concurs împreună cu litera corespunzătoare:

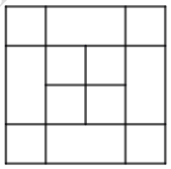
1. Rezultatul calculului $24:24+25202520:24$ este:
a) 1050105; b) 10501056; c) 1050106; d) 1050156 ; e)10511056.

2. Două treimi din numărul 312 înseamnă:
a) 208; b) 468; c) 104; d) 624; e) 936.

3. Cel mai mare număr care împărţit la 205 dă câtul 24 este egal cu:
a) 4920; b) 5124 ; c) 5125; d) 9999; e) 4944.

4. Pe ecranul unui computer apar la un loc toate numerele de la 1 până la 2018, adică
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22.....2017 2018.
Care este *a 300-a cifră* scrisă pe ecran, ştiind că numărătoarea începe cu cifra 1 ?
a) 0; b) 3; c) 1; d) 6; e) 7.

5. Câte pătrate observaţi în imaginea alăturată ?
a) 8 ; b) 10; c) 18; d) 12; e) 9.



6. În figura alăturată este reprezentat un teren dreptunghiular care este despărţit printr-un gard în două parcele în formă de trapez.
Perimetrul unei parcele este egal cu 520 *m*, al celeilalte este de 350 *m*, iar perimetrul întregului teren este egal cu 660 *m*.
Atunci lungimea gardului care desparte cele două parcele este egală cu:
a) 210 *m*; b) 205 *m*; c) 100 *m*; d) 15 *m*; e) 105 *m*.

SUBIECTUL II. (4x5 puncte=20 de puncte)

La următoarele 4 cerinţe scrieţi pe foaia de concurs *doar răspunsul*:

1. Numerele *de două cifre* $\overline{ab}$, ale căror cifre *a* şi *b* verifică egalitatea $\left[(a\times b-2)\times 27+5\right]:11\times 2-8:2\times 4=34$ sunt următoarele .....

2. Alina are într-o cutie cu 119 mai multe mărgele decât Maria. O treime din numărul de mărgele din cutia Alinei este de patru ori mai mare decât o cincime din numărul de mărgele din cutia Mariei. Atunci Maria are în cutie un număr de mărgele egal cu.....

3. Într-un parc au fost plantate 375 de flori astfel încât între oricare doi trandafiri s-au cultivat 10 panseluţe. Ştiind că atât primul fir sădit cât şi ultimul fir sunt trandafiri, atunci numărul de panseluţe care s-au cultivat este egal cu .....

4. Perimetrul unui teren dreptunghiular este 792 de *metri*. Împărţind lungimea la lăţime se obţine câtul 15 şi restul 12. Atunci lungimea este egală cu .....*metri*

COLEGIUL NAŢIONAL "SPIRU HARET" BUCUREŞTI

SUBIECTUL III. (25 puncte)

Scrieţi rezolvările complete pe foaia de concurs:

1. (10p) Andrei, Bianca, Cosmin şi Diana au împreună 205 lei.
Bianca are de trei ori mai mulţi lei decât Andrei.
Dacă Bianca ar da 15 lei din suma ei astfel: 8 lei lui Cosmin şi 7 lei Dianei, atunci Bianca, Cosmin şi Diana ar avea sume de bani egale.
Câţi lei are fiecare copil?

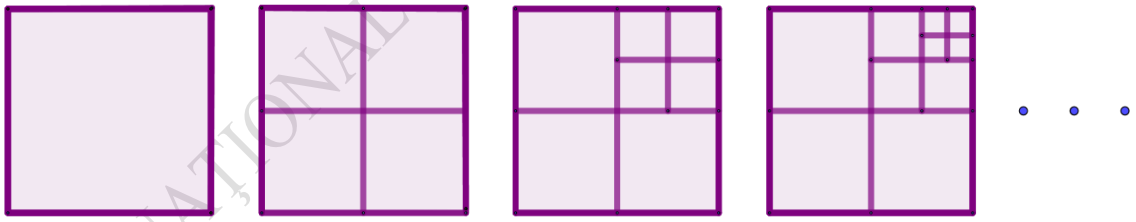
2. (15p) Într-un săculeţ sunt bile albastre, galbene şi roşii. Bilele albastre sunt cu 126 mai multe decât cele roşii, iar $\frac{2}{5}$ din numărul de bile albastre este cu 36 mai mare decât numărul de bile roşii. Numărul de bile roşii este o treime din numărul de bile galbene.

a) Câte bile roşii sunt?
b) Câte bile albastre sunt?
c) Care este numărul total al bilelor din săculeţ?

SUBIECTUL IV. (15puncte)

Scrieţi rezolvările complete pe foaia de concurs:

Tudor construieşte modele folosind plăci de faianţă din ce în ce mai mici ca în desen.
De exemplu, al doilea model este alcătuit din 4 plăci, al treilea model este alcătuit din 7 plăci.



a) Din câte plăci va fi alcătuit modelul următor (modelul 5) ?

b) Care este perimetrul celui de-al patrulea model, dacă cea mai mică placă de faianţă folosită are perimetrul egal cu 36 cm?

c) Din câte plăci este alcătuit modelul 30? Justificaţi răspunsul.

d) Câte plăci sunt necesare pentru a construi primele 30 de modele, în total?

Toate subiectele sunt obligatorii. Punctajul maxim este de 90 de puncte.

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Timp de lucru- 90 minute

COLEGIUL NAŢIONAL "SPIRU HARET", BUCUREŞTI

Barem de corectare **ADMITEREA ÎN CLASA A V-A 16 IUNIE 2018**

COLEGIUL NATIONAL "SPIRU HARET" Bucureşti

CONCURSUL „ MICII SPIRIŞTI”

SUBIECTUL I. (6x5 puncte=30 de puncte)

La următoarele 6 cerinţe un singur răspuns este corect.

Alegeti răspunsul corect şi scrieţi-l pe foaia de concurs împreună cu litera corespunzătoare:

1. Rezultatul calculului $24:24+25202520:24$ este:
a) 1050105; b) 105156; c) 1050106; d) 1050156 ; e)10511056.

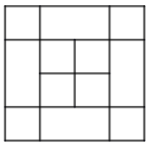
2. Două treimi din numărul 312 înseamnă:

a) 208; b) 468 c) 104; d) 624; e) 936.

3. Cel mai mare număr care împărţit la 205 dă câtul 24 este egal cu:
b) 4920; b) 5124 ; c) 5125; d) 9999; e) 4944.

4. Pe ecranul unui computer apar toate numerele de la 1 până la 2018, adică
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22.....2017 2018.
Care este a 300-a *cifră* scrisă pe ecran, ştiind că numărătoarea începe cu cifra 1 ?
a) 0; b) 3; c) 1; d) 6; e) 7.

5. Câte pătrate observaţi în imaginea alăturată ?
a) 8 ; b) 10; c) 18; d) 12; e) 13.



6. În figura alăturată este reprezentat un teren dreptunghiular care este despărţit printr-un gard în două parcele în formă de trapez.
Perimetrul unei parcele este egal cu 520 *m*, al celeilalte este de 350 *m*, iar perimetrul întregului teren este egal cu 660 *m*.
Atunci lungimea gardului care desparte cele două parcele este egală cu:

a)210 *m*; b) 205 *m*; c) 100 *m*; d) 15 *m*; e) 105 *m*.

SUBIECTUL II. (4x5 puncte=20 de puncte)

La următoarele 4 cerinţe scrieţi doar răspunsul pe foaia de concurs:

1. Numerele *de două cifre* $\overline{ab}$, ale căror cifre *a* şi *b* verifică egalitatea $\left[(a\times b-2)\times 27+5\right]:11\times 2-8:2\times 4=34$ sunt următoarele 26; 62; 34; 43.

2. Alina are într-o cutie cu 119 mai multe mărgele decât Maria. O treime din numărul de mărgele din cutia Alinei este de patru ori mai mare decât o cincime din numărul de mărgele din cutia Mariei. Atunci Maria are în cutie un număr de mărgele egal cu..... 85 de mărgele

3. Într-un parc au fost plantate 375 de flori astfel încât între oricare doi trandafiri s-au cultivat 10 panseluţe. Ştiind că atât primul fir cât şi ultimul sunt trandafiri, atunci numărul de panseluţe care s-au cultivat este egal cu ...340

COLEGIUL NATIONAL "SPIRU HARET", BUCUREŞTI

COLEGIUL NAȚIONAL GHEORGHE LAZĂR
Bd. Regina Elisabeta, Nr.48, Sector 5, București
Tel: +4.0213.134.756
E-mail: secretariat@culazar.ro

TEST DE SELECȚIE PENTRU ADMITEREA ÎN CLASA a V-a
PENTRU ANUL ȘCOLAR 2021/2022

Disciplina MATEMATICĂ

Varianta 5

Barem de corectare şi notare

- Se acordă 10 puncte din oficiu. Calcularea notei se face prin împărţirea punctajului total la 10.
- Soluţiile prezentate sunt orientative. Se punctează corespunzător limitelor oferite de barem orice altă soluţie diferită.

Subiectul I **(30 de puncte)**

1. $1801-[1836:9+(2989-x)+2025]:6=1022$ **(5p)**
$[1836:9+(2989-x)+2025]:6=779$
$204+(2989-x)+2025=4674$ **(5p)**
$2989-x=2445$
$x=544$ **(5p)**

2. Folosind Teorema împărțirii cu rest, avem că $\overline{ab}=2\cdot\overline{ba}+5$ și de aici $10a+b=2\cdot(10b+a)+5$. Astfel $8a=19b+5$. **(5p)**
Ținând cont că $19b+5\leq 72$, adică $b\leq 3$, distingem următoarele cazuri:
Cazul I: $b=1$, deci $8a=24$, adică $a=3$ și atunci $\overline{ab}=31$
Cazul II: $b=2$, deci $8a=43$, caz care nu are soluții
Cazul III: $b=3$, deci $8a=62$, caz care din nou nu are soluții
În concluzie, $\overline{ab}=31$. **(10p)**

Subiectul al II-lea **(30 de puncte)**

Notăm cu a,b,c,d cele patru numere. Atunci $a:3=b+3=c-3=d\cdot 3=x$, de unde deducem că $a=3x, b=x-3, c=x+3, d=x:3$. **(10p)**

Deoarece $a+b+c+d=2032$, avem că $3x+x-3+x+3+x:3=2032$ sau altfel spus $5x+x:3=2032$, de unde $15x+x=6096$, adică $x=381$. **(10p)**

În concluzie, $a=1143, b=378, c=384, d=127$, deci ultima cifră a produsului celor patru numere este ultima cifră a produsului $3\cdot 8\cdot 4\cdot 7$, adică 2. **(10p)**

Observație: Problema poate fi rezolvată și prin metoda figurativă.

Subiectul al III-lea **(30 de puncte)**

1. Putem realiza cu termenii șirului grupe de câte patru astfel:

Grupa	Primul termen	Al doilea termen	Al treilea termen	Al patrulea termen
1	1	1	2	3
2	4	4	5	6
3	7	7	8	9
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
31	91	91	92	93

Se observă că al patrulea termen din grupa n este $3 \cdot n$.

Deci sunt $93:3 = 31$ de grupe, iar cum fiecare grupă conține patru termeni, avem că șirul conține $4 \cdot 31 = 124$ de numere. **(10p)**

2. Suma numerelor de pe ultimele trei coloane este:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \cdots + 93 = [93 \cdot (93 + 1)]:2 = 93 \cdot 47$$ **(3p)**

Suma numerelor de pe prima coloană este:

$$1 + 4 + 7 + 10 + \cdots + 91 = (3 \cdot 0 + 1) + (3 \cdot 1 + 1) + (3 \cdot 2 + 1) + \cdots + (3 \cdot 30 + 1) =$$
$$= 3 \cdot (1 + 2 + \cdots + 30) + \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{de\ 31\ de\ ori} = 31 \cdot 46$$ **(5p)**

Suma cerută este $93 \cdot 47 + 31 \cdot 46 = 31 \cdot (141 + 46) = 31 \cdot 187 = 5797$. **(2p)**

3. Avem că $48:4 = 12$, deci al 48 – lea termen este ultimul termen din grupa 12, adică $3 \cdot 12 = 36$. **(5p)**

Deoarece $48 = 16 \cdot 3$, reiese că numărul 48 se găsește în grupa 16 pe ultima poziție, deci pe poziția $16 \cdot 4 = 64$. **(5p)**

COLEGIUL NAȚIONAL GHEORGHE LAZĂR
Bd. Regina Elisabeta, Nr.48, Sector 5, București
Tel: +4.0213.134.756
E-mail: secretariat@culazar.ro

TEST DE SELECȚIE PENTRU ADMITEREA ÎN CLASA a V-a
PENTRU ANUL ȘCOLAR 2021/2022

Disciplina MATEMATICĂ

Varianta 5

Subiectul I **(30 de puncte)**

1. **(15p)** Aflați cifra x din egalitatea:
$$\{1801 - [1836 : 9 + (2989 - x) + 2025] : 6 + 478\} + 521 = 2021$$
2. **(15p)** Să se determine numerele de forma $\overline{ab}$ cu proprietatea că la împărțirea numărului $\overline{ab}$ la numărul $\overline{ba}$ obținem câtul 2 și restul 5.

Subiectul al II-lea **(30 de puncte)**

Suma a patru numere naturale este egală cu 2032. Știind că dacă împărțim primul număr la 3, adunăm al doilea număr cu 3, scădem din al treilea număr 3 și înmulțim al patrulea număr cu 3 obținem patru numere egale, să se determine ultima cifră a produsului celor patru numere inițiale.

Subiectul al III-lea **(30 de puncte)**

Se consideră șirul de numere:
$$1, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 7, 7, 8, 9, \ldots, 91, 91, 92, 93$$

1. **(10p)** Să se determine câte numere conține acest șir.
2. **(10p)** Să se determine care este suma numerelor acestui șir.
3. **(10p)** Să se determine care este al 48-lea termen al șirului și pe ce poziție se află numărul 48 în acest șir.

Se acordă 10 puncte din oficiu.

MODEL PENTRU ADMITEREA ÎN CLASA A V-A

CONCURSUL „ MICII SPIRIŞTI”

SUBIECTUL I. (6x5 puncte=30 de puncte)

La următoarele 6 exerciţii un singur răspuns este corect.

Alegeti răspunsul corect şi scrieţi-l pe foaia de examen împreună cu litera corespunzătoare:

1. Rezultatul calculului $60-30:2\times3+0:5$ este:
a) 5; b) 45; c) 55; d) 15; e) nu se poate cacula.

2. Numărul de 17 ori mai mic decât 34289 este egal cu:
a)217 b) 2007 c) 317; d) 34272; e) 2017.

3. Într-o tabără s-au întâlnit 27 de elevi şi au făcut schimb de fotografii, fiecare cu fiecare. Numărul de fotografii schimbate este .....
a) 27; b) 650; c) 351; d) 54; e) 702.

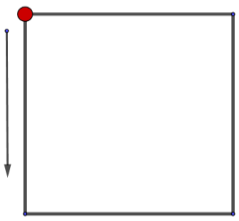
4. Se dă şirul: 1, 4, 7, 10, 13, ..., 2020. Al 30-lea termen din şir este:

a) 91 ; b) 89; c) 88; d) 86; e) 87.

5. Câte foi are o carte, dacă suma numerelor de pe paginile de la mijlocul ei este egală cu 51?

a) 24; b) 25; c) 26; d) 51; e) 50.

6. O buburuză pleacă dintr-un vârf al unui pătrat cu latura de 5cm şi merge 68 de cm pe laturile pătratului în acelaşi sens. Cât trebuie să mai meargă (în acelaşi sens) pentru a ajunge din nou în vârful din care a plecat?



a)12 cm; b) 60cm; c) 22 cm; d)42cm; e) 8cm.

SUBIECTUL II. (3x10 puncte=30 de puncte)

La următoarele 3 cerinţe scrieţi doar răspunsul:

1. Valoarea numărului a din egalitatea $[164-(15+18:a):3\times2]:2+20=94$ este .. 2

2. Ana şi Dan împart 144 de bomboane astfel: de câte ori ia Ana 4 bomboane, Dan ia 5 bomboane. Câte bomboane ia Dan la final?.....80

3. Dacă împărţim lungimea unui dreptunghi la lăţimea sa obţinem câtul 5 şi restul 3.
Ştiind că diferenţa dintre lungime şi lăţime este egală cu 63 cm, atunci perimetrul dreptunghiului este.....186 cm

COLEGIUL NAŢIONAL "SPIRU HARET" BUCUREŞTI

SUBIECTUL III. (30 puncte)

Scrieţi rezolvările complete pe foaia de concurs:

1. (10 p) 4 cărţi şi 5 pixuri costă 60 lei, iar 12 cărţi şi 7 pixuri costă 148 lei.

Cât costă o carte şi cât costă un pix?

Soluţie

Folosim metoda comparaţiei

4 cărţi……..5 pixuri……..60 lei $\big|\cdot 3$

12 cărţi……7 pixuri…….148 lei

12 cărţi……..15 pixuri……..180 lei

12 cărţi……7 pixuri…….148 lei

Scăzând membru cu membru, obţinem:

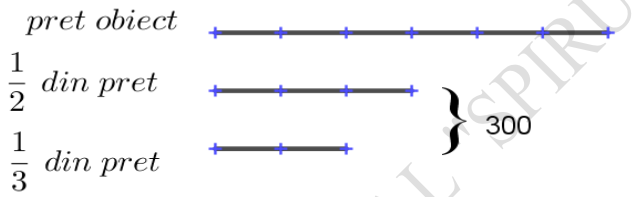
8 pixuri…….32 lei

32:8=4 lei preţ pix……**5puncte**

$4\cdot c+5\cdot 4=60\Rightarrow c=10lei$ (preţ carte)……**5puncte**

2. (10p) Dacă adun o treime cu jumătate din preţul unui obiect obţin 300 de lei. Aflaţi preţul obiectului.

Solutie



Folosim metoda grafică: Preţul are 6 părţi

3+2=5 segmente reprezintă 300 lei……**2puncte**

1 segment: 300:5=60 lei…… **5puncte**

$60\cdot 6=360$ lei……**3puncte**

3. (10p) Suma a trei numere este 812. Dacă din primul număr scădem 100, la al doilea număr adunăm 200, iar pe al treilea îl micşorăm cu 300, obţinem trei numere pare consecutive, în ordine crescătoare. Aflaţi numerele.

Fie $a, a+2, a+4$ cele trei numere pare consecutive obţinute din cele iniţiale.

Suma lor va fi: $812-100+200-300=612$.

$a+a+2+a+4=612$ **3puncte**

Folosim metoda grafică şi obţinem numerele consecutive 202, 204,206 .....**4puncte**

Primul număr: $x-100=202\Rightarrow x=302$ **1puncte**

Al doilea număr: $y+200=204\Rightarrow y=4$ **1puncte**

Al treilea număr: $z-300=206\Rightarrow z=506$ **1puncte**

COLEGIUL NAŢIONAL "SPIRU HARET", BUCUREŞTI

Toate subiectele sunt obligatorii. Punctajul maxim este de 90 de puncte.

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Timp de lucru- 60 minute

COLEGIUL NAȚIONAL "SPIRU HARET", BUCUREȘTI

Concursul "Micii Campioni" – 2019

Răspunsuri

Proba a-2a , 16 mai 2019

Nr. problemă	Răspuns
1.	c
2.	d
3.	a
4.	c
5.	b
6.	d
7.	d
8.	a
9.	b
10.	b
11.	d
12.	d
13.	e
14.	c
15.	b

Fiecare răspuns corect valorează 5 puncte.

COLEGIUL NAȚIONAL IAȘI

CATEDRA DE MATEMATICĂ

An școlar 2021-2022

Concursul de Matematică
Alexandru Myller – 2022

Test de antrenament 1

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Timp de lucru efectiv: 45 minute. Se adaugă 15 minute pentru familiarizarea cu subiectele.**
- **Se acordă 30 puncte din oficiu.**

SUBIECTUL I *Scrieți pe foaia de concurs doar răspunsurile* **(60 de puncte)**

10p **1.** Determinați numărul natural x, dacă $5-(4x+1):3=2$.

10p **2.** Suma a două numere naturale este 108. Al doilea număr este cincimea primului. Aflați diferența dintre cele două numere.

10p **3.** Calculați suma numerelor naturale care, împărțite la 3, dau câtul 10.

10p **4.** Scrieți cel mai mare număr natural de forma $\overline{abc}$ cu proprietatea că $a \neq b \neq c$.

10p **5.** Un pătrat mare este format dintr-un pătrat mijlociu cu perimetrul de 8 cm și cinci pătrate mici cu perimetrele de 4 cm fiecare. Determinați perimetrul pătratului mare.

10p **6.** Daria citește 15 pagini într-o jumătate de oră, iar Darius citește 21 de pagini în trei sferturi de oră. Aflați câte pagini citesc la un loc, într-o oră, cei doi copii.

SUBIECTUL al II-lea *Scrieți pe foaia de concurs rezolvările complete* **(60 de puncte)**

7. Se consideră șirul de numere naturale 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, … .

10p **a)** Stabiliți dacă numărul 100 este sau nu termen al șirului.

10p **b)** Care este cel de-al 100-lea termen al șirului?

10p **c)** Calculați suma primilor 100 de termeni ai șirului.

8. Trei coșuri conțin mere, în ultimele două la un loc fiind 65. Un sfert din numărul merelor din primul coș se mută în al doilea. Apoi, jumătate din merele din al doilea coș se mută în al treilea. Astfel, primele două coșuri conțin număr egal de mere, iar în al treilea coș sunt cu 15 mere mai mult decât în cel de-al doilea.

10p **a)** Arătați că în cel de-al treilea coș erau, la început, 15 mere.

10p **b)** Câte mere erau la început în cel de-al doilea coș?

10p **c)** Câte mere erau la început în primul coș?

Concursul de Matematică *Alexandru Myller* - 2022

Barem de corectare

Test de antrenament 1

SUBIECTUL I

1.	2.	3.	4.	5.	6.
2	72	93	989	12 cm	58

SUBIECTUL al II-lea

7. a) Numerele naturale care se împart exact la 4 nu fac parte din șir, **5p**

deci numărul 100 nu este termen al șirului. **5p**

b) Grupăm termenii șirului în grupe de câte trei. Al 100-lea termen este primul din cea de-a 34-a grupă. **5p**

Grupele 33 și 34 sunt separate de numărul $33\cdot 4=132$, așadar al 100-lea termen al șirului este numărul 133. **5p**

c) $S=\left(1+2+\cdots+133\right)-\left(4+8+\cdots+132\right)=$ **5p**

$=133\cdot 134:2-4\cdot 33\cdot 34:2=8911-2244=6667$ **5p**

8. a) Reprezentăm grafic transferul din al doilea coș în cel de-al treilea: în al doilea coș sunt (după primul transfer) $2b$ mere, iar în al treilea x mere (atâtea câte erau și inițial). După transfer, în al doilea sunt b mere, iar în al treilea $b+x$ mere. **5p**

Din datele problemei obținem că $x=15$. **5p**

b) Inițial, în cel de-al doilea coș erau $65-15=50$ de mere. **10p**

c) Notăm cu $4a$ numărul inițial de mere din primul coș. În urma celor două transferuri, în primul coș rămân $3a$ mere, deci tot $3a$ va fi și numărul merelor rămase în cel de-al doilea coș. **5p**

Urmărind reprezentarea grafică, rezultă că $5a=50$, prin urmare $a=10$. Primul coș conținea, la început, 40 de mere. **5p**

COLEGIUL NAȚIONAL IAȘI

CATEDRA DE MATEMATICĂ

An școlar 2021-2022

Concursul de Matematică
Alexandru Myller – 2022

Test de antrenament 2

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Timp de lucru efectiv: 45 minute. Se adaugă 15 minute pentru familiarizarea cu subiectele.**
- **Se acordă 30 puncte din oficiu.**

SUBIECTUL I *Scrieți pe foaia de concurs doar răspunsurile* **(60 de puncte)**

10p **1.** Știind că $a \cdot b = 138$ și $c \cdot a = 84$, calculați $a \cdot (b - c) : 3$.

10p **2.** Determinați cel mai mic număr natural de patru cifre având produsul cifrelor egal cu 16.

10p **3.** Aflați câte numere naturale de trei cifre au cifrele distincte, scrise în ordine crescătoare, iar suma cifrelor este 10.

10p **4.** Un ciclist a parcurs un sfert din traseul stabilit. Dacă ar mai merge încă 16 km, ar mai avea de parcurs un sfert din traseu. Ce lungime are traseul?

10p **5.** Aflați cel mai mare număr natural care, împărțit la 100, dă un cât mai mic decât restul.

10p **6.** În clasa a IV-a C sunt 28 de elevi. Oricum am alege 15 elevi din clasă, printre ei se vor afla cel puțin 4 băieți. Aflați numărul minim al băieților din clasa a IV-a C.

SUBIECTUL al II-lea *Scrieți pe foaia de concurs rezolvările complete* **(60 de puncte)**

7. Adrian și-a propus să rezolve 100 de probleme. În prima zi a rezolvat 2 probleme, în a doua zi a rezolvat cu 2 probleme mai mult decât în prima, în a treia zi cu 2 probleme mai mult decât în a doua și așa mai departe. În ultima zi, Adrian a rezolvat problemele rămase.

10p **a)** Câte probleme a rezolvat Adrian în primele șapte zile?

10p **b)** În a câta zi a terminat cele 100 de probleme?

10p **c)** Câte probleme a rezolvat în ultima zi?

8. Trei prieteni participă la două concursuri de matematică. La primul concurs Andrei primește drept premiu cu 20 de lei mai mult decât Dragoș, iar Vasile cu 20 de lei mai mult decât Andrei. La al doilea concurs Dragoș primește cu 50 de lei mai mult decât la primul, Andrei cu 20 de lei mai puțin decât Dragoș, iar Vasile cu 20 de lei mai puțin decât Andrei. Cei trei copii au primit la cele două concursuri, în total, suma de 780 lei.

10p **a)** Ce sumă de bani primește Dragoș la primul concurs?

10p **b)** Ce sumă de bani primește Andrei la primul concurs?

10p **c)** Dacă ar cumpăra împreună 3 albume și 2 cărți, copiilor le-ar rămâne 80 lei din suma totală primită. Dacă ar cumpăra 2 albume și 3 cărți, le-ar mai trebui 80 lei. Cât costă un album și o carte împreună?

Concursul de Matematică *Alexandru Myller* - 2022

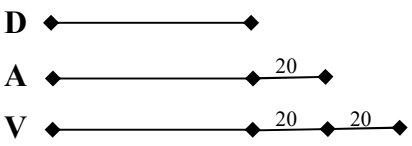
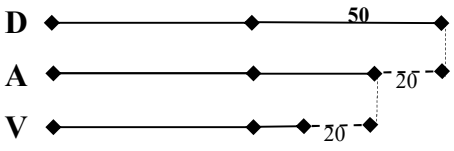
Barem de corectare

Test de antrenament 2

SUBIECTUL I

1.	2.	3.	4.	5.	6.
18	1128	4	32 km	9899	17

SUBIECTUL al II-lea

7. a) În primele șapte zile a rezolvat $2 + 4 + 6 + ... + 14 =$	**5p**
$= 2(1 + 2 + ... + 7) = 56$ probleme	**5p**
b) După șapte zile mai are de rezolvat $100 – 56 = 44$ probleme	**5p**
$16 + 18 = 34 < 44$ iar $16 + 18 + 10 = 54 > 44$, deci a terminat problemele în a zecea zi	**5p**
c) În primele nouă zile a lucrat $2(1 + 2 + 3 + ... + 9) = 90$ probleme	**5p**
În a zecea zi a rezolvat cele $100 – 90 = 10$ probleme rămase	**5p**
8.  **5p** 	**5p**
a) $6D + 20 + 40 + 50 + 30 + 10 = 780 \Leftrightarrow 6D = 630$ $D = 105$ (lei)	**5p**
b) $A = 105 + 20 = 125$ (lei)	**5p**
c) a = preț album; c = preț carte $\left.\begin{matrix} 3a + 2c = 780 - 80 \\ 2a + 3c = 780 + 80 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 5a + 5c = 1560$	**5p**
$a + c = 312$ (lei)	**5p**

COLEGIUL NAŢIONAL IAŞI

CATEDRA DE MATEMATICĂ

An şcolar 2021-2022

Concursul de Matematică
Alexandru Myller – 2022

Test de antrenament 3

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Timp de lucru efectiv: 45 minute. Se adaugă 15 minute pentru familiarizarea cu subiectele.**
- **Se acordă 30 puncte din oficiu.**

SUBIECTUL I *Scrieți pe foaia de concurs doar răspunsurile* (60 de puncte)

10p **1.** Calculaţi $15 + 3 : 3$.

10p **2.** Suma a cinci numere naturale consecutive este 15. Determinaţi cel mai mare dintre numere.

10p **3.** Pentru 5 bluze şi 4 tricouri s-au plătit 299 lei. Știind că 2 bluze costă cât 3 tricouri, stabiliți cât costă o bluză și cât costă un tricou.

10p **4.** Sofia a cules 33 de floricele: ghiocei şi toporaşi. Numărul ghioceilor este cu 1 mai mare decât o treime din numărul toporaşilor. Aflaţi câți ghiocei şi câţi toporaşi sunt în buchetul Sofiei.

10p **5.** Lungimea unei săli de dans este cu 6 metri mai mare decât lățimea ei, iar perimetrul sălii este 112 metri. Determinaţi lungimea și lățimea sălii de dans.

10p **6.** Numărul natural n împărţit la 54 dă restul 31. Aflaţi restul împărţirii lui n la 18.

SUBIECTUL al II-lea *Scrieți pe foaia de concurs rezolvările complete* (60 de puncte)

7. Se consideră numerele naturale de forma $n = \overline{ab} + \overline{ba}$, unde a și b sunt cifre nenule.

10p **a)** Numărul n poate fi egal cu 45? Justificați răspunsul!

10p **b)** Stabiliți câte numere naturale n având forma dorită există.

10p **c)** Calculați suma tuturor numerelor naturale n cu proprietatea din enunț.

8. Istoria **Colegiului Naţional din Iaşi** începe la 23 ianuarie 1828; scriem această dată sub forma 23.01.1828. În general, vom scrie orice dată sub forma *zz.ll.aaaa*, unde *zz* reprezintă ziua, *ll* luna, iar *aaaa* anul.

10p **a)** Astăzi este 21 martie 2022. Cum se scrie această dată în formatul dorit?

10p **b)** Care este prima dată după 23.01.1828 care se scrie cu patru cifre distincte, fiecare folosită de câte două ori?

10p **c)** De câte ori s-ar folosi cifra 2 în scrierea datelor, în formatul dorit, pentru toată luna februarie a anului 1828?

Concursul de Matematică *Alexandru Myller* - 2022

Barem de corectare

Test de antrenament 3

SUBIECTUL I

1.	2.	3.	4.	5.	6.
16	5	39 lei (**5p**) 26 lei (**5p**)	9 ghiocei (**5p**) 24 toporași (**5p**)	L = 31 m (**5p**) l = 25 m (**5p**)	13

SUBIECTUL al II-lea

7. a) $n=11(a+b)$	**5p**
n nu poate fi egal cu 45, deoarece 45 nu se împarte exact la 11	**5p**
b) Suma $a + b$ poate lua valorile 2, 3, ..., 18,	**5p**
așadar există 17 numere n cu proprietatea din enunț.	**5p**
c) 2 + 3 + ... + 18 = 170	**5p**
$S = 11 \cdot 170 = 1870$	**5p**
8. a) 21.03.2022	**10p**
b) Căutăm o dată tot din anul 1828. Folosim de două ori cifra 8 și câte o singură dată cifrele 1 și 2. Aceste două cifre (1 și 2) trebuie să apară din nou în scrierea datei.	**5p**
Data căutată este 01.02.1828.	**5p**
c) Anul 1828 a fost unul bisect, deci luna februarie a avut 29 de zile.	**2p**
Se folosesc 13 cifre de 2 pentru scrierea zilei, 29 cifre de 2 pentru scrierea lunii și 29 cifre de 2 pentru scrierea anului.	**6p**
În total, se folosesc 71 cifre de 2.	**2p**

COLEGIUL NAȚIONAL IAȘI

CATEDRA DE MATEMATICĂ

An școlar 2021-2022

Concursul de Matematică
Alexandru Myller – 2022

Test de antrenament 5

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Timp de lucru efectiv: 45 minute. Se adaugă 15 minute pentru familiarizarea cu subiectele.**
- **Se acordă 30 puncte din oficiu.**

SUBIECTUL I *Scrieți pe foaia de concurs doar răspunsurile* **(60 de puncte)**

10p **1.** Calculați $2022 - 20 \cdot 22$.

10p **2.** Stabiliți câte perechi de numere naturale (x, y) verifică egalitatea $72 : (x+3) = 2y+1$.

10p **3.** Câte numere naturale de patru cifre au produsul cifrelor egal cu 18?

10p **4.** Determinați cel mai mare număr de forma $\overline{abc}$ cu proprietatea $\overline{5ab} + \overline{3ac} = 913$.

10p **5.** Aflați numărul natural care se mărește cu 2022 atunci când se adaugă cifra 6 la dreapta sa.

10p **6.** Un automobil pleacă din Iași către Timișoara, cu viteza de 60 km/h. După trei ore, un alt automobil pleacă din Iași, pe același traseu, și ajunge din urmă primul automobil după șase ore. Care este viteza celui de-al doilea automobil?

SUBIECTUL al II-lea *Scrieți pe foaia de concurs rezolvările complete* **(60 de puncte)**

7. Suma a trei numere naturale a, b și c este 111. Împărțindu-le, pe rând, la același număr natural nenul, câturile obținute sunt numere naturale consecutive (în ordine crescătoare), iar resturile obținute sunt 1, 2, respectiv 3.

10p **a)** Dacă $a = 1$, aflați valorile numerelor b și c.

10p **b)** Arătați că numărul b este impar.

10p **c)** Câte triplete (a, b, c) de numere naturale verifică toate condițiile problemei?

8. Dacă Maria ar așeza câte 7 trandafiri în fiecare vază, i-ar rămâne 5 trandafiri fără vază. Dacă ar așeza câte 9 trandafiri în fiecare vază, în ultima vază ar fi doar 6 trandafiri.

10p **a)** Arătați că Maria are 4 vaze.

10p **b)** Ce sumă obține Maria dacă vinde trandafirii cu 5 lei firul?

10p **c)** Cu banii astfel câștigați, fata cumpără cărți și caiete. Dacă ar cumpăra 6 caiete și 10 cărți nu i-ar ajunge 15 lei, iar dacă ar cumpăra 6 cărți și 10 caiete i-ar rămâne 25 lei. Cât costă o carte și cât costă un caiet?

Concursul de Matematică *Alexandru Myller* - 2022

Barem de corectare

Test de antrenament 5

SUBIECTUL I

1.	2.	3.	4.	5.	6.
1582	3	36	594	224	90 km/h

SUBIECTUL al II-lea

7. a) Dacă $a = 1$, câtul primei împărțiri este 0, așadar câturile următoarelor împărțiri vor fi 1, respectiv 2: $b = n \cdot 1 + 2, c = n \cdot 2 + 3$ **5p**

$b + c = 110 \Rightarrow 3n + 5 = 110 \Rightarrow n = 35$, prin urmare $b = 37$, $c = 73$. **5p**

b) $a = n \cdot q + 1, b = n \cdot (q + 1) + 2, c = n \cdot (q + 2) + 3$ **5p**

$a + b + c = 111 \Rightarrow n(3q + 3) + 6 = 111 \Rightarrow n(q + 1) + 2 = 37 \Rightarrow b = 37$, care este număr impar **5p**

c) Din condiția restului rezultă că $n > 3$. **4p**

Am văzut mai înainte că $n(q + 1) = 35$, prin urmare n poate lua valorile 5, 7 sau 35. Problema are 3 soluții. **6p**

8. a) Pentru a completa până la 9 trandafiri toate vazele, Maria ar trebui să folosească cei 5 trandafiri rămași atunci când pune în fiecare vază câte 7 și încă 3 necesari pentru ultima vază. **5p**

Numărul vazelor este $(5 + 3) : (9 - 7) = 8 : 2 = 4$. **5p**

b) Numărul de trandafiri este $4 \cdot 7 + 5 = 33$. **5p**

Suma obținută este $33 \cdot 5 = 165$ lei. **5p**

c) $6c + 10k = 180, 10c + 6k = 140$ **5p**

Folosim metoda comparației. Obținem că prețul unei cărți este 15 lei, iar cel al unui caiet 5 lei. **5p**

COLEGIUL NAȚIONAL IAȘI

CATEDRA DE MATEMATICĂ

An școlar 2021-2022

Concursul de Matematică
Alexandru Myller – 2022

Test de antrenament 6

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Timp de lucru efectiv: 45 minute. Se adaugă 15 minute pentru familiarizarea cu subiectele.**
- **Se acordă 30 puncte din oficiu.**

SUBIECTUL I *Scrieți pe foaia de concurs doar răspunsurile* **(60 de puncte)**

10p **1**. Determinați numărul natural x din egalitatea $23-2\cdot(x-30)=7$.

10p **2**. Aflați cel mai mare număr natural care, împărțit la 10, dă restul cu 1 mai mare decât dublul câtului.

10p **3**. Calculați suma numerelor a, b și c, știind că $a\cdot b=48, a\cdot c=40$ și $a\cdot(a+b-c)=24$.

10p **4**. Scrieți cel mai mic număr natural care are suma cifrelor egală cu 10 și produsul cifrelor egal tot cu 10.

10p **5**. Un măr și o pară cântăresc împreună 250 grame. Același măr și o jumătate de pară cântăresc împreună 175 grame. Aflați cât cântărește mărul.

10p **6.** O persoană parcurge de obicei drumul de acasă la serviciu în 16 minute. Într-o zi, după ce parcurge un sfert din drum cu viteza obișnuită, dublează viteza și ajunge la serviciu la ora 8:00. Aflați la ce oră a pornit spre serviciu.

SUBIECTUL al II-lea *Scrieți pe foaia de concurs rezolvările complete* **(60 de puncte)**

7. Pe o tablă se scriu, crescător, următoarele numere naturale: 1, 4, 7, 10, …, 397, 400.

10p **a)** Aflați care este al 100-lea număr scris pe tablă.

10p **b)** Stabiliți care este numărul total de cifre folosite pentru scrierea tuturor numerelor.

10p **c)** Se șterg de pe tablă numerele de pe pozițiile impare, apoi se șterg cele de pe pozițiile pare din șirul rămas. Determinați suma numerelor care se mai află, în final, pe tablă.

8. Ana și Bianca au câte 120 de bile, fiecare având atât bile albe, cât și bile roșii. Ana preferă bilele roșii, așa că negociază următorul schimb de bile cu Bianca: Ana dă câte 3 bile albe pentru fiecare bilă roșie primită. La final, Ana are 90 de bile și toate sunt roșii, iar Bianca are număr egal de bile albe și roșii.

10p **a)** Stabiliți câte bile roșii au împreună cele două fete.

10p **b)** Câte schimburi au avut loc?

10p **c)** Câte bile de fiecare fel a avut Bianca inițial?

Concursul de Matematică *Alexandru Myller* - 2022

Barem de corectare

Test de antrenament 6

SUBIECTUL I

1.	2.	3.	4.	5.	6.
38	49	26	11125	100 g	7:50

SUBIECTUL al II-lea

7. a) Dacă al 100-lea număr este x, atunci $(x-1):3+1=100$.	**5p**
Numărul de pe poziția 100 este $x=298$.	**5p**
b) Sunt în total 3 numere cu o cifră, 30 de numere cu două cifre și 101 numere cu trei cifre.	**5p**
Numerele au, în total, $3\cdot 1+30\cdot 2+101\cdot 3=366$ cifre.	**5p**
c) Numerele rămase după cele două rânduri de eliminări sunt numerele care, prin împărțire la 12, dau restul egal cu 4, adică 4, 16, 28, …, 388, 400.	**5p**
Sunt 34 de numere, care au suma egală cu $(4+400)\cdot 34:2=6868$.	**5p**
8. a) La final, Bianca are $120+120-90=150$ bile, din care 75 bile albe și 75 bile roșii	**5p**
În total, cele două fete au 75 bile albe și $90+75=165$ bile roșii.	**5p**
b) La fiecare schimb, Ana pierde câte $3-1=2$ bile.	**5p**
Ana a pierdut în total $120-90=30$ bile, deci au fost $30:2=15$ schimburi.	**5p**
c) În cele 15 schimburi, Bianca a primit $3\cdot 15=45$ bile albe și a dat 15 bile roșii.	**5p**
Bianca a avut la început $75-45=30$ bile albe și $75+15=90$ bile roșii.	**5p**

COLEGIUL NAȚIONAL IAȘI

CATEDRA DE MATEMATICĂ

An școlar 2021-2022

Concursul de Matematică
Alexandru Myller – 2022

Test de antrenament 7

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Timp de lucru efectiv: 45 minute. Se adaugă 15 minute pentru familiarizarea cu subiectele.**
- **Se acordă 30 puncte din oficiu.**

SUBIECTUL I *Scrieți pe foaia de concurs doar răspunsurile* **(60 de puncte)**

10p **1.** Aflați numărul natural x din egalitatea $19-(5+x):7=12$.

10p **2.** Câte numere naturale impare de patru cifre au primele două cifre identice?

10p **3.** Dacă Adrian îi dă Adrianei 80 de lei, cei doi copii vor avea sume egale de bani. Dacă Adriana îi dă lui Adrian 20 de lei, băiatul va avea o sumă de trei ori mai mare. Câți lei au, împreună, cei doi copii?

10p **4.** Determinați numerele naturale de forma $\overline{ab}$, știind că $\overline{ab}=(a+b)(a+b-1)$.

10p **5.** O foaie de hârtie în formă de pătrat este tăiată în două dreptunghiuri. Primul dreptunghi are perimetrul de 40 cm, iar cel de-al doilea de 32 cm. Determinați perimetrul foii de hârtie.

10p **6.** Într-o cutie sunt 34 de bile albe, 28 de bile roșii și 17 bile galbene. Care este numărul maxim de bile pe care le putem extrage pe întuneric, astfel încât să avem siguranța că în cutie rămâne măcar câte o bilă de fiecare culoare?

SUBIECTUL al II-lea *Scrieți pe foaia de concurs rezolvările complete* **(60 de puncte)**

7. Ana are mere, pe care le ține într-un coș. Dacă le grupează câte trei îi rămân două mere în afara grupelor, iar dacă le grupează câte două îi rămâne un măr.

10p **a)** Este posibil ca Ana să aibă în coș 62 de mere? Dar 65?

10p **b)** Dacă Ana grupează merele câte șase, câte mere vor rămâne în afara grupelor?

10p **c)** Aflați cel mai mare număr posibil de mere din coș, dacă acesta este un număr de două cifre.

8. Se consideră tabloul:

2
2 7
2 7 12
2 7 12 17
……..

10p **a)** Calculați suma elementelor de pe linia 7.

10p **b)** Aflați ultimul element de pe linia 101.

10p **c)** Scriem, unul după altul, elementele tabloului: 2, 2, 7, 2, 7, 12, 2, 7, 12, 17, … . Determinați al 2022-lea termen al șirului astfel obținut.

Concursul de Matematică *Alexandru Myller* - 2022

Barem de corectare

Test de antrenament 7

SUBIECTUL I

1.	2.	3.	4.	5.	6.
44	450	400 lei	72	48 cm	16

SUBIECTUL al II-lea

7. a) $62 = 2 \cdot 31 + 0$, deci nu pot fi 62 de mere **5p**

$65 = 3 \cdot 21 + 2$ și $65 = 2 \cdot 32 + 1$, deci în coș ar putea fi 65 de mere **5p**

b) $m = 3 \cdot c_1 + 2, m = 2 \cdot c_2 + 1$ **5p**

Rezultă că $m = 6 \cdot (c_2 - c_1) - 1 = 6 \cdot k + 5$, deci vor rămâne 5 mere negrupate **5p**

c) 95 de mere **10p**

8. a) Elementele liniei 7 sunt: 2, 7, 12, 17, 22, 27, 32 **5p**

Suma acestor numere este 119 **5p**

b) Ultimul element al liniei n este $5 \cdot (n-1) + 2$, **5p**

deci ultimul număr de pe linia 101 este 502 **5p**

c) Primele 63 de linii conțin, în total, $1 + 2 + 3 + ... + 63 = 2016$ numere. **5p**

Al 2022-lea termen al șirului va fi al șaselea număr de pe linia 64, adică 27. **5p**

COLEGIUL NAŢIONAL IAŞI

CATEDRA DE MATEMATICĂ

An şcolar 2021-2022

Concursul de Matematică
Alexandru Myller – 2022

Test de antrenament 8

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Timp de lucru efectiv: 45 minute. Se adaugă 15 minute pentru familiarizarea cu subiectele.**
- **Se acordă 30 puncte din oficiu.**

SUBIECTUL I *Scrieți pe foaia de concurs doar răspunsurile* (60 de puncte)

10p **1.** Se consideră numerele $a = 918 : 9$ și $b = 201 + 81 \cdot 5$. Calculați $2 \cdot a + 3 \cdot b$.

10p **2.** Ce rest primește Filip de la o bancnotă de de 200 lei după ce cumpără un rucsac de 63 de lei și două mingi a 48 de lei fiecare ?

10p **3.** Două creioane, patru pixuri și șase radiere costă 48 lei. Șapte creioane, patru pixuri și o radieră costă cu 10 lei mai puțin. Cât costă împreună un creion, un pix și o radieră?

10p **4.** Numărul 45 are proprietatea că se împarte exact la cifra unităților; numărul 47 nu are această proprietate. Câte numere mai mari ca 40 și mai mici ca 50 au această proprietate?

10p **5.** Împărțim primele 12 numere naturale nenule în trei grupe având același număr de numere și aceeași sumă a numerelor. Una dintre grupe conține numerele 1 și 3. Care sunt celelalte numere din această grupă?

10p **6.** Elevii clasei a IV-a B și-au propus să planteze 120 de panseluțe. Dacă plantează doar băieții, termină în trei ore. Dacă plantează și băieții și fetele, termină în două ore. În cât timp ar termina treaba fetele?

SUBIECTUL al II-lea *Scrieți pe foaia de concurs rezolvările complete* (60 de puncte)

7. Un fermier are un teren pe care cultivă legume. Un sfert din suprafață este cultivată cu roșii, o treime din rest și încă 6 ari cu castraveți, două cincimi din noul rest și încă 2 ari cu ardei, iar restul de 4 ari cu ceapă.

10p **a)** Care este suprafața totală cultivată cu legume?

10p **b)** Fermierul vinde roșiile de calitatea I cu 5 lei kilogramul și roșiile de calitatea a doua cu 3 lei kilogramul. Știind că a vândut 100 de kilograme de roșii și a încasat 430 lei, câte kilograme de roșii de calitatea I a vândut?

10p **c)** În lipsa unui depozit, legumele nu sunt păstrate în condiții optime. Din acest motiv, în prima zi se alterează o anumită cantitate de legume. A doua zi se alterează o cantitate dublă față de prima zi, iar în a treia zi se altererază o cantitate dublă față de ziua a doua. În total, s-au alterat 259 kilograme de legume. Câte kilograme s-au alterat în prima zi?

8. Se consideră șirul numerelor naturale pare: 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, … .

10p **a)** Pe ce poziție se află numărul 2022 în acest șir?

10p **b)** George vrea să adune primele zece numere de trei cifre ale acestui șir. Din greșeală, el a omis un număr și astfel a obținut suma 978. Care este numărul pe care l-a omis?

10p **c)** Radu și Ioana joacă un joc: Radu colorează primul număr din șir (pe 0), Ioana colorează următoarele două numere din șir (2 și 4), apoi Radu colorează următoarele trei numere (6, 8 și 10) și tot așa. Care dintre cei doi copii colorează numărul 2022?

Concursul de Matematică *Alexandru Myller* - 2022

Barem de corectare

Test de antrenament 8

SUBIECTUL I

1.	2.	3.	4.	5.	6.
2022	41 lei	11 lei	5	10 și 12	6 ore

SUBIECTUL al II-lea

7. **a)** Notăm cu a suprafața totală, cu b primul rest și cu c al doilea rest. **1p**

Trei cincimi din c reprezintă $2 + 4 = 6$ ari, deci $c = 10$ (ari). **3p**

Două treimi din b reprezintă $10 + 6 = 16$ ari, deci $b = 24$ (ari). **3p**

Trei pătrimi din a înseamnă 24 ari, deci $a = 32$ (ari). **3p**

b) Presupunem că ar vinde doar roșii de calitatea I. Ar obține 500 lei, cu 70 lei mai mult decât suma reală. **4p**

Diferența de preț între 5 lei și 3 lei este de 2 lei, deci $70 : 2 = 35$ kg de roșii de prima calitate trebuie înlocuite cu roșii de a doua calitate. **4p**

Rămân $100 - 35 = 65$ kg de roșii de calitatea I. **2p**

c) Fie x cantitatea de legume alterate în prima zi; atunci $x + 2x + 4x = 259$, **5p**

de unde $x = 37$ (kg). **5p**

8. **a)** Numărul 2012 este al 1012-lea termen al șirului. **10p**

b) $100 + 102 + \ldots + 118 = 1090$ **5p**

Numărul uitat de George este $1090 - 978 = 112$. **5p**

c) Până la pasul n (inclusiv) se colorează $1 + 2 + 3 + \ldots + n = n(n + 1) : 2$ numere din șir. **2p**

Pentru că 2022 este al 1012-lea termen al șirului, avem **4p**

$1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 1) < 1012 \leq 1 + 2 + 3 + \ldots + n.$

Se obține $n = 45$ și, cum la pașii impari numerele sunt colorate de Radu, înseamnă că băiatul va colora numărul 2022. **4p**

COLEGIUL NAȚIONAL IAȘI

CATEDRA DE MATEMATICĂ

An școlar 2021-2022

Concursul de Matematică
Alexandru Myller – 2022

Test de antrenament 9

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Timp de lucru efectiv: 45 minute. Se adaugă 15 minute pentru familiarizarea cu subiectele.**
- **Se acordă 30 puncte din oficiu.**

SUBIECTUL I ***Scrieți pe foaia de concurs doar răspunsurile*** **(60 de puncte)**

10p **1.** Calculați $535 - 5 \cdot (432 : 8 - 187 : 17)$.

10p **2.** Câte numere de trei cifre, împărțite la 6, dau câtul 16?

10p **3.** Știind că $\overline{2x79}$ și $\overline{25y0}$ sunt numere consecutive, calculați suma $x + y$.

10p **4.** În secvența *x*, 2022, *y*, 2023, *z*, oricare trei termeni consecutivi sunt numere cu aceeași sumă. Care este valoarea diferenței $x - z$?

10p **5.** Într-o cutie sunt 9 bile roșii, 5 bile albastre și 7 bile galbene. Care este numărul minim de bile pe care trebuie să le extragem pe întuneric pentru a fi siguri că vom avea măcar câte o bilă de fiecare culoare?

10p **6.** Câte dreptunghiuri cu perimetrul 18 cm și lungimile laturilor exprimate, în centimetri, prin numere naturale se pot forma?

SUBIECTUL al II-lea ***Scrieți pe foaia de concurs rezolvările complete*** **(60 de puncte)**

7. Alexandru parcurge un traseu în trei zile. În prima zi parcurge $\frac{5}{12}$ din traseu, a doua zi $\frac{3}{14}$ din rest, iar în ultima zi parcurge distanța rămasă. Distanța parcursă în a treia zi este cu 32 km mai mare decât cea parcursă în a doua zi.

10p **a)** Aflați care este distanța parcursă în cea de-a doua zi.

10p **b)** Ce fracție din lungimea întregului traseu reprezintă distanța parcursă în cea de-a treia zi?

10p **c)** Alexandru merge cu viteza de 4 km/h. Câte ore a petrecut pe traseu în prima zi?

8. Numărul $n = 123456789101112\ldots20212022$ este obținut prin alăturarea primelor 2022 numere naturale nenule.

10p **a)** Din câte cifre este format numărul *n*?

10p **b)** Arătați că pentru scrierea numărului *n* se folosesc 525 zerouri.

10p **c)** Care este cel mai mic număr care se poate obține eliminând 6450 cifre ale numărului *n*?

Concursul de Matematică *Alexandru Myller* - 2022

Barem de corectare

Test de antrenament 9

SUBIECTUL I

1.	2.	3.	4.	5.	6.
320	2	13	1	17	4

SUBIECTUL al II-lea

7. a) Reprezentăm printr-un segment distanța parcursă în ultimele două zile și împărțim acest segment în 14 părți egale. Dacă a este lungimea unei părți, atunci distanța parcursă în a doua zi este $3a$, iar distanța parcursă în a treia zi este $11a$. **5p**

Obținem că $a = 4$ (km). **3p**

În cea de-a doua zi a parcurs 12 km. **2p**

b) Reprezentăm printr-un segment lungimea întregului traseu. Cele cinci segmente mici care corespund primei zile sunt de două ori mai lungi decât cele corespunzătoare următoarelor două zile, deci în total sunt 24 segmente de lungime a. **5p**

Distanța parcursă în cea de-a treia zi reprezintă $\frac{11}{24}$ din întregul traseu. **5p**

c) În prima zi a parcurs 40 km, **5p**

deci a petrecut pe traseu 40 : 4 = 10 ore. **5p**

8. a) $1 - 9 \Rightarrow 9$ cifre **2p**

$10 - 99 \Rightarrow 90 \cdot 2 = 180$ cifre **2p**

$100 - 999 \Rightarrow 900 \cdot 3 = 2700$ cifre **2p**

$1000 - 2022 \Rightarrow 1023 \cdot 4 = 4092$ cifre **2p**

În total avem 6981 cifre **2p**

b) De la 1 la 1000 sunt 192 cifre de 0 (100 pe poziția unităților, 91 pe poziția zecilor și 1 pe poziția sutelor). **4p**

De la 1001 la 2000 sunt 300 cifre de 0 . **2p**

De la 2001 la 2022 sunt 33 cifre de 0. **2p**

În total, avem 525 cifre de 0. **2p**

c) Eliminând 6450 cifre, vom obține un număr format din 531 de cifre. **2p**

Păstrăm la început cifra 1, apoi eliminăm toate cifrele nenule dintre primele 524 zerouri. **3p**

Numărul obținut este $1\underbrace{000\ldots000}_{524\ de\ 0}212022$. **5p**

TEST DE SELECTIE
PENTRU ADMITEREA ELEVILOR ÎN CLASA A V-A
BAREM DE NOTARE MATEMATICA

24 iunie 2022

Orice altă rezolvare care conduce la rezultate corecte se va puncta maxim corespunzător.

Se acordă 10 p din oficiu

Subiectul I

1. 100-35 .....3p
   =65 .....2p
2. (2+20) x 5 .....3p
   =110 .....2p
3. 3a +2 x 8=85 .....3p
   a=23 .....2p
4. 1100 .....5p

Subiectul II

1) 10971 : 53 = 207 ..... 2p
210 – 207 = 3 ..... 1p
2 x 3 = 6 ..... 1p
32+ 6 = 38 ..... 1p
8 x 38 =304 ..... 2p
639 – 304 = 335 ..... 1p
3 x 335 = 1005 ..... 1p
44 + 1005 = 1049 ..... 1p

2) 5 x [38 + 2 x(5 x a – 9)] = 6150 – 3000 ..... 0,5p
5 x [38 + 2 x(5 x a – 9)] = 3150 ..... 1p
38 + 2 x(5 x a – 9) = 3150 : 5 ..... 1p
38 + 2 x(5 x a – 9) = 630 ..... 1p
2 x(5 x a – 9) = 630 - 38 ..... 1p
2 x(5 x a – 9) = 592 ..... 1p
5 x a – 9 = 592 : 2 ..... 1p
5 x a = 296 +9 ..... 1p
5 x a = 305 ..... 1p
a = 305 : 5 ..... 1p
a = 61 ..... 0,5p

3) 4a + 4b + 4c = 240 ..... 2p
a +b +c = 240 : 4 ..... 1p
a +b +c =60 ..... 1p
a +b +b +c +c +c = 100 ..... 2p
60 + b +c +c = 100 ..... 2p
b + 2c = 100 – 60 ..... 1p
b + 2c =40 .....1p

Subiectul III

1) 36km : 2 = 18km (lungimea drumului parcurs în a doua zi) 5p

36km + 18km = 54km (lungimea drumului ramas dupa prima zi) 5p

54km : 2 = 27km (lungimea drumului parcurs în prima zi) 5p

27km + 18km + 36km = 81km (lungimea drumului) 5p

2) prima + a doua : 9kg mere.....7kg pere.....7kg gutui.....48 lei 2p

a treia : 6kg mere.....7kg pere.....7kg gutui.....39 lei 2p

Atunci : 3kg mere costa 9 lei 2p

Si 1kg mere costa 9:3=3 lei 1p

Atunci : 3kg pere.....5kg gutui.....20 - 3 x3 = 11lei 2p

4kg pere.....2 kg gutui.....28 - 6 x3 = 10lei 2p

Daca : 12kg pere.....20kg gutui.....44lei 2p

12kg pere.....6 kg gutui.....30lei 2p

Atunci : 14kg gutui costa 14 lei 2p

1kg gutui costa 1 leu 1p

1kg pere costa (11- 5 x1) :3 = 2lei 2p

COLEGIUL NAȚIONAL DE INFORMATICĂ
TUDOR VIANU

12.05.2022

Colegiul Naţional de Informatică „Tudor Vianu"
Concursul „Micii Campioni" – 2022
Ziua 1

Problema 1. Determinaţi cifrele distincte a, b, c, d ştiind că:

$$\overline{abba} + a + b = \overline{cdda}.$$

Soluţie şi barem orientativ Deoarece numerele $\overline{abba}$ şi $\overline{cdda}$ se termină cu aceeaşi cifră rezultă că $a+b$ se termină în 0, adică $a+b=10$ şi implicit $\overline{abba}+10=\overline{cdda}$ **5p**

Observăm că primele cifre ale numerelor $\overline{abba}$ şi $\overline{cdda}$ sunt diferite, de unde rezultă că a fost o trecere peste mie **3p**

Dar acest lucru este posibil doar când $b=9$ **3p**

De aici obţinem $a=1$, $c=2$ şi $d=0$ **4p**

Observaţie: Orice determinare corectă a cifrelor a, b, c, d fără justificări se punctează cu 3 puncte.

Problema 2. Trei elevi au scris fiecare câte o listă de 50 de cuvinte diferite. După aceea, confruntând listele, s-au şters cuvintele care s-au găsit de cel puţin două ori. Ca rezultat, unul a rămas cu 27 de cuvinte, altul cu 38, iar al treilea cu 34. Să se demonstreze că cel puţin un cuvânt a fost scris de cei trei elevi.

Soluţie şi barem orientativ Presupunem contrariul. Atunci fiecare cuvânt şters a fost scris de exact doi elevi. **4p**

Dacă un cuvânt este şters, atunci el este şters de exact doi elevi şi prin urmare numărul cuvintelor şterse este par. **4p**

Iniţial numărul cuvintelor scrise este 150, adică număr par. Deci şi numărul cuvintelor rămase trebuie să fie par. **4p**

Însă din enunţul problemei a rămas un număr impar de cuvinte $27+38+34=99$, contradicţie. **3p**

Problema 3. Ana are o cutie cu bomboane. Ea ia de cinci ori bomboane din cutie astfel:

- de fiecare dată ia mai multe bomboane decât luase data precedentă;
- prima dată a luat de trei ori mai puţine bomboane decât a luat a cincea oară;
- în total a luat 31 de bomboane.

Câte bomboane a luat Ana a patra oară din cutie?

Soluţie şi barem orientativ Notăm cu a, b, c, d şi e numărul de bomboane pe care Ana îl ia din cutie succesiv, începând cu prima dată şi terminând cu a cincea oară.

Avem $a<b<c<d<e$, $e=3a$ şi $a+b+c+d+e=31$ **1p**

Dacă $a \geq 4$, atunci $b \geq 5$, $c \geq 6$, $d \geq 7$, $e \geq 12$ şi cum $a+b+c+d+e \geq 4+5+6+7+12 = 34 > 31$, contradicţie **4p**

Dacă $a \leq 2$, atunci $e \leq 6$ şi $d \leq 5$, $c \leq 4$, $b \leq 3$ şi cum $a+b+c+d+e \leq 2+3+4+5+6 = 20 < 31$, contradicţie. Prin urmare, $a = 3$ şi $e = 9$ **4p**

Dacă $d \leq 7$, atunci $c \leq 6$ şi $b \leq 5$ şi cum $a+b+c+d+e \leq 3+5+6+7+9 = 30 < 31$, contradicţie **4p**

Deci $d = 8$, iar un exemplu valid este următorul:
$a = 3$, $b = 5$, $c = 6$, $d = 8$, $e = 9$ **2p**

Problema 4. Un ceas electronic afişează timpul în intervalul de la 00 : 00 : 00 la 23 : 59 : 59. De câte ori, în acest interval, apare pe ecranul ceasului o secvenţă de cifre care se scrie la fel de la stânga spre dreapta ca şi de la dreapta spre stânga? (Un astfel de exemplu este 01 : 55 : 10)

Soluţie şi barem orientativ Dacă pe ecran apare secvenţa $ab : cd : ef$, atunci $0 \leq a \leq 2$, $0 \leq b \leq 9$, $0 \leq c \leq 5$, $0 \leq d \leq 9$, $0 \leq e \leq 5$, $0 \leq f \leq 9$ **3p**

Deoarece $a = f$, $b = e$ şi $c = d$, atunci o astfel de secvenţă este determinată de cifrele a, b şi c, unde $0 \leq a \leq 2$, $0 \leq b \leq 5$ şi $0 \leq c \leq 5$ **4p**

Dacă $a = 0$ sau $a = 1$, atunci b şi c sunt cifre de la 0 la 5, în total sunt $2 \cdot 6 \cdot 6 = 72$ de secvenţe **4p**

Dacă $a = 2$, atunci $0 \leq b \leq 3$ şi $0 \leq c \leq 5$ şi numărul acestor secvenţe este de $4 \cdot 6 = 24$ **3p**

În total sunt $72 + 24 = 96$ de secvenţe **1p**

Problema 5. Într-o clasă, nişte elevi au organizat un turneu de şah. Turneul s-a desfăşurat după regula „fiecare elev joacă câte o partidă cu fiecare dintre ceilalţi elevi". În timpul desfăşurării turneului, doi elevi care jucaseră acelaşi număr de partide s-au îmbolnăvit şi s-au retras din turneu, iar ceilalţi au continuat turneul până la sfârşit. Ştiind că în turneu s-au jucat 23 de partide, determinaţi dacă cei doi elevi care s-au îmbolnăvit au jucat între ei până la momentul retragerii lor din turneu.

Soluţie şi barem orientativ Notăm cu A şi B elevii care s-au îmbolnăvit. 6 elevi care joacă între ei „fiecare cu fiecare" vor juca împreună $6 \times 5 : 2 = 15$ partide **1p**

7 elevi care joacă între ei „fiecare cu fiecare" câte o partidă, vor juca împreună $6 \times 7 : 2 = 21$ de partide **1p**

8 elevi care joacă între ei „fiecare cu fiecare" câte o partidă, vor juca împreună $7 \times 8 : 2 = 28$ de partide **1p**

Prin urmare, în turneu, în afară de A şi B, au participat 6 sau 7 elevi **3p**

<u>Caz I</u> Dacă în turneu au fost 8 elevi, atunci numărul partidelor jucate împreună de A şi B ar fi fost $23 - 15 = 8$ partide **3p**

<u>Caz II</u> Dacă în turneu au fost 9 elevi, atunci numărul partidelor jucate împreună de A şi B ar fi fost $23 - 21 = 2$ partide **3p**

Dacă elevii A şi B ar fi jucat între ei, atunci ar fi jucat cu ceilalţi participanţi 7 partide, în primul caz, şi o partidă în cazul al doilea. Deci nu ar fi putut juca acelaşi număr de partide fiecare **3p**

Răspuns: Elevii care s-au retras nu au jucat între ei.

Orice soluţie alternativă completă a oricărei probleme va primi punctaj maxim. Orice soluţie alternativă incompletă va fi punctată corespunzător.

TEST DE SELECȚIE
PENTRU ADMITEREA ELEVILOR ÎN CLASA A V-A
BAREM DE NOTARE MATEMATICĂ

8 IULIE 2022

Orice altă rezolvare care conduce la rezultate corecte se va puncta maxim corespunzător.

Subiectul I

1. 135 + 76 = ...3p

= 211 .....2p

2. 7 x 17=119 .....2p

8 x 83 = 664 .....2p

119 + 664 = 783 .....1p

3. 16b + 16c + 4b + 4c = 200 .....1p

20b +20c =200.....1p

b + c = 200:20 .....2p

b + c = 10 .....1p

4. 9188.....5p

Subiectul II

1) 1 + 3 + 5 + ... + 19 = 100 ..... 4p

2 + 4 + 6 + ... + 20 = 110 ..... 4p

100 + 110 = 210 ..... 2p

2) 1 x 2 x 3 x 4 = 24 ..... 0,5p

5 x 6 x 7 x 8 = 1680 ..... 0,5p

24 + 1680 = 1704 ..... 0,5p

1704 x 2 = 3408 ..... 0,5p

3408 – 49 = 3359 ..... 0,5p

2 x {3 + 4 x [5 + 6 x (79 – a)]} = 3359 - 1 .....1p

3 + 4 x [5 + 6 x (79 – a)] = 3358 : 2 .....1p

4 x [5 +6 x (79 – a)] = 1679 - 3 .....1p

5 +6 x (79 – a)= 1676 : 4 .....1p

6 x (79 – a) = 419 - 5 .....1p

79 – a = 414 : 6 .....1p

a = 79 – 69 .....1p

a = 10 .....0,5p

3)

4a + 4b + 4c = 240 .....2p

a + b + c = 240 : 4 .....2p

a + b + c = 60 .....0,5p

a + a + a + 2b + c + c + c = 140 .....1p

a + a + 100 + c + c = 140 .....1p

2a + 2c = 140 – 100 .....1p

a + c = 40 : 2 .....1p

a + c = 20 .....0,5p

(a + b + c) x (a + c) = 60 x 20 .....1p

Subiectul III

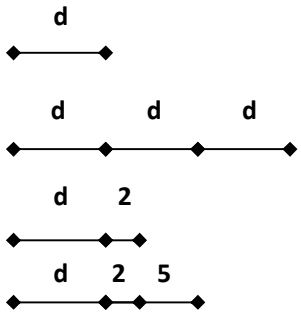
1)

d = 2 + 5 = 7 ani 5p

Vârsta lui Andrei = 7 + 2 = 9 ani 2p

Vârsta lui Paul 7 x 3 – 5 = 16 ani 3p

Desenul de mai jos 10p



2)

a) Tudor a invitat 5 prieteni. Restul au fost invitați de prietenii lui 5p

b)Fiecare dintre cei 5 prieteni ai lui Tudor invită alți 4 prieteni 1p

Care la rândul lor invită 4 x 3 = 12 prieteni 2p

Care la rândul lor invită 12 x 2 = 24 prieteni 3p

Care în final invită alți 24 prieteni 3p

Adunând, obținem că fiecare dintre cei 5 prieteni ai lui Tudor pot invita

4 + 4 x 3 + 12 x 2 + 24 x 1 = 64 de persoane 3p

Numărul maxim de invitați la petrecerea lui Tudor poate ajunge la 5 x 64 = 320 .....3p

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Problema nr.	Răspuns corect
1	C
2	B
3	E
4	A
5	D
6	C
7	E
8	B
9	E
10	D
11	A
12	B
13	C
14	E
15	E

COLEGIUL NAȚIONAL "LUCIAN BLAGA" SEBEȘ
515800 STR. CĂLUGĂRENI NR. 49
TEL. 0258-731217 FAX. 0258-730756
colb.sebes@yahoo.com
http://www.cnlb.ro

MINISTERUL EDUCAȚIEI

Test de depărtajare la matematică pentru admiterea în clasa a V-a

1 iulie 2022

Barem de corectare

Subiectul I (40 puncte)

a) $E = 338 - 336 + [195 : (15 : 5 + 2) - 19] \times 101$ **(10p)**

$E = 2 + (195 : 5 - 19) \times 101 = 2 + 20 \text{ x } 101$ **(5p)**

$E = 2 + 2020 = 2022$ **(5p)**

b) $\{[(2 \times a + 6) : 6 + 6] \times 6 - 6\} \times 3 = 2250$ **(3p)**

$[(2 \times a + 6) : 6 + 6] \times 6 - 6 = 750$ **(3p)**

$[(2 \times a + 6) : 6 + 6] \times 6 = 756$ **(2p)**

$(2 \times a + 6) : 6 + 6 = 126$ **(2p)**

$(2 \times a + 6) : 6 = 120$ **(2p)**

$2 \times a + 6 = 720$ **(2p)**

$2 \times a = 714$ **(2p)**

$a = 714 : 2$ **(2p)**

$a = 357$ **(2p)**

Subiectul II (30 puncte)

Deoarece trandafirii roșii și galbeni sunt în total 39, rezultă că restul până la 74, adică 35 sunt albi. Analog 24 de trandafiri sunt roșii.

Rămâne că 15 trandafiri sunt galbeni. **(10p)**

Cum 35 nu se împarte exact nici la 3 şi nici la 4, rezultă că din cei 35 trandafiri albi se vor alcătui buchetele de 5 flori.

Numărul buchetelor de trandafiri albi este 7. **(10p)**

Cum 15 nu se împarte exact la 4, din cei 15 trandafiri galbeni se vor alcătui 5 buchete de câte 3 flori. Din cei 24 trandafiri roşii se vor alcătui 6 buchete de câte 4 flori.

În total sunt 18 buchete de flori. **(10p)**

Subiectul III (20 puncte)

a) Cel mai mic număr de două cifre care se împarte exact la 7 este $14 = 7 \times 2$, iar cel mai mare număr de două cifre care se împarte exact la 7 este $98 = 7 \times 14$. În total sunt $14 - 2 + 1 = 13$ astfel de numere. **(5p)**

b) Numerele vesele de două cifre sunt: 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98. **(3p)**

Cel mai mare număr vesel care are 5 cifre este 98421 . **(5p)**

Cel mai mic număr vesel de 5 cifre este 21498. **(5p)**

Suma cerută este $98421 + 21498 = 119919$. **(2p)**

Notă: *Se acordă 10 puncte din oficiu*

Orice altă rezolvare corectă va fi punctată corespunzător

Concursul „Micii Campioni”
29 iunie 2020

SOLUTII SI BAREM DE CORECTARE

Raspunsurile corecte la subiectele de tip grila

Numar problema	Raspuns corect
1	d
2	c
3	e
4	b
5	d
6	a
7	c
8	e

Subiectul al II-lea

Notam punctajele obtinute de elevi astfel :

a = punctajul obtinut de Anca ; b = punctajul obtinut de Bianca; c = punctajul obtinut de Costin

d = punctajul obtinut de Dan; e = punctajul obtinut de Eliza

$$a + b + c = 15$$

$$b + c + d = 12$$

Avem astfel $a = d + 3$ 3p

Anca este pe locul 1, Eliza cu 6p este pe locul 3 deci a poate fi doar 8 sau 9 sau 10 ..... 3p

Presupunem prin absurd ca $a = 9$. Obtinem $d = 6$, contrazicem ipoteza conform careia elevii au punctaje diferite. 3p

Presupunem prin absurd ca $a = 8$. Obtinem $d = 5$. Rezulta ca cel putin unul dintre punctajele b sau c este egal cu 7 (pentru locul 2). Deci $b + c \geq 9$. Contrazicem $b + c = 7$..... 5p

Prin urmare $a = 10$ 1p

In concluzie, $d = 7$ deci Dan are 7p si este pe locul al doilea..... 1p

Sa demonstram ca problema are solutie, prezentand un exemplu :

Anca 10p

Dan 7p

Eliza 6p 4p

Bianca 3p

Costin 2p

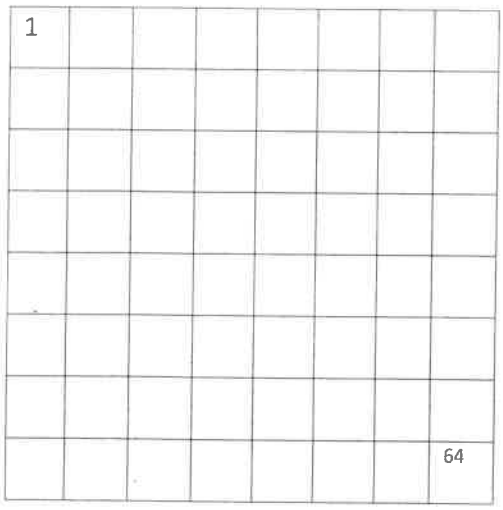
Subiectul al III-lea

Diferenta dintre numerele scrise in doua patratele *vecine* nu este mai mica decat 5, deci este mai mare sau egala decat 5. Avem astfel de demonstrat ca in orice scriere exista doua patratele *vecine* pentru care diferenta dintre numerele inscrise in ele este mai mare sau egala decat 5.....2p

Presupunem ca diferenta oricaror doua numere scrise in patratele vecine este mai mica sau egala decat 4 .....3p

Considerand doua patratele diferite ale tablei, ele sunt separate de cel mult 14 patratele vecine(cel mult 7 pe orizontala si cel mult 7 pe verticala).....5p

De exemplu



Pornind de la patratelul in care este scris numarul 1 spre patratelul in care este scris numarul 64 vom deduce ca $1 + 14 \cdot 4 \geq 64$, ceea ce este fals. Prin urmare, exista cel putin doua patratele vecine pentru care diferenta numerelor scrise in ele este cel putin egala cu 5. .....10p

Soluții

Testul nr.1

Problema 1			*Problema 2*		*Problema 3*		*Problema 4*	
a.	b.	c.	a.	b.	a.	b.	a.	b.
1	7	200	85	16	34	24	25	280

Testul nr. 2

Problema 1			*Problema 2*		*Problema 3*		*Problema 4*	
a.	b.	c.	a.	b.	a.	b.	a.	b.
100	80	115	30 m	Sâmbăta, ziua a V-a, ora 11:00	6 ore	120 vișini	15 puncte	7 probleme

Testul nr. 3

Problema 1			*Problema 2*		*Problema 3*		*Problema 4*	
a.	b.	c.	a.	b.	a.	b.	a.	b.
2551	24	246	I-90 km II-180 km III- 270 km IV-60 km	60 km	1348 cifre	3000 cifre de 2	Roșu	403 pătrățele roșii

Testul nr. 4

Problema 1			*Problema 2*		*Problema 3*		*Problema 4*	
a.	b.	c.	a.	b.	a.	b.	a.	b.
1998	4	100 nr.pare 125 nr.impare	4 minciuni	71 cm	Mama=36 ani Ana = 4 ani Mihai=6ani	Peste 34 de ani	C1= 28 C2= 12	8 bomboane

Testul nr. 5

Problema 1			*Problema 2*		*Problema 3*		*Problema 4*	
a.	b.	c.	a.	b.	a.	b.	a.	b.
24	1	212, 221, 122	a=1079 b=539 c=269 d=134	5	Bunica=69 ani Irina=11 ani Mioara=7 ani Mihai=5 ani	62 ani	100	689

Testul nr. 6

Problema 1		*Problema 2*		*Problema 3*		*Problema 4*	
a.	b.	a.	b.	a.	b.	a.	b.
16;	12	primul număr 69, al doilea număr 255;	încincitul sumei 1620	70	65	25 lei	100 lei

Testul nr.7

Problema 1		*Problema 2*		*Problema 3*		*Problema 4*	
a.	b.	a.	b.	a.	b.	a.	b.
120;	2	161 963	838 037	62 bănci	2 elevi	200 pag	384 pag

Testul nr. 8

Problema 1		*Problema 2*		*Problema 3*		*Problema 4*	
a.	b.	a.	b.	a.	b.	a.	b.
4	a=1	21, 23, 117, 35, 12	208	204 km	840	S=62 375	63

Testul nr. 9

Problema 1		*Problema 2*		*Problema 3*		*Problema 4*	
a.	b.	a.	b.	a.	b.	a.	b.
300	150	62 lei, respectiv 93 lei	217 lei	320 lei	200 lei	29900	nu este termen al șirului

Testul nr. 10

Problema 1		*Problema 2*		*Problema 3*		*Problema 4*	
a.	b.	a.	b.	a.	b.	a.	b.
9	2 030	21, 24, 27 nuci	9 nuci	16 băieți 13 fete	35 fete	Numărul șters 285	O singură soluție.

Testul nr. 11

Problema 1			*Problema 2*		*Problema 3*		*Problema 4*	
a.	b.	c.	a.	b.	a.	b.	a.	b.
$x = 17$ $y = 19$ $x < y$	$n = 264$	73, 75, 77	Nu	Prima cutie:30, a doua cutie:15, a treia cutie:25	128	80	3	1680

Testul nr. 12

Problema 1			*Problema 2*		*Problema 3*		*Problema 4*	
a.	b.	c.	a.	b.	a.	b.	a.	b.
3	$n=4$	79, 81, 83, 85, 87, 89	70 meri, 60 pruni, 100 vișini	5	45	Preț ceapă: 3 lei Preț cartof: 2 lei	93	127

Testul nr. 13

Problema 1			*Problema 2*		*Problema 3*		*Problema 4*	
a.	b.	c.	a.	b.	a.	b.	a.	b.
6	$n=5$	24	Nu	10	M=40, T=43, F=10	5	101	750

Testul nr. 14

Problema 1			*Problema 2*		*Problema 3*		*Problema 4*	
a.	b.	c.	a.	b.	a.	b.	a.	b.
a=6 b=4 a+b=10	11	420, 421, 422, 423, 424	19	50	Nu	16 iepuri 20 rațe	11	585

Testul nr. 15

Problema 1			*Problema 2*		*Problema 3*		*Problema 4*	
a.	b.	c.	a.	b.	a.	b.	a.	b.
a=31, b=48 b:a=1 rest 17	$n=0$	496	Nu	60	60 lăzi cu ardei 40 lăzi cu roșii	7600	31, 43, 57, 73, 91	Da

Colegiul Național
Emil Racoviță Iași
Excelență în educație

Aleea Nicolina Nr. 4
IASI - 700221, ROMANIA
CF 4701592
Tel/Fax: +(40)-232-234 272
email: office@racovita.ro
Web page: www.racovita.ro

Varianta de lucru 1

Barem

1) $4\cdot\left[36-3\cdot\left(2\cdot a+b\right)\right]+117=45$ 5p

$36-3\cdot\left(2\cdot a+b\right)=27$ 5p

$2\cdot a+b=3$ 5p

$\overline{ab}=11$ 5p

2) $a=60+b:4$ 5p

$a=b+24$ de unde obţinem $a=72$ şi $b=48$ 10p

$b=a+24$ de unde obţinem $a=88$ şi $b=112$ 5p

3) Dacă ar fi rezolvat corect toate problemele, Anca ar fi primit 40x5puncte=200 puncte

Înlocuind o problemă rezolvată corect cu una cu rezolvare greşită,

punctajul scade cu 5+20=25 puncte.....5p

Trebuie efectuate 150:25=6 înlocuiri

Finalizare:Anca a greşit 6 probleme şi a rezolvat corect 40-6=34 probleme.....5p

4) Notăm cu *j* numărul de jucători şi cu *p* numărul de panouri.

Avem relaţiile: $j=10\cdot\left(p-2\right)$ 5p

$j+2=7\cdot p$ 5p

De unde $10p-20=7p-2$ 5p

Şi de aici rezultă $p=6$ panouri, iar $j=40$ jucători.....5p

5) a) Avem 4 numere de o cifră

Dacă $\overline{ab}$ este un număr de două cifre din şir atunci $a,b\in\left\{1,2,3,4\right\}$,

deci vom avea $4\cdot4=16$ numere de două cifre.....5p

Raţionând similar, sunt $4\cdot 4\cdot 4=64$ numere de trei cifre

Vom avea $4+16+64=84$ numere de cel mult trei cifre în şir.....5p

b) De la 1 la 444 avem 84 de numere.....5p

Cum $a,b\in\{1,2,3,4\}$, rezultă că vom avea $4\cdot 4=16$ numere de forma $\overline{11ab}$

Scriind numerele de forma $\overline{12ab}$ în ordine crescătoare, găsim că 1213 este pe locul 84+16+3=103 în şir.....5p

Din oficiu se acordă 10p

Total 100p

Colegiul Național
Emil Racoviță Iași
Excelență în educație

Aleea Nicolina Nr. 4
IASI - 700221, ROMANIA
CF 4701592
Tel/Fax: +(40)-232-234 272
email: office@racovita.ro
Web page: www.racovita.ro

Varianta de lucru 2

Barem

1) $\left\{76-4\cdot\left[(2a-1):3-8\right]\right\}:10=4$ 5p

$76-4\cdot\left[(2a-1):3-8\right]=40$ 5p

$(2a-1):3-8=9$ 5p

$a=26$ 5p

2) Fie t, m, f vârstele tatei, mamei , respectiv fiicei

$f=m:2-4,\ t=m+2$ 5p

$t+m=5f+2$ 5p

$f=16$ 10p

3) Fie a,b,c,d,e,f numerele .

Avem relaţiile: $a+b+c+d-e-f=a+b+c+d+e+f-42$ 2p

$e+f=21$ 3p

Deoarece e, f sunt numere de două cifre , rezultă ca ele pot fi numai 10 şi 11. .....5p

4) Fie e-numărul elevilor şi b numărul băncilor

Obţine relaţiile e=2b+1.....5p

e=3(b-5)+2.....5p

Aşadar, erau 14 bănci şi 29 de elevi.....10p

5) a) Aleea are 52*x*10=520 metri.....5p

b) Fiind 53 de copaci , cel de-al 27 –lea se află la distanţe egale faţă de cei de pe capete

Al 27-lea copac este un castan (al nouălea castan de pe alee)..... .....5p

Cum de la capătul din stânga până la al cincilea tei sunt 120m şi până la al 12- lea arţar sunt 340 , rezultă că distanţa dintre ei este de 220m 10p

Din oficiu se acordă 10p

Total 100p

Colegiul Național
Emil Racoviță Iași
Excelență în educație

Aleea Nicolina Nr. 4
IASI - 700221, ROMANIA
CF 4701592
Tel/Fax: +(40)-232-234 272
email: office@racovita.ro
Web page: www.racovita.ro

Varianta de lucru 3

Barem

1. $\{\ldots\}\cdot 2=30 \Longrightarrow \{\ldots\}=15 \Rightarrow 25-[\ldots]:3=15 \Rightarrow [\ldots]=30$.....10p
$43-(\ldots):2=30 \Rightarrow (\ldots)=26 \Rightarrow 30-x:4=26 \Rightarrow x=16$.....10p

2. Avem n pixuri şi $3n$ creioane, a este preţul unui pix şi b este preţul unui creion.
Relaţiile devin $na+3nb=120$ şi $4a+12b=80 \Rightarrow a+3b=20$ 10p
şi atunci $120=n(a+3b)=20n$, deci avem 6 pixuri şi 18 creioane.....10p

3. O cireaşă costă 2 lei.....2p
c=numărul de cireşe, k=numarul de coşuleţe
Avem $c=7k+1$ *şi* $c=10(k-2) \Rightarrow k=7$ *şi* $c=50$.....8p

4. $a=(2b)\times 5+3, respectiv\ b=(c:4)\times 5+3$ *şi* $2b>3, respectiv\ c:4>3 \Rightarrow c>12$....5p
$4b=5c+12, deci\ 2a=5(5c+12)+6=25c+66$.....5p
Din $a-c<263 \Rightarrow 2a-2c<526, adica\ 23c+66<526 \Rightarrow c<20$ şi cum c se împarte exact la 4 rezultă că $c=16, deci\ b=4\times 5+3=23$ *şi* $a=233$.....10p

5. Se observă că numărul pătrăţelelor de aceeaşi culoare dă acelaşi rest la împărţirea la 4. De exemplu pătrăţelele negre sunt câte 1,5,9, etc, numere care dau restul 1 la împărţirea la 4 şi atunci cum $2022=4\cdot 505+2$, rezultă că ultimele 2022 de pătrăţele sunt de culoare roşie 5p
Fie acum x pătrăţica cu numărul 2022 care se află într-un grup de n pătrăţele de aceeaşi culoare.
Din încadrarea $1+2+3+\ldots+(n-1)<2022\le 1+2+3+\ldots n$ rezultă $n=64$.....10p
Deci pătrăţica x cu numărul 2022 este de culoare verde 5p

Din oficiu se acordă 10p
Total 100p

Colegiul Național
Emil Racoviță Iași
Excelență în educație

Aleea Nicolina Nr. 4
IASI - 700221, ROMANIA
CF 4701592
Tel/Fax: +(40)-232-234 272
email: office@racovita.ro
Web page: www.racovita.ro

Varianta de lucru 4 Barem

1. $(20\cdot a+28\cdot c+7\cdot b-28\cdot c)\cdot 3+39\cdot b=$ 10p

   $60\cdot a+21\cdot b+39\cdot b=$ 5p

   $60\cdot(a+b)=60\cdot 13=780$ 5p

2. Din Teorema împărţirii cu rest avem următoarele relaţii:

   $\begin{cases} x=13\cdot c_1+7 \\ y=13\cdot c_2+5 \\ z=13\cdot c_3+5 \end{cases}$ 10p

   Prin amplficarea succesivă a relaţiilor de mai sus cu 2, 3, respectiv 2

   şi prin adunarea relaţiilor astfel obţinute

   $N=13\cdot(2\cdot c_1+3\cdot c_2+2\cdot c_3)+39$ 5p

   $N=13\cdot(2\cdot c_1+3\cdot c_2+2\cdot c_3+3)+0$, deci restul este **0**..... 5p

3. n=15 .....10p

4. Notăm cu b =număr băieţi , f =număr fete

   $\begin{cases} b+f=39 \\ (b-2):2=2\cdot f:3 \end{cases}$ 10p

   $\begin{cases} 4b+4f=30 \\ 3(b-2)=4f \end{cases}$ 5p

   b =18 ,f=12 .....5p

5. $\underline{b_1}\, b_2\, b_3.....b_{11}\, b_{12}\, b_{13}$ → eliminăm băiatul 1 şi rămân 12 moduri de eliminare al celui

   de al 2-lea băiat 5p

   $b_1\, \underline{b_2}\, b_3.....b_{11}\, b_{12}\, b_{13}$ → eliminăm băiatul 2 şi rămân 11 moduri de eliminare al celui

   de al 2-lea băiat 5p

   Analog eliminăm băiatul 11 şi rămân 2 moduri de eliminare al celui de al 2-lea

   băiat şi ultima relaţie ,eliminăm băiatul 12 şi rămâne 1 mod de eliminare al celui

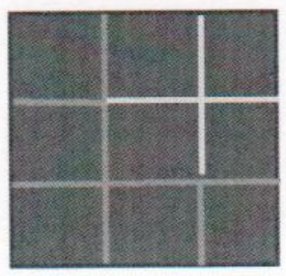
   de al 2-lea băiat.....5p

   In total sunt 1+2+3+...+12=12x13:2=**78** moduri de alegere..... 5p

Din oficiu se acordă 10p

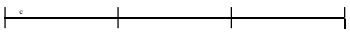
Total 100 p

Barem evaluare

1.	$c(a+4b)+c=78$	2p
	$c=6$	2p
	$a=8$ *și* $b=1$ sau $a=4$ *și* $b=2$	6p
2.	Cei 6 muncitori lucrează în cele 20 de zile 960h	5p
	Cei 6 muncitori lucrează în 4 zile 192h	5p
	Cei 4 muncitori rămași trebuie să lucreze 960-192=768h	5p
	Lucrând câte 6 ore pe zi, cei 4 muncitori rămași termină lucrarea în 768:24=32 de zile	5p
3.	p = numărul apartamentelor cu 4 camere, deci, cu routere cu 4 antene t = numărul apartamentelor cu 3 camere, deci, cu routere cu 3 antene	
	$p+t=39$	5p
	$4p+3t=141$	5p
	p=24 și t=15	10p
4.	2p = o treime din t (t = numărul de tablete) 2p = jumătate din l (l = numărul de laptopuri) 2p = două treimi din q (q= numărul televizoarelor QLED)	5p
	t= 6p, l = 4p, q = 3p	5p
	$t+l+q=91 \Longrightarrow 13p=91 \Longrightarrow p=7$	5p
	t = 42 de tablete, l = 28 de laptopuri, q = 21 de televizoare QLED	3p
	Deci, maxim 21 de săli se pot dota cu exact o tablet, un laptop și un televizor QLED.	2p
5.	a) Prin împărțirea pătratului din dreapta sus din exemplul dat în enunț în patru pătrate (cu segmentele adăugate, ca în figura de mai jos) se obține o împărțire a pătratului initial în $6-1+4=6+3=9$ pătrate.	7p
		3p
	b) La orice împărțire a pătratului inițial în n pătrate, prin împărțirea oricărui pătrat în alte 4 pătrate (ca la punctul a)), se obține o împărțire a pătratului inițial în $n-1+4=n+3$ pătrate.	5p
	De la împărțirea pătratului inițial în 6 pătrate se ajunge după $(2022-6):3=2016:3=672$ pași descriși mai sus la o împărțire a pătratului inițial în 2022 pătrate, nu neapărat toate cu laturile egale.	5p
	Oficiu	10p
	Total	100p

Varianta de lucru 6

Barem

1.	$3 \cdot \overline{ab} = 5 \cdot \overline{ca} \Rightarrow b \in \{0;5\}$	5p
	Dacă $b = 0 \Rightarrow 30a = 50c + 5a \Rightarrow a = 2c$	5p
	$\overline{abc} \in \{201,402,603,804\}$	5p
	Dacă $b = 5 \Rightarrow 30a + 15 = 50c + 5a \Rightarrow 5a + 3 = 10c$ fals	5p
2.	Dacă vom împărți mai multe numere consecutive la 7, putem obține resturile $\underbrace{0,1,2,3,4,5,6}_{\text{câtul } c}, \underbrace{0,1,2,3,4,5,6}_{\text{câtul } c+1}, 0,1, \ldots\ldots$	5p
	Se observă că singurele resturi consecutive cu suma 7 vor fi 3+4=7 respectiv 6+0+1=7	5p
	In primul caz suma câturilor va fi $2c \neq 101$	2p
	iar în al doilea caz suma câturilor va fi $c + (c + 1) + (c + 2) = 101$	5p
	$c = 33$ iar numerele vor fi 237, 238, 239	3p
3.	Notăm cu c prețul cărții, atunci Ioana va avea c-5 lei, Ana va avea c-10 lei iar Matei va avea c-15 lei	3p
	Cum $(c - 5) + (c - 10) + (c - 15) = 2c \Rightarrow c = 30$ lei	5p
	Ioana, Ana și Matei vor avea 25, 20 respectiv 15 lei	2p
4.	Când se năștea cel mai mic, Fratele mijlociu  Fratele mai mare	5p
	Cum împreună aveau 21 de ani, fratele mijlociu avea 9 ani iar cel mare avea 12 ani	5p
	În prezent, fratele cel mai mic are 12 ani, fratele mijlociu 21 ani iar cel mare 24 ani	10p
5.	a) Considerăm șirul format din numerele aflate pe primul loc în fiecare grupă: 1, 3, 5, 7 ,..... Dacă notăm cu x termenul de pe locul 100, atunci $(x - 1):2 + 1 = 100 \Rightarrow x = 199$	5p
	Grupa 100 va fi $(199,199 + 1,199 + 199 + 1) = (199,200,399)$	5p
	b) Forma generală a grupei n este $(2n - 1,2n, 4n - 1)$	2p
	Dacă $2n - 1 = 2103 \Rightarrow n = 1052$	2p

	Dacă $2n = 2103$nu are soluţii numere naturale	2p
	Dacă $4n - 1 = 2103 \Longrightarrow n = 526$	2p
	2103 se va găsi în grupele de pe locurile 526 respectiv 1052	2p

Varianta de lucru 7

Barem

1.	$[1550 - 10 \cdot (a - 12)] : 4 = 375$	5p
	$1550 - 10 \cdot (a - 12) = 1500$	5p
	$10 \cdot (a - 12) = 50$	5p
	$a = 17$	5p
2.	a) Din $a + b = 23 \Rightarrow 2a + 2b = 46$. Din $2a + c = 35 \Rightarrow 6a + 3c = 105$	5p
	Atunci $6a + 2b + 3c = (2a + 2b) + (6a + 3c) = 46 + 105 = 151$	5p
	b) $a + b = 23 \Rightarrow a \neq b$; $2a + c = 35 \Rightarrow a \neq c$	2p
	Dacă $b=c$, atunci din $a + c = 23$ și $2a + c = 35$	3p
	Rezultă că $a = 12$; $b = c = 11$	5p
3.	Fie numerele a, b, c. Din enunț rezultă că : $a + b + c = 104$; $b = 2a + 3$; $c = (b - a) : 3$ sau $c = (a+3):3$	5p
	Înlocuind în prima egalitate obținem $a+2a+3+(a+3):3=104 \Leftrightarrow 10a+12=312 \Rightarrow a=30$, $b=63$, $c=11$	5p
4.	Fie $(6+x)$ vârsta actuală a Elenei. Atunci suma vârstelor actuale ale părinților este $(62+2x)$	5p
	Obținem $6 + x + 62 + 2 \cdot x = 7 \cdot (x + 6) + 6$	5p
	Rezultă $x=5$	5p
	Vârsta actuală a Elenei este 11 ani	5p
5.	a) Cel mai mic număr este 10…099 (șase cifre de zero)	2p
	Cel mai mare număr este 9910…0 (șase cifre de zero)	3p
	b) Primul număr din șir este 10…099 (șase cifre de zero).	2p
	Următoarele două sunt 10…0189 si 10…0198 (cu 5 de zero fiecare)	2p
	Urmează 10…0279, 10…0288, 10…0297 (cu 5 de zero fiecare)	2p
	Următoarele patru numere sunt 10…0369, 10…0378, 10…0387, 10000396 (cu 5 de zero fiecare)	2p
	Al 11-lea număr din șir este 100000459	2p
	Observăm că cifra sutelor este un indicator pentru numărarea termenilor așezați în ordine crescătoare. Deoarece $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$, rezultă că al 27-lea număr din șir va fi al 6-lea din grupa celor care au cifra sutelor 6,adică 100000684	5p

Varianta de lucru 8

Barem

1.	$10 \cdot [362 - 10 \cdot (x + 24:4)] - 3 \cdot 7 + 42:2 = 620$	5p
	$362 - 10 \cdot (x + 24:4)=62$	5p
	$x + 24:4 = 30$	5p
	$x = 24$	5p
2.	Din $c = a:2 \Rightarrow a = 2 \cdot c$	5p
	$d = 4 \cdot a \Rightarrow d = 8c$	5p
	Concluzie: $c = 1,\ a = 2,\ d = 8$ şi b o cifră oarecare	5p
	Cel mai mic număr este 2018 şi cel mai mare număr este 2918	5p
3.	Din enunţ, $\overline{xabc} = 9 \cdot \overline{abc} \Leftrightarrow 1000 \cdot x = 8 \cdot \overline{abc}$	5p
	$125 \cdot x = \overline{abc} \Rightarrow \overline{abc} \in \{125,250,375,500,625,750,875\}$	5p
4.	De la pagina 1 la pagina 99 s-au folosit 20 cifre de 2	2p
	Analog pentru grupa de la 100 la 199, tot 20 cifre de 2	3p
	Pentru grupa de la 200 la 299 s-au folosit 120 cifre de 2	5p
	Rămân 174-160=14 cifre de 2, care se folosesc pentru paginile 302, 312, 320, ...329, 332	5p
	Concluzie: numărul maxim de pagini este 340 Atenţie! Ultima pagină a unei cărţi este numerotată cu un număr par.	5p
5.	Fie a, $a+2$ şi b cele trei numere. Din prima condiţie $a+a+2+b=86 \Leftrightarrow 2a+b=84$	5p
	Avem două situaţii: $2a+3b=152$ sau $2(a+2)+3b=152$	5p
	I) $2a+3b=152$ şi $2a+b=84 \Rightarrow a=25$ şi $b=84-2 \cdot 25 \Rightarrow b=34$. Numerele căutate sunt: 25, 27 şi 34	5p
	II) $2(a+2)+3b=152 \Rightarrow 2a+3b=148$. Cum $b=84-2a \Rightarrow$ $2a+3(84-2a)=148 \Leftrightarrow 2a+252-6a=148 \Rightarrow a=26$. Dar, a este impar, aşadar nu avem soluţie!	5p

BAREM MODEL 1

I. $1325-9\times[280-3\times(108-16)]:12=1325-9\times(280-276):12$ ……10p

$1325-9\times4:12=1325-36:12=1325-3=1322$ ……10p

II. a) Notăm cu n numărul buchetelor de flori.

Deoarece în cele n buchete de flori avem 10 trandafiri vom avea 10+3n garoafe....5p

$10+3n=28\Rightarrow3n=18\Rightarrow n=6$ ……..…10p

b) Pentru a avea un buchet cu numărul cel mai mare de flori, celelalte buchete trebuie să aibă cel mai mic număr de flori……..5p

Deci trebuie să avem 5 buchete formate dintr-un trandafir și din 4 garoafe…….3p

Cel de-al șaselea buchet va fi format din 5 trandafiri și 28-20=8 garoafe……5p

Buchetul va conține 5+8=13 flori ……2p

III. Diferența dintre $\overline{ab}$ și $\overline{ba}$ (a>b) cu a și b numere consecutive este egală cu 9.....10p

$225\times\overline{ab}-225\times\overline{ba}=225\times(\overline{ab}-\overline{ba})=225\times9=2025$ ……10p

IV. a)

$n=2\times c_1+r_1 \quad , \quad r_1<2$

$n=4\times c_2+r_2 \quad , \quad r_2<4$

$n=6\times c_3+r_3 \quad , \quad r_3<6$

$n=8\times c_4+r_4 \quad , \quad r_4<8$

$n=10\times c_5+r_5 \quad , \quad r_5<10$

$n=12\times c_6+r_6 \quad , \quad r_6<12$

…….4p

Dacă r_1 este par, atunci n este par și celelalte resturi sunt pare……..3p

Dacă r_1 este impar, atunci n este impar și celelalte resturi sunt impare……..3p

b) resturile maxime pot fi 1, 3, 5, 7, 9, 11

Dacă resturile sunt pare, atunci $r_1+r_2+...+r_6\le0+2+4+6+8+10=30$ (fals, deoarece suma resturilor este 34)……..5p

Rezultă că resturile sunt impare. Cum 1+3+5+7+9+11=36>34, rezultă că resturile nu pot fi distincte

Cel puțin 2 resturi sunt egale.....5p

BAREM MODEL 2

I. $500-[8\times(5\times a-2)+478]:6=403$ ……..4p

$[8\times(5\times a-2)+478]:6=97$ ……4p

$8\times(5\times a-2)+478=582$ ……..4p

$8\times(5\times a-2)=104$ ……4p

$5\times a-2=13$ ……4p

$5\times a=15$

…….3p

$a=3$

……..2p

II. Fie a suma de bani

9 părți =528 -15=513.....5p

1 parte= 513:9=57... .....10p

a+15=1 parte=57.....5p

a=42 lei 5p

III. Noul număr este $\overline{abab}$ ……..3p

$\overline{abab}=\overline{ab}\times100+\overline{ab}=101\times\overline{ab}$ ……10p

Se mărește de 101 ori ……5p

IV. Pe ultima pagină este un număr par……..5p

Se adună un număr impar…….5p

Numărul de pagini este 2x

$x+1+2x=409$

$3x+1=409$

$x=136$

$2x=272$

…….10p

Barem de corectare

Subiectul I

1)	2)	3)	4)	5)	6)
20	27	508	2	198	682425
5p	**5p**	**5p**	**5p**	**5p**	**5p**

Subiectul al II-lea

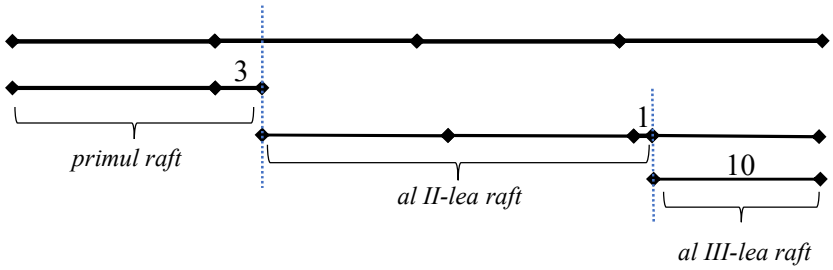
7) a) $20:7=2\ rest\ 6$ ..... **7 p**
Mărgica de pe locul al douăzecelea este de culoare albastră ..... **3 p**

b) $758:7=108\ rest\ 2$ ..... **7 p**
Mărgica de pe ultimul loc este de culoare verde ..... **3 p**

c) Sunt 108 grupe cu câte două mărgele verzi, adica 216 mărgele ..... **5 p**
Ultima grupă are doar o mărgică verde ..... **2 p**
Numărul de mărgele verzi este $108\times 2+1=217$ ..... **3 p**

8) a) Presupunem că ar fi în total 36 de cărți.
Numărul de cărți de pe primul raft ar fi: $36:4+3=12$ ..... **2 p**
Restul de cărți ar fi: $36-12=24$ ..... **2 p**
Numărul de cărți de pe al doilea raft ar fi: $24:3\times 2+1=17$ ..... **2 p**
Numărul de cărți de pe al treilea raft ar fi: $36-12-17=7$ ..... **2 p**
7 este diferit de 10 ..... **2 p**

b) Reprezentare grafică este următoarea:



..... **4 p**

Află jumătate din cărțile de pe al doilea raft: $10+1=11$ ..... **3 p**
Află numărul de cărți de pe al doilea raft: $11\times 2+1=23$ ..... **3 p**

c) Află numărul de cărți de pe al doilea și al treilea raft: $11\times 3=33$ ..... **3 p**
Află trei sferturi din totalul de cărți: $33+3=36$ ..... **3 p**
Află un sfert din total: $36:3=12$ ..... **2 p**
Află totalul de cărți: $4\times 12=48$ ..... **2 p**

*Se acordă **10 puncte** din oficiu*

NOTĂ: Orice altă rezolvare corectă, diferită de cea din barem, se notează corespunzător.

Barem de corectare si notare (varianta 2) 2022

1)(20p)

634-[(824-206):3]x2+3x(5+70)……8p

634-(618:3)x2+3x75……4p

634-206x2+225……..4p

634-412+225=447……4p

Total ……20p

2)(20p)

67-35=32…….…4p

31-23=8…….…. 4p

32x8=256…….6p

256:4=64…….…6p

Total ……...20p

3)(25p)

Reprezentarea corecta a segmentelor ……6p

44:4=11ani (fiica)……..5p

11x3=33 ani (tatal)……..5p

Reprezentarea segmentelor……...4p

33-22=11 ani……5p

Total ……..25p

4)(25p)

Scrierea pe scurt a datelor problemei……6p

55x2=110 lei (6kg carne,40 oua,6kg ceapa)…….. 2p

110-104=6 lei (3kg ceapa)……2p

6:3=2 lei (1kg ceapa)……...2p

55-6=49 lei (3 kg carne+20 oua)……...4p

49-24=25 lei (50 oua)……..2p

25:5=5 lei (10 oua)……2p

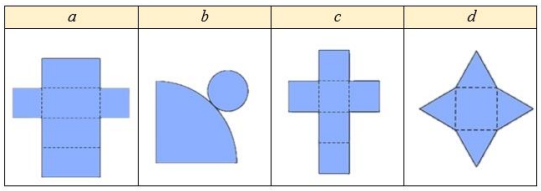
5+8=13 lei (1kg carne)……..2p

13+5+4=22 lei (1kg carne,10 oua,2kg ceapa)……..3p

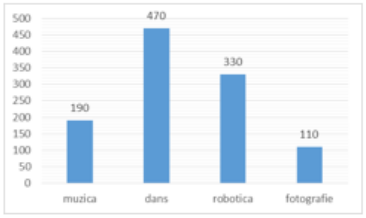
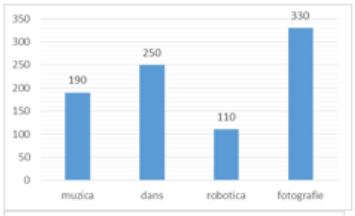
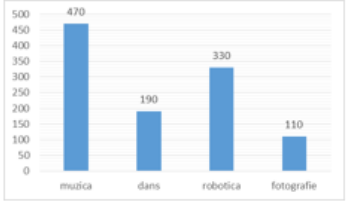
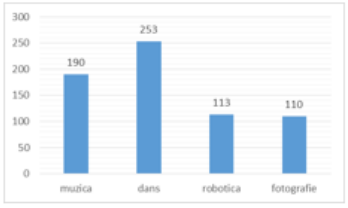
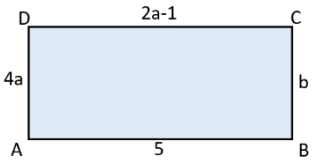
Total ……25p

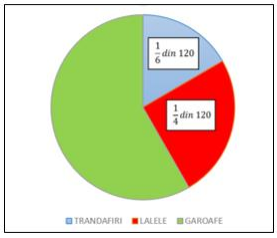
Oficiu 10p

Testare de selecție clasa a V-a
MATEMATICĂ
Barem

Nr. crt.	Subiectul propus - rezolvare	Punctaj
1.	Alege din variantele de mai jos scrierea cu cifre arabe a numărului nouă sute de mii nouăzeci. ○ 90 090 ○ 900 900 ○ 900 090 ○ 900 009 Varianta corectă: **900 090**	**3 puncte**
2.	Observă desfășurarea corpurilor geometrice din imagine. Afirmația ”Cubul este corpul geometric aflat la punctul c” este: a) adevărată b) falsă  Varianta corectă: **a) adevărată**	**3 puncte**
3.	Alege din variantele de mai jos fracția supraunitară cu numitorul 7. a) $\frac{9}{7}$ b) $\frac{6}{7}$ c) $\frac{7}{8}$ d) $\frac{7}{3}$ Varianta corectă: **a) 9/7**	**3 puncte**

4.	Ai o bucată de sârmă cu lungimea de 16 cm. În spațiul de mai jos scrie câte îndoituri trebuie să faci pentru a obține un pătrat și la câți cm una de alta. Răspuns: **3 îndoituri - 1 punct** **4 cm - 2 puncte**	**3 puncte**
5.	Câte axe de simetrie are un pătrat? Alege dintre variantele de mai jos răspunsul corect. ○ 1 ○ 2 ○ 3 ○ 4 Varianta corectă: **4 (axe de simetrie)**	**3 puncte**
6.	Dacă în anul 2024 ziua de 29 februarie va fi într-o joi, atunci în anul 2025 ziua de 29 februarie va fi într-o vineri. ○ Adevărat ○ Fals Varianta corectă: **Fals**	**3 puncte**
7.	În luna ianuarie 2022, Mircea a economisit 256 de lei. El a hotărât ca în fiecare lună să economisească dubul sumei din luna precedentă. Alege pentru fiecare rând, suma pe care a economisit-o în luna precizată. 124 de lei / 512 de lei / 1024 de lei februarie ○ ● ○ martie ○ ○ ● **2 puncte** **2 puncte**	

8.	La chestionarul aplicat elevilor unei școli, s-a constatat că numărul elevilor pasionați de robotică este egal cu triplul numărului de elevi pasionați de fotografie și cu 140 mai mic decât numărul elevilor pasionați de dans. Care dintre următoarele diagrame corespunde situației prezentate? a)  b)  c)  d)  Varianta corectă: **a)**	**3 puncte**
9.	În figura de mai jos sunt prezentate dimensiunile dreptunghiului ABCD. Alege din variantele de mai jos valoarea de adevăr a afirmației: ”b=12”. ○ adevărat ○ fals  Varianta corectă: **adevărat**	**3 puncte**

10.	Află numărul natural ”a” din expresia 900 : [(15 x 2 + a) : 2 - 31] = 90. Pe foaia de concurs scrie rezolvarea completă. Rezolvare: 900 : [(15 x 2 + a) : 2 - 31] = 90 900 : [(30 + a) : 2 - 31] = 90 [(30 + a) : 2 - 31] = 900 : 90 (30 + a) : 2 - 31 = 10 (30 + a) : 2 =10 + 31 (30 + a) : 2 = 41 30 + a = 41 x 2 30 + a = 82 a = 82 – 30 **a = 52**	**5 puncte** 5 operații x 1 p /operație
11.	Într-o împărțire restul este 7, câtul este 22, iar împărțitorul este o cifră impară. În spațiul de mai jos scrie care este deîmpărțitul. Răspuns corect: **205**	**3 puncte**
12.	Diagrama de mai jos prezintă repartiția celor 120 de fire de flori cumpărate dintr-o florărie. Calculează numărul firelor de flori din fiecare categorie, apoi bifează căsuța corespunzătoare răspunsului corect.  *Marcați un singur oval pentru fiecare rând.* 20 30 70 **numărul firelor de trandafiri** ⬭ ⬭ ⬭ **numărul firelor de garoafe** ⬭ ⬭ ⬭	**2 puncte** **2 puncte**

13.	Pe foaia de concurs scrie operațiile și justificările corespunzătoare pentru rezolvarea următoarei probleme. Un grup de copii vor să cumpere un joc cu Sistemul Solar. Dacă fiecare contribuie cu câte 2 lei, mai sunt necesari 30 de lei, iar dacă fiecare contribuie cu câte 6 lei, rămân 10 lei. Află prețul jocului. Rezolvare: 6 – 2 = 4 (diferența în lei pentru fiecare copil) 30 + 10 = 40 (diferența totală în lei) 40 : 4 = 10 (numărul copiilor) 6 x 10 – 10 = 50 lei (prețul jocului) sau 2 x 10 + 30 = 50 lei (prețul jocului) ***Notă***: *Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.*	**5 puncte** 5 operații x0,5 p = 2,5p 5justificărix0,5p =2,5p

COLEGIUL NAȚIONAL "CONSTANTIN CARABELLA"

Strada Locotenent Pârvan Popescu, nr. 58, Târgoviște, județul Dâmbovița, Cod poștal: 130078

Tel/Fax: 0040245 210 785; Tel: 0771 091 329; E-mail: secretariat@carabella.ro; Web: www.carabella.ro

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

- ***Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.***

1. $\left[72:(30-6\times 3)+2\times a\right]:13=2+0\times 2022$ *9p*

$\left[72:(30-6\times 3)+2\times a\right]:13=2$ *3p*

$72:(30-6\times 3)+2\times a=26$ *3p*

$72:(30-18)+2\times a=26$ *3p*

$72:12+2\times a=26$ *3p*

$6+2\times a=26$ *3p*

$2\times a=20$ *3p*

$a=10$ *3p*

Fiecare operație matematică corect rezolvată este notată cu *3* puncte.

Total –30 puncte

2. Cele 4 cifre diferite al căror produs este egal cu 24 sunt 1, 2, 3 și 4.....*2p*

Cel mai mare număr natural de patru cifre diferite care are produsul cifrelor egal cu 24 este 4321.....*2p*

Cele 3 cifre diferite al căror produs este egal cu 24 sunt 1, 3 și 8 și 1, 4 și 6 .....*2p*

Cel mai mic număr natural de trei cifre diferite care are produsul cifrelor egal cu 24 este 138.....*2p*

$4321-138=4183$.....*2p*

Total – 10 puncte

3. Cel mai mare număr par de o cifră este 8.....*2p*

Cel mai mare rest la împărțirea la 8 este egal cu 7.....*3p*

Cel mai mic număr natural de două cifre este 10.....*2p*

COLEGIUL NAȚIONAL "CONSTANTIN CARABELLA"

Strada Locotenent Pârvan Popescu, nr. 58, Târgoviște, județul Dâmbovița, Cod poștal: 130078

Tel/Fax: 0040245 210 785; Tel: 0771 091 329; E-mail: secretariat@carabella.ro; Web: www.carabella.ro

$10 \times 8 + 7 = 87$ *3p*

Total – 10 puncte

4. $2 \times l + 2 \times L = 180\,m$ *1p*

$l + L = 90\,m$ *2p*

..... *3p*

$90 : 5 = 18$ *3p*

$18 \times 2 = 36m$ (lățimea)..... *3p*

$18 \times 3 = 54m$ (lungimea) *3p*

Total – 15 puncte

5. 3 stilouri.....6 penare.....165 lei

1 stilou = 3 penare

15 penare.....165 lei *5p*

$165 : 15 = 11$ lei (un penar) *3p*

$11 \times 3 = 33$ lei (un stilou) *3p*

$100 - (11 + 2 \times 33) = 23$ lei (restul) *4p*

Total – 15 puncte

6. a) A cinsprezecea cifră a numărului N este egală cu 2..... *2p*

b) 9 numere de o cifră $\rightarrow$ 9 cifre..... *1p*

90 de numere de două cifre $\rightarrow$ 180 de cifre..... *2p*

$2022 - 189 = 1833$ cifre necesare pentru scrierea numerelor de trei cifre

$1833 : 3 = 611$ numere de trei cifre, deci avem numerele de la 100 la 710..... *3p*

A 2022-a cifră a numărului N este 0 ..... *2p*

Total – 10 puncte

Concursul de Matematică „Alexandru Myller”

Ediția a XIX-a, 14 mai 2022

Varianta 3

Barem de corectare

SUBIECTUL I

1.	2.	3.	4.	5.	6.
13	10 ore	3	216 cm	225	358 km

SUBIECTUL al II-lea

7. a) Termenii șirului sunt $4\cdot1-3, 4\cdot2-3, 4\cdot3-3, \ldots, 4\cdot51-3$. **5p**

Al 30-lea număr din șir este $4\cdot30-3=117$. **5p**

b) Termenii șirului care au ultima cifră 3 sunt 13, 33, 53, ..., 193. **5p**

În șir există 10 numere care se termină în 3. **5p**

c) Avem 3 numere de o cifră, care au în total 3 cifre. **1p**

Apoi, există 22 numere de două cifre, care au în total 44 de cifre. **3p**

În continuare sunt 26 numere de trei cifre, care au în total 78 de cifre. **3p**

Pentru scrierea tuturor numerelor se folosesc 125 de cifre. **3p**

8. a) În fața lui David sunt 14 copii. **5p**

În spatele Ralucăi sunt $3\cdot14-4=38$ copii. **5p**

b) Fie a numărul copiilor din fața Ralucăi. În spatele lui David sunt $4a$ copii, deci numărul de elevi din șirul indian este $4a+15$. **3p**

În spatele Ralucăi sunt $4a+15-a-1=3a+14$ copii. **3p**

Din $3a+14=38$ obținem că $a=8$. **2p**

Numărul total de copii este 47. **2p**

c) Formăm grupe de câte 11 copii. Avem 4 grupe complete și încă 3 copii. **5p**

Numărul copiilor din clasa a IV-a A este $4\cdot5+3=23$. **5p**

BAREM DE CORECTARE - MATEMATICĂ

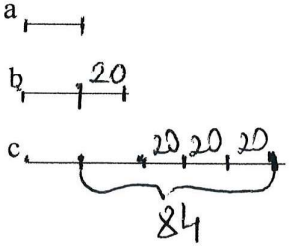
1) b – 8 PUNCTE
2) c – 8 PUNCTE
3) 2022-[18 + 8 x 9 – (a : 3 + 15)] : 3 = 1998

2022 - [18 + 72 – (a : 3 + 15)] : 3 = 1998	1 PUNCTE
[18 + 72 – (a : 3 + 15)] : 3 = 2022 - 1998	2 PUNCTE
[90 – (a : 3 + 15)] : 3 = 24	2 PUNCTE
90 – (a : 3 + 15) = 24 x 3	2 PUNCTE
90 – (a : 3 + 15) = 72	1 PUNCTE
a : 3 + 15 = 90 - 72	1 PUNCTE
a : 3 + 15 = 18	1 PUNCTE
a : 3 = 18 - 15	1 PUNCTE
a : 3 = 3	1 PUNCTE
a = 3 x 3	1 PUNCTE
a = 9	1 PUNCT

TOTAL 14 PUNCTE

4) **Metoda grafica**

Fie a,b , c cele trei numere



5 PUNCTE

Aflăm un segment (primul numar)
84 - 3 x 20 = 24 — 3 PUNCTE

Aflăm b (al doilea număr)
24 + 20 = 44 — 3 PUNCTE

Aflăm c (al treilea număr)
24 x 2 + 3 x 20 = 108 sau 24 + 84 = 108 — 3 PUNCTE

Aflăm suma numerelor
24 + 44 + 108 = 176 — 1 PUNCT

TOTAL 15 PUNCTE

Metoda algebrică

Fie a,b , c cele trei numere

$b = a + 20$

$c = 2 \times b + 20$ } 5 PUNCTE

$c - a = 84$

$2 \times b + 20 - a = 84$	1PUNCT
$2x (a + 20) + 20 - a = 84$	2 PUNCTE
$2 \times a + 2 \times 20 + 20 - a = 84$	2 PUNCTE
$2 \times a - a = 84 - 3 \times 20$	1 PUNCT
$a = 24$	1 PUNCT
$b = 24 + 20 = 44$	1 PUNCT
$c = 24 + 84 = 108$	1 PUNCT
$a + b + c = 176$	1 PUNCT

TOTAL 15 PUNCTE

SE ACORDĂ 5 PUNCTE DIN OFICIU

ORICE SOLUȚIE CORECTĂ, DIFERITĂ DE CEA DIN BAREM, SE PUNCTEAZĂ MAXIM.

Concurs *Eminent*
BAREM
PROBA LA MATEMATICĂ – 28 mai 2022

Varianta nr. 2

Subiectul 1 …… 10p

$\overline{x6} = x + 2022$ ……3p

$10x + 6 = x + 2022$ ……4p

$x = 224$ ……3p

Subiectul 2 ……15p

$104 - \left[18 + 12 \cdot (x-1) : 4\right] \cdot 3 = 5$ 3p

$\left[18 + 12 \cdot (x-1) : 4\right] \cdot 3 = 99$ 2p

$18 + 12 \cdot (x-1) : 4 = 33$ 2p

$12 \cdot (x-1) : 4 = 15$ 2p

$12 \cdot (x-1) = 60$ 2p

$x - 1 = 5$ 2p

$x = 6$ 2p

Subiectul 3 .....20p

$x : \overline{ab} = 3,\ rest\ \text{r}$ 3p

r = 97 .....2p

$r < \overline{ab} \Rightarrow \overline{ab} \in \{98, 99\}$ 5p

$x \in \{391,\ 394\}$ 8p

$S = 785$ 2p

Subiectul 4 .....20p

$8(z+1)=p$ 4p

$12(z-5)=p$ 4p

$8z+8=12z-60 \Rightarrow z=17$ 8p

$p=144$ 4p

Subiectul 5 .....25p

$A+B=52$, $A-2=B+2$ 4p

$A=28,\ B=24$.....6p

IV A: 14 băieți + 14 fete 3p

IV B : $f+2=b,\ f+b=24$.....6p

$b=13$.....4p

Total: 14 + 13 = 27 băieți 2p

Oficiu 10p

Total 100p

Barem – varianta 4

I. 1. $[2022-2022:(2022-2022:337-a)]=2020 \Rightarrow$ .....**(2p)**

$\Rightarrow 2022:(2022-6-a)=2 \Rightarrow$ .....**(5p)**

$\Rightarrow 2016-a=1011 \Rightarrow$ .....**(5p)**

$\Rightarrow a=1005$ .....**(3p)**

2. a) $\{[5\times(207+33)+3\times102+494]:50+8\}:12=$

$=[(5\times240+306+494):50+8]:12=$ ..... **(2p)**

$=[(1200+306+494):50+8]:12=$

$=(2000:50+8):12=$ .....**(3p)**

$=(40+8):12=4$

..... **(2p)**

b) 9+12+15+...+2022-8-11-14-...-2021=

= 1+1+...+1 **(4p)** de (2022-9):3+1 ori

=672 **(4p)**

II. 1. Avem $77=7\times11$ **(5p)**

Prin urmare $77=7\times11\times\underbrace{1\times1\times...\times1}_{\text{de 59 de ori}}=7+11+\underbrace{1+1+...+1}_{\text{de 59 de ori}}$, adică numerele sunt $7,11,\underbrace{1,1,...,1}_{\text{de 59 de ori}}$ **(10p)**

2. Notăm cu: N numărul inițial,

n numărul obținut prin tăierea ultimelor două cifre ale lui N,

$\overline{ab}$ numărul format de ultimele două cifre ale lui N.

Cazul 1 $a\neq0$

Numărul N se poate scrie, după tăierea ultimelor 2 cifre: $N=n\times100+\overline{ab}$ .....**3 p**

Numărul N, fiind de 101 ori mai mare decât n, avem și egalitatea $N=n\times101$ .....**3 p**

Atunci obținem egalitatea $n\times100+\overline{ab}=n\times101$, din care $\overline{ab}=n\times101-n\times100$

Deci $\overline{ab}=n$ și atunci $N=\overline{ab}\times100+\overline{ab}$ **2p**

adică $N=\overline{abab}$, cu a cifră diferită de 0, oarecare, iar b cifră oarecare.

Pentru cifra ***a*** sunt 9 cazuri și pentru cifra ***b*** sunt 10 cazuri,

deci vom avea 9 x 10 = 90 de numere N. .....**2 p**

Cazul 2 $a=0$

Analog cu cazul 1 se obtine $N=n\times100+b$, de unde $n=b$ si $N=101b$.....**2p**

Deoarece $b=0$ nu convine, b poate lua 9 valori, deci vom avea 9 numere N.....**2p**

In concluzie exista 90+9=99 de numere N cu proprietatea din enunt. **1p**

III. a) 2022=4×505+2. A 2022-a cifră a lui n este a doua cifră din secvența a 506-a, deci este zero **(10p)**.

b) a=505×6+2, b=505×6+4. b este mai mare ca a cu 2 **(10p)**

c) Cifrele de pe pozițiile 3, 6, 9, 12 sunt: 2, 0, 2, 2.

Deoarece primele 12 cifre ale numărului formează 3 secvențe complete de câte 4 cifre consecutive, acestea se vor repeta în următoarea grupare de câte 3 secvențe.

Numărul de grupe 202220222022, pe care le putem forma cu cele 4 x 2022 cifre ale lui n este: 8088 : (3 x 4) = 674 **(5p)**

Suma este $674\times(2+0+2+2)=4044$ **(5p)**

Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

Colegiul Naţional „Gheorghe Lazăr”
Str. Gh. Lazăr Nr. 1 - 3
Sibiu 550165
Tel: (+40) 269 212 896
Fax: (+40) 269 215 352
cnglazar@gmail.com
http://www.cngl.eu

Varianta 1

TEST DE DEPARTAJARE
clasa a V-a - 2022
MATEMATICĂ

Barem de corectare

SUBIECTUL I (15 puncte)

Numărul exercițiului	Litera corespunzătoare rezultatului corect
1	D
2	C
3	A

SUBIECTUL II (15 puncte)

Numărul exercițiului	Răspuns corect
1	306
2	20
3	8

SUBIECTUL III (60 puncte)

1

a) $100-(100-40):6\times[(18\times36-17\times36):(53-924:21)]=$

$100-60:6\times[(648-612):(53-44)]=$	4 operaţii x 2 p = **8p**
$100-60:6\times(36:9)=$	2 operaţii x 1 p = **2p**
$100-10\times4=$	2 operaţii x 1 p = **2p**
$100-40=$	1 operaţii x 1 p = **1p**
60	1 operaţie x 1 p = **2p**

b) $[36:(24-a)+29]:5=7$

$36:(24-a)+29=7\cdot5$	**2p**
$36:(24-a)+29=35$	**2p**
$36:(24-a)=35-29$	**2p**
$36:(24-a)=6$	**2p**
$24-a=36:6$	**2p**
$24-a=6$	**2p**
$a=24-6$	**2p**
$a=18$	**1p**

2. Calculați suma tuturor numerelor mai mici decât 12 care se pot scrie ca sumă a două numere naturale consecutive.

Metoda I

$0 + 1 = 1 < 12$	**2p**
$1 + 2 = 3 < 12$	**2p**
$2 + 3 = 5 < 12$	**2p**
$3 + 4 = 7 < 12$	**2p**
$4 + 5 = 9 < 12$	**2p**
$5 + 6 = 11 < 12$	**2p**
$6 + 7 = 13 > 12$	**1p**
$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36$	**2p**

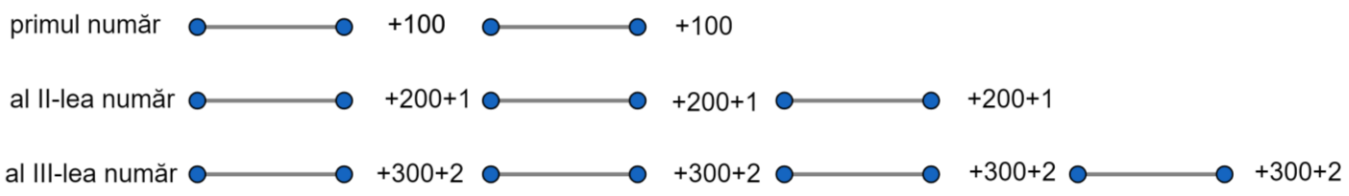
Metoda II

Suma a două numere consecutive este un număr impar.	**7p**
Numerele sunt: 1; 3; 5; 7; 9; 11.	**6p**
Suma numerelor este: $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36$	**2p**

3. Suma a trei numere naturale este 2020. Determinați numerele, știind că dacă micșorăm cu 100 jumătatea primului număr, cu 200 treimea celui de-al doilea număr și cu 300 sfertul celui de-al treilea număr, obținem numere naturale consecutive în ordine crescătoare.

Rezolvare și barem

Realizarea desenului: **6p**



Facem părți egale: $\mathbf{2020 - 100 \cdot 2 - (200 + 1) \cdot 3 - (300 + 2) \cdot 4 = 9}$	**2p**
Numărul de părți: $2 + 3 + 4 = 9$părți	**2p**
O parte $9 : 9 = 1$	**2p**
Primul număr: $(1 + 100) \cdot 2 = 202$	**1p**
Al doilea număr: $(1 + 200 + 1) \cdot 3 = 606$	**1p**
Al treilea număr: $(1 + 300 + 2) \cdot 4 = 1212$	**1p**

Observație: Orice rezolvare corectă se punctează corespunzător.

BAREM

Se acordă 30 p din oficiu.
Problemele 1-6 valorează 10 p.
Răspunsurile greşite se penalizează cu 2 p, pentru problemele 1 – 6.
Căsuţele lăsate goale valorează 0 p.

Răspunsuri:

1.	**B**
2.	**A**
3.	**D**
4.	**C**
5.	**C**
6.	**B**

Pentru orice altă metodă de rezolvare corectă, se acordă punctajul maxim !

Pentru problemele 7, 8 şi 9 se cer rezolvările complete! Fiecare problemă valorează 20p.

7. **a)** m = vârsta mamei în prezent — 1 p
f = vârsta fiilor gemeni în prezent — 1 p
$m-4=2\cdot(f-4+f-4)$ — 3 p
$m+6=3\cdot(f+6)-10$ — 3 p
$m=4\cdot f-12$ — 2 p
$m=3\cdot f+2$ — 2 p
Obține $4\cdot f-12=3\cdot f+2$ — 1 p
Rezultă $f=14,\ m=44$. — 2 p
b) x = numărul de ani (din urmă) — 1 p
$44-x=4\cdot(14-x)$ — 3 p
Obține $x=4$. — 1 p

8. **a)** n = numărul de platouri — 2 p
b = numărul de banane $\Rightarrow b=5\cdot n+36$ — 3 p
m = numărul de mere $\Rightarrow m=3\cdot n+5$ — 3 p
$b=2\cdot m$ — 2 p
$5\cdot n+36=2\cdot(3\cdot n+5)$ — 3 p
Obține $n=26$ platouri — 2 p
b) Obține $b=5\cdot 26+36\Rightarrow b=166$ — 2 p
$40\cdot 5=200$ — 2 p
Mai trebuie $200-166=34$ banane — 1 p

9. x = numărul treptelor situate deasupra de Călin — 2 p
y = numărul treptelor situate dedesubt de Călin — 2 p
Scara este formată din $x+y+1$ trepte — 3 p
$3\cdot x=y$ — 3 p
$x+11=y-11$ — 2 p
$x+11=3x-11\Rightarrow$ — 2 p
$\Rightarrow 2x=22\Longrightarrow x=11$ — 2 p
$y=33$ — 2 p
Avem $11+1+33=45$ trepte — 2 p

TOTAL : 150 PUNCTE

TEST PENTRU ADMITEREA ÎN CLASA A V-A

Varianta 2, 28 mai 2022

SOLUȚII

I a) $n=\{5+67:[100-(20-9)\times(59-56)]\}\times 400-378=[5+67:(100-11\times 3)]\times 400-378=$

$=[5+67:(100-33)]\times 400-378=(5+67:67)\times 400-378=(5+1)\times 400-378=$

$=6\times 400-378=2400-378=2022.$ .....**2p (Câte 0,25 p pentru fiecare calcul corect.)**

b) $4=2022:6-9\times(10+a)$

$4=337-9\times(10+a)$

$9\times(10+a)=337-4$

$9\times(10+a)=333$

$10+a=333:9$

$10+a=37$

$a=37-10$

$a=27.$ **1p**

II a)Metoda I: Notăm cu k numărul lădițelor cu cireșe. În acestea s-au pus $\underbrace{5+5+\ldots+5}_{\text{de } k \text{ ori } 5}=5\times k$ kg de cireșe, iar cantitatea totală de cireșe este $c=5\times k+5$ kg.

Deoarece vișinele s-au pus tot în k lădițe, cantitatea totală de vișine este de $v=6\times k+6$ kg. Cum $v=30+c$, obținem $6\times k+6=30+5\times k+5$, deci $k=29$. ***R:*** $29+29=58$ de lădițe.

Metoda a II-a: Notăm cu k numărul lădițelor cu cireșe. În fiecare dintre cele k lădițe cu vișine s-a pus câte 1 kg de fructe în plus, față de lădițele cu cireșe. Așadar, în lădițe sunt cu k kilograme de vișine mai mult decât cireșe.

Au rămas nepuse în lădițe 6 kg de vișine și 5 kg de cireșe, deci au rămas în afara lădițelor cu 1 kg de vișine mai mult decât cireșe. În total, sunt cu $k+1$ mai multe kilograme de vișine decât de cireșe, deci $k+1=30$ și $k=29$. ***R:*** $29+29=58$ de lădițe. **1p**

b)În lădițe s-au pus $5\times 29=145$kg de cireșe. ***R:*** $145+5=150$ kg de cireșe. **1p**

III a). Ultimele trei numere alăturate din A sunt 2196, 2199 și 2202. ..... **1p**

Suma ultimelor 10 cifre ale lui A este: $9+6+2+1+9+9+2+2+0+2=42$. **1p**

b) În A sunt alăturate, de la stânga la dreapta, 3 numere de o cifră: 3, 6 și 9. Apoi sunt scrise numerele $12=3\times 4$, $15=3\times 5$, ..., $99=3\times 33$, în număr de $33-4+1=30$. Aceste 30 de numere conțin $30\times 2=60$ de cifre ale lui A. Până la cifra cu numărul 100, în A mai trebuie scrise $100-3-60=37$ de cifre, grupate în 12 numere de 3 cifre, și anume $102=3\times 34, 105=3\times 35,\ldots, 135=3\times 45$, urmate de încă o cifră. Deoarece următorul număr care se scrie în A, după 135, este 138, cifra cu numărul 100 este egală cu 1. ..... **1p**

c)Da. Alăturând termenii 2022 și 2025 ai șirului, obținem 202**2202**5 ..... **1p**

TEST DE VERIFICARE PENTRU ADMITEREA ELEVILOR ÎN CLASA A V-A
24 iunie 2022

MATEMATICĂ
Soluții și barem de evaluare

1. Aflați numărul natural a dacă:

$$6\times\left[351-\left(1326:a+1\right)\right]=2022\,.$$

(20 de puncte)

Soluție:

$2022:6=337$ (5 puncte)

$351-337=14$ (5 puncte)

$14-1=13$ (5 puncte)

$a=1326:13=102$ (5 puncte)

2. Lungimea unui dreptunghi este de șapte ori mai mare decât lățimea acestuia. Perimetrul dreptunghiului, exprimat în metri, este egal cu cel mai mic număr natural par de patru cifre, cu cifrele diferite. Aflați diferența dintre lungime și lățime.

(20 de puncte)

Soluție:

$P=1024\,\text{m}$ (5 puncte)

$L=7l$ (5 puncte)

$l=64\ \text{m}$ (5 puncte)

$L-l=64\cdot 6=384\ \text{m}$ (5 puncte)

3. Gigel trebuie să joace 20 de meciuri într-un turneu de șah. La un moment dat, Gigel observă că a câștigat jumătate dintre meciurile jucate până atunci, pierzând o treime dintre acestea, iar trei s-au încheiat la egalitate. Câte meciuri i-au mai rămas de jucat lui Gigel?

(20 de puncte)

Soluție:

Cele 3 meciuri încheiate la egalitate reprezintă $\frac{1}{6}$ din numărul meciurilor jucate până în acel moment. (10 puncte)

$3\cdot 6=18$ meciuri jucate (5 puncte)

$20-18=2$ meciuri rămase (5 puncte)

4. Determinați cel mai mare număr natural care poate fi deîmpărțitul unei împărțiri, știind că restul este cu 100 mai mic decât deîmpărțitul.

(15 puncte)

Soluție:

$D = \hat{I} \cdot C + R,\ R < \hat{I}$ (2 puncte)

$D = R + 100$ (2 puncte)

$\hat{I} \cdot C = 100$ (2 puncte)

$\hat{I} = 100$ (3 puncte)

$R = 99$ (3 puncte)

$D = 199$ (3 puncte)

5. Un număr natural de trei cifre se numește „*meșotist”* dacă cifra sa din mijloc este mai mare decât suma celorlalte două cifre. Câte numere „*meșotiste”* au produsul cifrelor egal cu zero?

(15 puncte)

Soluție:

Justificarea faptului că numerele „*meșotiste”* au forma $\overline{ab0}$ (5 puncte)

Sunt 8 numere de forma $\overline{1b0}$, 7 numere de forma $\overline{2b0}$, ..., un număr de forma $\overline{8b0}$ (5 puncte)

Total $1+2+...+8=36$ numere (5 puncte)

Notă: Orice rezolvare corectă, diferită de cea din barem, va fi punctată corespunzător.

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Varianta 2

Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Se acordă zece puncte din oficiu

1.	$100:\{[100+100\times(a-100)]:100-100\}=10$ $[100+100\times(a-100)]:100-100=10$ $[100+100\times(a-100)]:100=110$ $100+100\times(a-100)=11000$ $100\times(a-100)=10900$ $a-100=109$ $a=209$	4p 4p 4p 4p 3p 3p 3p
2	Al patrulea număr= 1p (o parte) Al treilea număr = 2p Al doilea număr = p-17 Primul număr = p+11 $5p=334+17-11$ $5p=340$ $p=68$ al treilea număr este 136 al doilea număr este 51 primul număr este 79	12p 10p 3p
3	Fie a = numărul de răspunsuri corecte ale primului copil (I) b = numărul de răspunsuri corecte ale celui de al doilea copil (II) c= numărul de răspunsuri corecte ale celui de al treilea copil (III) I a obținut $10+2\times a$ puncte II a obținut $10+2\times b$ puncte III a obținut $10+2\times c$ puncte $10+2\times a+10+2\times b+10+2\times c=82$ $2\times(a+b+c)=52$ $a+b+c=26$ Punctajele obținute sunt diferite. Putem presupune că $10\geq a>b>c$	5p 5p

	Deoarece 9+8+7=24<26 $\Rightarrow a=10$ Rezultă b+c=16. Deoarece 8+7=15<16 $b\le 9\Rightarrow b=9, c=7$ Punctajele sunt: 30, 28, 24 puncte **OBSERVAȚIE:** Se acordă 5p pentru scrierea soluției corecte 30, 28, 24 fără justificare.	5p 3p 2p
4	Între n și m sunt m-n-1 numere naturale (n<m) $\overline{ba}-\overline{ab}-1=44\Rightarrow 9\times(b-a)=45\Rightarrow b-a=5$ $\overline{dc}-\overline{cd}-1=53\Rightarrow 9\times(d-c)=54\Rightarrow d-c=6$ între $\overline{cab}$ și $\overline{dba}$ sunt $\overline{dba}-\overline{cab}-1$ numere $\overline{dba}-\overline{cab}-1=100\times d+\overline{ba}-(100\times c+\overline{ab})-1$ $100\times(d-c)+\overline{ba}-\overline{ab}-1=$ $=100\times 6+44$ $=644$ *numere*	5p 5p 5p 5p

Colegiul Național ”Mihai Viteazul” Ploiești

TEST DE ADMITERE ÎN CLASA A V-A
BAREM
Proba scrisă la matematică
29 iunie 2022

Notă: Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător. Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.

SUBIECTUL 1 (30 puncte = 20 puncte + 10 puncte)

a) Aflați numărul *a* din egalitatea $54-16:\left[\left(36-6\times a\right):5+2\right]=52$.

b) Se dau numerele naturale *a*, *b*, *c* cu proprietatea $a+b=8$. Să se calculeze numărul

$$N=\left[4\times\left(5\times a+7\times c\right)+\left(b-4\times c\right)\times 7\right]\times 3+39\times b.$$

Soluție:

a) $16:\left[\left(36-6\times a\right):5+2\right]=2$ 4p

$\left[36-6\times a\right]:5+2=8$ 4p

$\left[36-6\times a\right]:5=6$ 4p

$36-6\times a=30$ 4p

$6\times a=6$ 2p

$a=1$ 2p

b) $N=\left[4\times\left(5\times a+7\times c\right)+\left(b-4\times c\right)\times 7\right]\times 3+39\times b$

$N=\left(20\times a+28\times c+7\times b-28\times c\right)\times 3+39\times b$ 2p

$N=60\times a+21\times b+39\times b$ 2p

$N=60\times a+60\times b$ 2p

$N=60\times\left(a+b\right)$ 2p

$N=60\times 8=480$ 2p

SUBIECTUL 2 (20 puncte)

Un sportiv își planifică să alerge un anumit număr de kilometri în 7 zile. În prima zi el aleargă o zecime din acest număr. Apoi, în fiecare zi, cu 3 kilometri mai mult decât în ziua precedentă reușind astfel să realizeze numărul de kilometri planificat. Câți kilometri a alergat sportivul în ultima zi?

Soluție:

Notăm cu *n* = numărul total de km

Ziua 1:	*n*:10	1p
Ziua 2:	*n*:10+3	1p
Ziua 3:	*n*:10+3x2	1p

Ziua 4: n:10+3x3 1p
Ziua 5: n:10+3x4 1p
Ziua 6: n:10+3x5 1p
Ziua 7: n:10+3x6 1p
Deci $(n:10)+(n:10+3)+...+(n:10+3\times 6)=n$ 5p
$7\times(n:10)+3\times(1+2+...+6)=n$ 2p
$7\times(n:10)+3\times 21=n$ 2p
$7\times n+3\times 210=10\times n$
$3\times n=3\times 210$
$n=210$ 2p
În a 7-a zi sportivul a alergat $n:10+18=21+18=39$ km. 2p

SUBIECTUL 3 (20 puncte)

Să se determine cifrele *a*, *b*, *c*, *d* dacă:

$$\overline{abcd}-\overline{abc}=2022.$$

Soluție:
$10\times\overline{abc}+d-\overline{abc}=2022$ 6p
$9\times\overline{abc}+d=2022$ 4p
d nu poate fi egal cu 9 pentru că 2022 nu se împarte exact la 9 2p
dacă *d* este mai mic decât 9, împărțirea lui 2022 la 9 dă câtul 224 și restul 6 4p
deci $a=2, b=2, c=4, d=6$ 4p

SUBIECTUL 4 (20 puncte = 5 puncte + 5 puncte + 10 puncte)

Se consideră numărul *n* = 202220222022...2022, unde secvența 2022 se repetă de 2022 de ori.

a) Care este a 2022-a cifră a numărului *n*?
b) Notăm cu *a* suma primelor 2022 de cifre și cu *b* suma ultimelor 2022 de cifre ale numărului *n*. Aflați care dintre numerele *a* sau *b* este mai mare și cu cât?
c) Calculați suma cifrelor numărului *n* aflate pe toate pozițiile care se împart exact la 5 (adică pozițiile 5, 10, 15, 20, ...).

Soluție:

a) Pentru că numărul este format din secvențe de 4 cifre
iar $2022=4\times 505+2$ 3p
numărul *n* începe cu 505 secvențe de 4 cifre și încă 2 cifre: 2 și 0. 1p
Deci pe poziția 2022 este cifra 0. 1p

b) $a=505\times(2+0+2+2)+2+0=3032$ 2p
$b=505\times(2+2+0+2)+2+2=3034$ 2p
b este mai mare decât *a* și $b-a=2$ 1p

c) *n* = 2022**2**0222**0**2220**2**2202**2**2022**2**0222**0**2220**2**2202**2**2022**2**0222**0**22.....
cifrele de pe pozițiile 5, 10, 15, 20, ... sunt
2, 0, 2, 2, 2, 0, 2, 2, 2, 0, 2, 2, ...
deci se repetă secvența 2022. 3p
Numărul de poziții care se împart exact la 5 este 1617
pentru că $4\times 2022=5\times 1617+3$. 3p
Deoarece $1617=4\times 404+1$ suma cerută este 3p
$404\times(2+0+2+2)+2=2424+2=2426$ 1p

Concursul de Matematică „Traian Lalescu”
Ediţia a XXIII-a, 28 mai 2022

Barem de corectare

1. Calculați:

$$50-25:\left[125-4\cdot\left(100:20\cdot 5+5\right)\right].$$

Soluție. $125-4\cdot\left(100:20\cdot 5+5\right)=5$, **(5p)**

$50-25:\left[125-4\cdot\left(100:20\cdot 5+5\right)\right]=45$. **(5p)**

2. Andrei și Bogdan cântăresc împreună 66 de kilograme, Bogdan și Carol 84 de kilograme, iar Carol și Andrei 78 de kilograme. Câte kilograme cântăresc toți cei trei băieți împreună?

Soluție. Dacă Andrei cântărește a kg, Bogdan b kg și Carol c kg, atunci $a+b=66$, $b+c=84$ și $c+a=78$, deci $2\cdot\left(a+b+c\right)=66+84+78=228$. **(5p)**

Așadar, $a+b+c=228:2=114$. Cei trei băieți cântăresc împreună 114 kg. **(5p)**

3. Calculați suma tuturor numerelor naturale impare de forma $\overline{abc}$, știind că a, b, c sunt trei dintre cifrele 0, 1, 2, 3 (cifrele a, b, c sunt diferite și $a\neq 0$).

Soluție. Numerele care îndeplinesc condițiile din enunț sunt: 103, 123, 201, 203, 213, 231, 301, 321. **(5p)**
Suma acestor numere este egală cu 1696. **(5p)**

4. Determinați cel mai mare număr natural care împărțit la 100 dă câtul mai mic decât restul.

Soluție. Dacă n este numărul căutat, atunci $n=100\cdot c+r$, unde c și r sunt două numere naturale astfel încât $c<r<100$. **(5p)**
Cea mai mare valoare a lui n se obține atunci când c și r iau valorile cele mai mari posibile, adică $c=98$ și $r=99$. Deci, cel mai mare număr natural care împărțit la 100 dă câtul mai mic decât restul este $n=100\cdot 98+99=9899$. **(5p)**

5. Maria a avut primul copil la 25 de ani. Doi ani mai târziu, ea a născut al doilea copil, iar după alți trei ani a născut al treilea copil. Maria și copiii săi s-au născut în aceeași zi a anului.
a) Câți ani avea Maria când a născut al treilea copil?
b) Aflați câți ani va avea Maria atunci când vârsta sa va fi egală cu suma vârstelor celor trei copii ai săi..

Soluție. a) Maria avea 30 de ani când a născut al treilea copil. **(10p)**
b) Să presupunem că Maria va avea $30+x$ ani atunci când vârsta sa va fi egală cu suma vârstelor celor trei copii ai săi. Din egalitatea $30+x=x+\left(x+3\right)+\left(x+5\right)$, deducem că $x=11$. **(5p)** Deci, Maria va avea 41 de ani atunci când vârsta sa va fi egală cu suma vârstelor celor trei copii ai săi. **(5p)**

6. Ana a primit un coș cu 60 de mere, unele roșii și celelalte verzi, din care a început să mănânce câte trei mere pe zi: două roșii și unul verde.

a) Aflați câte mere roșii au fost la început, știind că Ana a terminat de mâncat toate merele verzi în 20 de zile.

b) Aflați câte mere roșii au fost la început, dacă în ziua în care Ana a terminat de mâncat toate merele verzi din coș, numărul merelor roșii rămase era egal cu numărul merelor verzi care au fost la început în coș.

Soluție. a) Cum Ana mănâncă câte un măr verde pe zi și merele verzi au ajuns pentru 20 de zile, înseamnă că în coș au fost la început 20 de mere verzi. **(5p)** Deci, în coș au fost la început 40 de mere roșii. **(5p)**

b) Fie r numărul merelor roșii și v numărul merelor verzi care au fost la început în coș. Merele verzi s-au terminat în v zile, deci, în acest timp, Maria a mâncat $2\cdot v$ mere roșii. Cum numărul merelor roșii rămase în coș, după terminarea merelor verzi, este v, rezultă că $r=2\cdot v+v=3v$. **(5p)** Din relațiile $r+v=60$ și $r=3v$, obținem $r=45$ și $v=15$. Deci, în coș au fost la început 45 de mere roșii. **(5p)**

7. Fie numărul $n=1234567891011...20212022$, obținut prin alăturarea tuturor numerelor naturale de la 1 la 2022, scrise unul după altul, în ordine crescătoare.

a) Aflați câte cifre are numărul n.

b) Care este cifra numărului n situată pe poziția 2022 (de la stânga la dreapta)?

c) Determinați cel mai mare număr care se poate obține din n prin ștergerea a exact 171 de cifre.

Soluție. a) Printre numerele naturale de la 1 la 2022 sunt 9 numere de o cifră, 90 de numere de două cifre, **(5p)** 900 de numere de trei cifre și 1023 de numere de patru cifre. Prin urmare, numărul cifrelor lui n este egal cu $9+2\cdot 90+3\cdot 900+4\cdot 1023=6981$. **(5p)**

b) Pentru scrierea numerelor naturale de la 1 la 99 se folosesc 189 de cifre. Cum $2022-189=1833$ și $1833:3=611$, rezultă că cifra de pe poziția 2022 a lui n este a treia cifră a celui de-al 611-lea număr de trei cifre, adică a treia cifră a numărului 710. Răspunsul este 0. **(5p)**

c) Pentru a obține un număr cât mai mare, vom șterge cât mai multe cifre diferite de 9, în ordinea în care apar, de la stânga la dreapta. De la 1 la 99 sunt folosite 20 de cifre de 9, deci eliminăm $189-20=169$ de cifre. Apoi, mai ștergem cele două zerouri ale numărului 100 și numărul căutat este $\underbrace{99...9}_{\text{20 de cifre}}1101102103...20212022$. **(5p)**

Notă. Orice altă soluţie corectă primeşte punctajul corespunzător.

CONCURSUL MICUL RACOVIȚIST

Ediția 2022

Barem de evaluare – disciplina matematică

Problema 1 (15 puncte)

a) $(56 : 7 - 3) = 5$ 2p
$[31 - (56 : 7 - 3) \times 4] = 11$ 2p
$\{235 : 5 + 75 : 3 \times 11\} = 322$ 2p
$82 + 322 : 7 = 128$ 2p

b) Cuvântul RACOVITA se repetă şi are 8 litere 2p
$2022 : 8 = 252, rest\ 6$ 3p
A 2022-a literă este I 2p

Problema 2 (15 puncte)

Cifra unităţilor produsului $\overline{1abcde} \times 3$ este 1, deci cifra unităţilor lui $e \times 3$ este 1.
Rezultă $e = 7$ 3p
Cifra unităţilor lui d $\times 3 + 2$ este 7, deci cifra unităţilor lui $d \times 3$ este 5.
Rezultă $d = 5$ 3p
Cifra unităţilor lui c $\times 3 + 1$ este 5, deci cifra unităţilor lui $c \times 3$ este 4.
Rezultă $c = 8$ 3p
Cifra unităţilor lui b $\times 3 + 2$ este 8, deci cifra unităţilor lui $b \times 3$ este 6.
Rezultă $b = 2$ 3p
Cifra unităţilor lui a $\times 3$ este 2, rezultă $a = 4$ 2p
Verificare 1p

Problema 3 (15 puncte)

Fie S suma de bani deţinută de Gigel.
7 reviste costă $S - 10$ lei, iar 9 reviste costă $S + 10$ lei. 5p
Prin însumare, 16 reviste costă $2S$ 5p
8 reviste costă S; dar 9 reviste costă $S + 10$ lei, deci o revistă costă 10 lei. 5p

Problema 4 (15 puncte)

Reprezentând prin segmente avem: Primul album:

Al doilea album:

Al treilea album:

..... 5p

8 segmente egale reprezintă $164 - 7 \times 4 = 136$ fotografii, prin urmare un segment reprezintă $136 : 8 = 17$ fotografii 5p

Primul album conţine $17 + 7 = 24$ fotografii;

Al doilea album conţine $17 \times 4 = 68$ fotografii;

Al treilea album conţine $24 \times 3 = 72$ fotografii. 5p

Problema 5 (15 puncte)

a) Şirul este format din numere care împărţite la 3 dau restul 1, scrise în ordine crescătoare. 3p

Şirul poate fi rescris:

$4 = 3 \times 1 + 1, 7 = 3 \times 2 + 1, 10 = 3 \times 3 + 1, 13 = 3 \times 4 + 1, \ldots$ 3p

De unde: $(4 - 1) : 3 = 1$ (4 se află pe poziţia 1),

$(7 - 1) : 3 = 2$ (7 se află pe poziţia 2),

$(10 - 1) : 3 = 3$ (10 se află pe poziţia 3),

… …

$(2023 - 1) : 3 = 674$, deci 2023 se află pe poziţia 674 ..... 2p

b) Suma primelor nouă numere de 4 cifre din şir este:

$1000 + 1003 + 1006 + 1009 + \cdots + 1024 =$ 3p

$= 9 \times 1000 + 3 + 6 + 9 + \cdots + 24 = 9108$ 3p

Numărul omis de Vasile este $9108 - 8090 = 1018$. 1p

Problema 6 (15 puncte)

Descăzutul $\overline{dxxxx}$ trebuie să fie cât mai mic posibil, iar scăzătorul $\overline{sxxxx}$ cât mai mare posibil. Prin urmare, $d - s = 1$. 3p

Cea mai mică valoare a descăzutului este $\overline{d0123}$, iar cea mai mare valoare a scăzătorului este $\overline{s9876}$. 6p

Cifrele nefolosite sunt 4 şi 5; ţinând cont de faptul că $d - s = 1$, obţinem $d = 5, s = 4$.

Diferenţa cea mai mică posibilă este: $50123 - 49876 = 247$. 6p

NOTĂ: Orice altă modalitate corectă de rezolvare se acceptă şi se punctează corespunzător.

TESTARE PENTRU ADMITEREA ÎN CLASA A V-A
34 iunie 2022
Matematică
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător**

Subiectul I (50 puncte)

1	$998-101=897$	10p
2	$555-(55+n:55)\cdot 5=55$, deci $55+n:55=100$ $n=2475$	5p 5p
3	17 numere	10p
4	147 kg	10p
5	Împărțitorul este egal cu 8; numerele sunt 127 și 135 Împărțitorul este egal cu 9; numărul este egal cu 133	5p 5p

Subiectul II (40 puncte)

1	Latura pătratului este egală cu 20 cm Perimetrul pătratului este egal cu 80 cm Perimetrul dreptunghiului este egal cu 200 cm	10p 5p 5p
2	Lungimea traseului parcurs a doua zi este egală cu 9 km Lungimea traseului parcurs în prima zi este egală cu 72 km Lungimea întregului traseu este egală cu 108 km	10p 5p 5p

COLEGIUL NAȚIONAL „IOAN SLAVICI" SATU MARE
440042 Str.Ioan Slavici Nr.4, Satu Mare
Tel: 0261-714458 E-mail: secretariat@cnislavici.ro
Fax: 0261-717723 Pagina web: www.cnislavici.ro
MINISTERUL EDUCAȚIEI

Test de admitere în clasa a V-a 8 iunie 2022
Barem de corectare și notare

Varianta 3

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

1 **(20 puncte)**

Calculează:

(5p) **a)** $6735 - 1757 + 2354 =$

$= 4978 + 2354 =$ **3p**

$= 7332$ **2p**

(5p) **b)** $1439 \times 6 = 8634$ **5p**

(5p) **c)** $5621 : 7 = 803$ **5p**

(5p) **d)** $1899 - [\, 4564 : (\, 16 - 45 : 5\,) - 408 : 6 \times 5\,] : 4 + 401 =$

$= 1899 - [\, 4564 : (\, 16 - 9\,) - 68 \times 5\,] : 4 + 401 =$ **1p**

$= 1899 - [\, 4564 : 7 - 340\,] : 4 + 401 =$ **1p**

$= 1899 - [\, 652 - 340\,] : 4 + 401 =$ **1p**

$= 1899 - 312 : 4 + 401 =$

$= 1899 - 78 + 401 =$ **1p**

$= 1821 + 401 =$

$= 2222$ **1p**

2 **(5 puncte)**

Se consideră şirul de numere 3, 7, 11, 15, 19, 23, …

(2p) **a)** Scrie următorii doi termeni ai şirului.

Rezolvare:

27, 31 **2p**

(2p) **b)** Arată că numărul 291 este termen al şirului.

Rezolvare:

termenii şirului dau restul 3 la împărţirea cu 4,

iar $291 : 4 = 72$, rest 3, deci 291 este termen al acestui şir **2p**

(1p) **c)** Află al câtelea termen al şirului este numărul 291.

Rezolvare:

$3 = 1 \times 4 - 1$, $7 = 2 \times 4 - 1$, $11 = 3 \times 4 - 1$, $15 = 4 \times 4 - 1$, …, $291 = 73 \times 4 - 1$,

deci 291 este al 73-lea termen al şirului **1p**

3 **(5 puncte)**

Mă gândesc la un număr pe care îl triplez. La rezultat adun 19, iar suma obținută o înjumătățesc. Din ultimul rezultat scad 18 și obțin 5. La ce număr m-am gândit?

Rezolvare:

$(3x + 19) : 2 - 18 = 5$ **1p**

$(3x + 19) : 2 = 23$ **1p**

$3x + 19 = 46$ **1p**

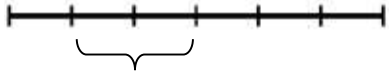
$3x = 27$ **1p**

$x = 9$ **1p**

4 **(5 puncte)**

(3p) **a)** După ce a parcurs o șesime dintr-un traseu, un călător a constatat că mai are 18 km până la jumătatea traseului. Ce lungime are întregul traseu?

Rezolvare:



18 km **1p**

lungimea traseului este $18 \times 3 = 54$ km **2p**

(2p) **b)** Cu 112 de lei se pot cumpăra 28 de creioane. Câte creioane de același fel se pot cumpăra cu 150 de lei, dacă prețul unui creion se reduce cu 1 leu?

Rezolvare:

un creion costă $112 : 28 = 4$ lei **1p**

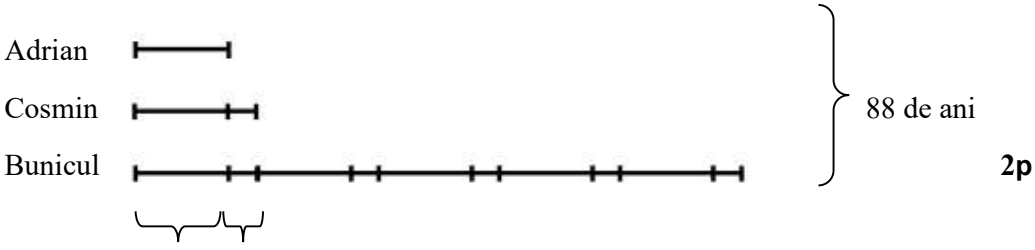
noul preț al unui creion este 3 lei

cu 150 lei se pot cumpăra $150 : 3 = 50$ creioane **1p**

5 **(10 puncte)**

Bunicul are doi nepoți: Adrian și Cosmin. Vârsta bunicului este de 5 ori mai mare decât vârsta lui Cosmin, iar Adrian s-a născut atunci când Cosmin avea 3 ani. Știind că suma vârstelor celor trei este de 88 de ani, aflați ce vârstă are fiecare.

Rezolvare:



2p

$x + (x + 3) + 5 (x + 3) = 88$ **2p**

$x + x + 3 + 5x + 15 = 88$ **1p**

$7x + 18 = 88$ **1p**

$7x = 70$ **1p**

$x = 10$

Adrian are 10 ani **1p**

Cosmin are 13 ani **1p**

Bunicul are 65 ani **1p**

ADMITEREA ÎN CLASA A V-A

CONCURSUL „ MICII SPIRIŞTI”

Barem de rezolvare:

SUBIECTUL I. (6x5 puncte=30 de puncte)

La următoarele 6 exerciţii un singur răspuns este corect.

Alegeti răspunsul corect şi scrieţi-l pe foaia de examen împreună cu litera corespunzătoare:

1. Numărul de 37 de ori mai mic decât predecesorul numărului 5292 este:
a)413; **b)** 134 ; **c)** 143; **d)** 243; **e)** 529.

2. Rezultatul calculului 80-40:5×8+0:80 este:

a)17; **b)** 20; **c)** 79 ; **d)** 16 ; **e)** 26.

3.Numărul 6802 dă restul 19 și câtul C la împărțirea prin 21. Câtul împărțirii câtului C la restul 19 este:
a) 501; **b)** 325; **c)** 23; **d)** 18; **e)** 17.

4.Suma a patru numere naturale consecutive este 18. Produsul lor este:
a)24; **b)** 360; **c)** 260; **d)** 150; **e)** 0.

5.Cincimea jumătății unui număr natural *n* este 478. Suma cifrelor numărului n este:
a)18; **b)** 19; **c)** 21; **d)** 27; **e)** 20.

6.O florărie vinde buchete de flori. Primul buchet conține 3 lalele și 1 trandafir, al doilea buchet conține 5 lalele și 4 trandafiri, al treilea buchet conține 7 lalele și 7 trandafiri, iar al patrulea 9 lalele și 10 trandafiri. Numărul florilor din al treizecilea buchet este:

a)145; **b)** 148; **c)** 149; **d)** 150; **e)** 151.

SUBIECTUL II. (3x10 puncte=30 de puncte)

La următoarele 3 cerințe scrieți doar răspunsul:

1. Valoarea numărului natural n din egalitatea
{ 2021−[(10: *n* +4) :3-2]× 2021}×2−2021= 2021 este 5

2.Dacă elevii unei clase se așază câte doi într-o bancă, rămân 4 elevi în picioare. Dacă se așază câte trei într-o bancă, rămân două bănci libere. În clasă, elevi și bănci sunt:
24 elevi și 10 banci

3. Andrei are 4096 de lei. El cheltuie în fiecare lună un sfert din suma pe care o are la începutul lunii. El va rămâne cu 972 de lei după.....5 luni.

COLEGIUL NAȚIONAL "SPIRU HA

SUBIECTUL III. (30 puncte)

Scrieţi rezolvările complete pe foaia de concurs:

1. (10 p) Într-o tabără şcolară se află 105 copii. După ce din tabără pleacă 15 băieți şi 10 fete, numărul fetelor devine 3 ori mai mare decât al băieților .

Câte fete şi câți băieți se aflau la început în tabără?

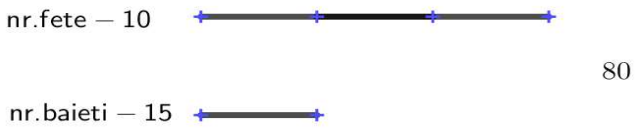
Soluţie

Aflăm numărul de copii rămaşi în tabără:

105- 15- 10= 80 ……**2p**

Metoda grafică

Reprezentăm cu un segment numărul de băieți rămaşi şi cu 3 segmente numărul de fete rămase în tabără



80:4=20 număr *băieți rămaşi în tabără* ……**4p**

20+ 15= 35 (numărul băieților) ……**2p**

105- 35= 70 (numărul fetelor)……**2p**

SAU

b=număr băieți rămaşi în tabără; f=număr fete rămase

$f + b$= 105- 15- 10= 80 ……**2p**

$f = 3 \times b$, *deci* $b+3b=80$, *deci* $b=80:4=20$……**4p**

20+ 15= 35 *(număr băieți initial)* …… **2p**

f = 105- 35= 70 *(număr initial fete)*…… **2p**

2. Câte numere de două cifre împărțite la 11 dau restul 9. Aflați suma lor?

Soluție:

Fie $\overline{ab}$ un număr de două cifre……**1p**

$\overline{ab}$ =11× C+9, $9 < 11$……**1p**

$11 \times C + 9 < 99$ $altfel$ $\overline{ab}$ nu mai are două cifre, deci cîtul maxim este……**2p**

$C = 0 \rightarrow \overline{ab} = 11 \times 0 + 9 = 9$ nu are doua cifre……..**1p**

$C = 1 \rightarrow \overline{ab} = 11 \times 1 + 9 = 20$

$C = 2 \rightarrow \overline{ab} = 11 \times 2 + 9 = 31$

COLEGIUL NAȚIONAL "SPIRU HA

$C = 3 \rightarrow \overline{ab} = 11 \times 3 + 9 = 42$

$C = 4 \rightarrow \overline{ab} = 11 \times 4 + 9 = 53$

$C = 5 \rightarrow \overline{ab} = 11 \times 5 + 9 = 64$ **3p**

$C = 6 \rightarrow \overline{ab} = 11 \times 6 + 9 = 75$

$C = 7 \rightarrow \overline{ab} = 11 \times 7 + 9 = 86$

$C = 8 \rightarrow \overline{ab} = 11 \times 8 + 9 = 97$

Sunt 8 numere: 20, 31, 42, 53, 64, 75, 86, 97 ……**1p**

Suma lor este: $20+31 + 42 + 53 + 64 + 75 + 86 + 97 = 468$

Sau $S=11 \times (1 + 2 + \cdots . + 8) + 8 \times 9 = 11 \times 36 + 72 = 468$ ……**1p**

3. Într-un parc au fost plantate 287 de flori, trandafiri şi lalele. Între oricare doi trandafiri am cultivat 10 lalele. Ştiind că atât primul fir,cât şi ultimul sunt trandafiri, aflaţi câte lalele s-au cultivat?

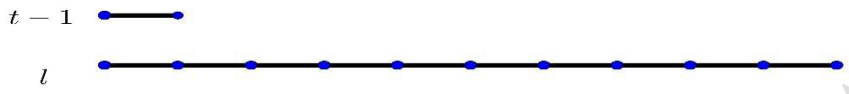
Soluţie:

Metoda grafică

t numărul de trandafiri şi luăm un segment pentru *t−1 şi l număr lalele*

Numărul lalelelor reprezintă 10 segmente……**1p**

Observăm că *l=10×(t-1)*……**2p**



287−1=286 reprezintă 11 părţi

286:11=26 (nr trandafiri din care lipseşte unul)……**5p**

26+1=27 număr trandafiri

$26 \times 10 = 260$ lalele ……..**2p**

COLEGIUL NAŢIONAL "SPIRU HA

MINISTERUL EDUCAȚIEI

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
ADMITERE CLASA A V-A – MATEMATICĂ
COLEGIUL NAȚIONAL „DOAMNA STANCA”, SATU MARE
SESIUNEA IUNIE 2022

VARIANTA 1

SUBIECTUL I: 40 puncte

Nr item	I.1a)	I.1b)	I.2	I.3	I.4
Răspuns	4215	273	42; 56	975	$\frac{2}{5}$
Punctaj	5p	5p	10p	10p	10p

SUBIECTUL II: 60 puncte

1. 20 puncte

preț minge=m; preț penar=p; preț trusă desen =t.....1p
m+p=55;p+t=75;m+t=80.....3p
m+p+p+t=55+75.....4p
2xp+80=130.....4p
2xp=50; p=50:2=25.....4p
m=55-25=30.....2p
t=75-25=50.....2p

2. 10 puncte

708:3=236.....8p
nr cutii=236.....2p

3. 30 puncte

a)
cifra sutelor este 9.....3p
22-9=13.....2p
cifra zecilor este 8.....2p
13-8=5.....2p
numărul este 985.....1p

b)
cifra zecilor de mii este 1.....2p
cifra miilor este 0.....2p
cifra sutelor este 2.....1p
1 + 0 +2 = 3; 18 – 3 = 15.....2p
cifra zecilor este 6 iar cifra unităților este 9.....2p
numărul cerut este 10269.....1p

c)
se folosește cifra cea mai mare 9 de cel mult 3 ori.....6p
suma ultimelor două cifre 30 – 27 =3 .....2p
cum nu pot fi identice, avem numărul 99930.....2p

Orice variantă de rezolvare corectă se punctează.

TOTAL : 100 PUNCTE

COLEGIUL NAȚIONAL „VLADIMIR STREINU”
GĂEȘTI - D Â M B O V I Ț A
STR. N.TITULESCU, NR. 24 – 26
TEL./FAX: 0245/713351
E-MAIL: colegiul_national_v_streinu@yahoo.com

BAREM CORECTARE CLASA a-V-a

VARIANTA 1

Subiectul I (30puncte):

245 : 5-246:6= 49-41= 8.....10 pct.

640:4-19x 8=160-152=8.....10pct.

64-64:8=64-8=56.....10pct.

Subiectul II (20puncte)

4x[150-3x(a-5):3]:10=68-204x 150-3x(a-5):3 48.....5 pct.

4x[150-3x(a-5):3]=48x10=480..... 5pct
150-3x(a-5):3=480:4=120.....5 pct.
3x(a-5):3=150-120=30.....2pct
3x(a-5) =30x3=90.....2pct.
a-5=90:3=30,a=30+5=35.....1pct

Subiectul III (20PUNCTE)
a+b+c=27.....5 pct.
a=b=c=9.....5 pct
succesorul =1000.....5 pct
suma 999+1000=1999.....5 pct

Subiectul IV (20puncte)

Notăm x= vârsta lui Marius/în prezent
y= vârsta lui Ionuț/în prezent
z= vârsta lui Victor/în prezent
(x+2)+(y+2)+(z+2)=34.....3 pct.
x+y+z=34-6=28.....2 pct.
y=2xX.....2 pct
z=2xy.....2 pct
z=2x2X=4xX.....1 pct
X+2X+4X=28.....2 pct
7X=28.....2pct
X=28:7=4.(ani).....1pct
y=2x4=8/ani).....3 pct
z=4x4=16(ani).....2pct

OFICIU – 10 PUNCTE

LICEUL TEORETIC „TRAIAN” – CONSTANȚA
Str. Traian, nr.55 Constanta, tel/fax:0341-405827
E-mail : traianct@gmail.com

Testare pentru admitere în clasa a V-a
11 iunie 2022

Barem de corectare

Subiectul I (30 puncte)

1) Aflați numărul natural *a* din următoarea egalitate:

150:[19x3-(4x*a*+20):10]=10.

2) Aflați diferența dintre cel mai mare număr de patru cifre distincte, cu trei cifre pare și o cifră impară și cel mai mic număr de patru cifre distincte impare.

Soluție

1)

19x3-(4x*a*+20):10=15 ..... **5p**
57-(4x*a*+20):10=15 ..... **2p**
(4x*a*+20):10=42 ..... **5p**
4x*a*+20=420..... **5p**
4x*a* =400 ..... **2p**
a =100 ..... **1p**

2)

Soluție

9864 – cel mai mare **4p**

1357 – cel mai mic **4p**

9864 – 1357 = 8507 ..... **2p**

LICEUL TEORETIC „TRAIAN” – CONSTANȚA
Str. Traian, nr.55 Constanta, tel/fax:0341-405827
E-mail : traianct@gmail.com

Subiectul II (20 puncte)

Suma a două numere naturale este 47. Împărțind primul număr la 4 și al doilea număr la 5 se obțin câturi egale și resturi egale. Aflați cele două numere.

Soluție:

a+b=47 ..... **1p**

a=4xc+r, 0≤r<4 ……..……..….. **2p**

b=5xc+r, 0≤r<5 ……..…….. **2p**

9xc+2xr=47 ……..……...…. **3p**

r∈{0,1,2,3} ……..……..…. **2p**

r=0, 9xc=47 (nu convine) ……..……. **1p**

r=1, 9xc=45, c=5 ……..…….. **3p**

a=21 ……..……. **2p**

b=26 ……..……. **2p**

r=2, 9xc=43 (nu convine) ……..……. **1p**

r=3, 9xc=41 (nu convine) ……..……. **1p**

LICEUL TEORETIC „TRAIAN” – CONSTANȚA
Str. Traian, nr.55 Constanta, tel/fax:0341-405827
E-mail : traianct@gmail.com

Subiectul III (20 puncte)

Într-o clasă sunt 26 de copii. Numărul celor care joacă tenis este dublul numărului celor care joacă volei, dar cu 4 mai mare decât numărul celor care joacă fotbal. Aflați numărul copiilor care joacă volei, tenis, respectiv fotbal, știind că fiecare copil participă la un singur sport.

Soluție

v |-----|

t |-----|-----|

f |-----|---|--| (4)

..... **6p**

26+4=30 (5 segmente egale) …….. **4p**

30:5=6 copii joacă volei ……. **4p**

6x2=12 copii joacă tenis ……..…….. **3p**

12-4=8 copii joacă fotbal …….. **3p**

LICEUL TEORETIC „TRAIAN” – CONSTANȚA
Str. Traian, nr.55 Constanta, tel/fax:0341-405827
E-mail : traianct@gmail.com

Subiectul IV (20 puncte)

Andrei urcă un șir de trepte după regula: urcă 2 trepte și coboară o treaptă, urcă din nou 4 trepte și coboară 2 trepte. Un pas înseamnă urcarea sau coborârea unei trepte.

a) Aflați câți pași a făcut și pe ce treaptă se află după prima aplicare a regulii.
b) Pe ce treaptă se află după 21 de pași?
c) Pe ce treaptă se află după 275 de pași?

Soluție

a)

urcă 2, coboară 1→ 3 pași, o treaptă **2p**

urcă 4, coboară 2→ 6 pași, două trepte **2p**

Total: 9 pași, 3 trepte (a treia treaptă) **1p**

b)

9 pași, 3 trepte **1p**

9 pași, 3 trepte **1p**

3 pași, o treaptă **2p**

Total: 21 pași, 7 trepte (a șaptea treaptă) **1p**

c)

275:9=30 rest 5 ..... **3p**

30x3=90 trepte **2p**

5 pași, 3 trepte **3p**

90+3=93 trepte (a 93-a treaptă) **2p**

COLEGIUL NAŢIONAL"TRAIAN"
Drobeta Turnu Severin , B-dul Carol I, Nr.6
Judeţul Mehedinţi , cod 220099,
Tel : +(40)352-401118; Fax +(40)252315267
e-mail: colegiulnationaltraiand@yahoo.com

MINISTERUL EDUCAŢIEI

Barem de evaluare și notare
11 iunie 2022

Matematică

A	1.	c	10p
	2.	c	10p
	3.	b	10p
B	1.	696	10p
	2.	148	10p
	3.	10,20,30,..., 90 11 12,21	10p

C. 1) 8+4x(20-a:5)=20 2p

4x(20-a:5)=12 2p

20-a:5=3 2p

a:5=17 2p

a=85 2p

2) 9 pixuri costă cât 18 creioane și încă 18 lei 4p

18 creioane + 6 creioane = 4 creioane costă 72 lei 3p

1 creion costă 3 lei 2p

1 pix costă 8 lei 1p

3) 470 – (140 + 90) = 240 2p

Desen 3p

240:4=60 lei i-au rămas lui Robert 2p

60x3+140=320 lei a avut Carla 2p

60+90=150 lei a avut Robert 1p

Notă: 10 puncte se acordă din oficiu

MINISTERUL EDUCAȚIEI
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN BACĂU

C.N. Gh V

COLEGIUL NAȚIONAL „GHEORGHE VRĂNCEANU"
STR. LUCREȚIU PĂTRĂȘCANU, NR. 30, BACĂU TEL. 0334/405941 FAX 0334/405942
email cnghvranceanu@yahoo.co.uk

Barem matematică

1. a) Calculaţi:
64-64:[480:3-19x(240:5-240:6)]

Soluție:

240:5-240:6=48-40=8.....1p

19x8=152.....1p

480:3=160

64-64:(160-152)=64-64:8=64-8=56.....2p

b) Determinaţi numărul a din egalitatea:

63-6x[100-3x(a-4):3]:10=15

Soluție:

6x[100-3x(a-4):3]:10=63-15=48.....1p

6x[100-3x(a-4):3]=480.....1p

100-3x(a-4):3=480:6=80.....1p

3x(a-4):3=20.....1p

a=24.....1p

2. Ana, Silvia și Ruxi au 24 de figurine. Ana are dublul numărului figurinelor Silviei. Dacă împărțim numărul figurinelor lui Ruxi la numărul figurinelor Anei obținem câtul 3 și restul 6.
Câte figurine are fiecare?

Soluție:

Reprezentarea grafică.....2 p

S /_____/

MINISTERUL EDUCAȚIEI
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN BACĂU

COLEGIUL NAȚIONAL „GHEORGHE VRĂNCEANU"
STR. LUCREȚIU PĂTRĂȘCANU, NR. 30, BACĂU TEL. 0334/405941 FAX 0334/405942
email cnghvranceanu@yahoo.co.uk

A/_____/_____/

R/_____/_____/_____/_____/_____/_____/+6

24-6=18(suma segmentelor de dimensiuni egale).....2 p

18:9=2(de ilustrate are Silvia).....2 p

2x2=4(de ilustrate are Ana).....2 p

2x6+6=18(de ilustrate are Ruxi).....1 p

3. Anul 2023 este special pentru Ionuț și pentru mama lui. Fiecare dintre ei are vârsta egală cu suma cifrelor anului său de naștere. Ce vârste au Ionuț și mama lui?

Soluție:

Dacă anul nașterii este $\overline{abcd}$, vârsta este a+b+c+d.....2p

$\overline{abcd}$+ a+b+c+d=2023, deci 1001a+101b+11c+2d=2023.....3p

a poate fi doar 1 sau 2.....2p

Dacă a=1, 101b+11c+2d=1022, de unde b=9, deci 11b+2d=113, adică c=9 și d=7, adică anul este 1997, vîrsta 26, iar 1997+26=2023. Mama are 26 ani.....4p

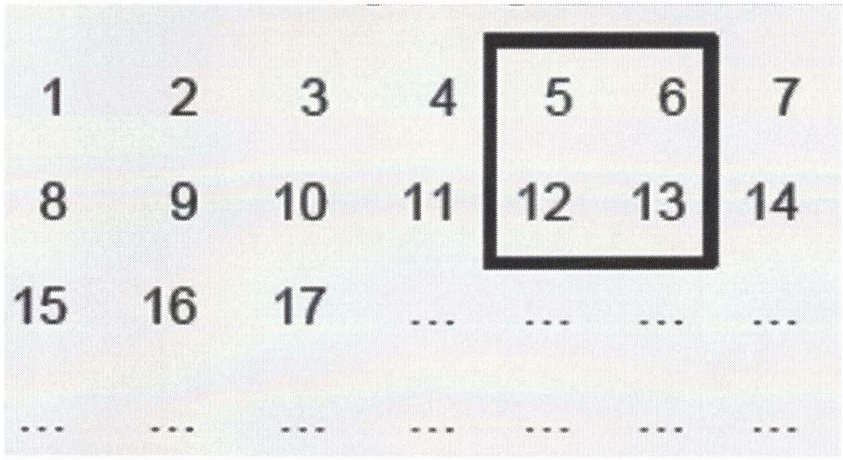
Dacă a=2, b=0, c=1 și d=5, anul fiind 2015, vârsta lui Ionuț 8 ani..4p

Altă soluție se poate obține scăzând din 2023 numere și făcând suma cifrelor numărului obținut.

4. Alex a scris toate numerele naturale de la 1 pâna la 100, pe șapte coloane, apoi a încadrat într-un pătrat patru numere:

MINISTERUL EDUCAȚIEI
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN BACĂU

COLEGIUL NAȚIONAL „GHEORGHE VRĂNCEANU"
STR. LUCREȚIU PĂTRĂȘCANU, NR. 30, BACĂU TEL. 0334/405941 FAX 0334/405942
email cnghvranceanu@yahoo.co.uk



1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...

Alex a observat că suma numerelor din pătratul marcat este 36, iar numărul aflat în colțul din stânga, sus, este 5. Alexandru a marcat apoi un alt pătrat, care conținea patru numere a căror sumă este 248. Care este numărul aflat în colțul din stânga, sus, al celui de-al doilea pătrat marcat de Alex?

Soluție:

primul număr /____/

al doilea număr /____/ 1 / .....(4puncte)

al treilea număr /____/ 7 /

al patrulea număr /____/ 8 / .....(4puncte)

248- (1+ 7+ 8)= 232 ..... (2 puncte)
232: 4= 58 (numărul situat in colțul din stânga, sus) ..... (2 puncte)

Orice soluție corectă se punctează complet.

CONCURSUL „ MICII SPIRIŞTI”
Barem

SUBIECTUL I. (5x8 puncte=40 de puncte)

La următoarele 6 exerciţii un singur răspuns este corect.
Scrieţi pe foaia de examen doar răspunsul corect, împreună cu litera corespunzătoare:

1. Rezultatul calculului [(5 + 5)x5 – 5 + 5x(5 + 5:5)]:5 + 5x5 + 5:5 este:
a) 31 b) 74 c) 39 d) 41

2. Numărul de 19 ori mai mic decât 57874 este egal cu:
a) 346 b) 3046 c) 3406 d) 3606

3. Câte numere de trei cifre se pot scrie folosind cifrele 0, 2 și 9?
a) 4 b) 12 c) 16 d) 18

4. Suma predecesorul și succesorul unui număr este 4032. Numărul căutat este:
a) 2015 b) 1344 c) 2016 d) 2008

5. Cel mai mare număr de forma abc, știind că (a + 3)x(7 + bxc) = 88, este:
a) 912 b) 514 c) 522 d) 811

SUBIECTUL II. (2x10puncte=20 de puncte)

La următoarele 4 cerințe scrieți pe foaia de examen doar răspunsul:

1. Un coș plin de pere cântărește 36 kg, iar pe jumătate plin cântărește 20kg. Coșul gol cântărește 4 kg.

2. Radu este un băiat hazliu. El urcă 16 trepte ale scării de acasă astfel: urcă trei trepte, coboară două, urcă trei trepte, coboară două... Pentru a urca scara de acasă el va face 68 de pași

COLEGIUL NATIONAL "SPIRU HARET", BUCUREŞTI

SUBIECTUL III. (3x10puncte=30 puncte)

Scrieţi rezolvările complete pe foaia de concurs:

1. 5 kg de portocale și 4 kg de kiwi costă 92 lei, iar 7 kg de portocale și 2 kg de kiwi costă 82 lei. Cât costă 4 kg de portocale și 5 kg de kiwi ?

Soluţie

Folosim metoda comparaţiei

5 kg de portocale ……4 kg de kiwi ……92 lei

7 kg de portocale ……2 kg de kiwi ……82 lei /×2

5 kg de portocale ……4 kg de kiwi ……92 lei

14 kg de portocale ……4 kg de kiwi ……164 lei

Scăzând membru cu membru, obţinem

9 kg de portocale …….72 lei

72: 9 = 8 lei preţ pt. 1kg de portocale……**5puncte**

5×8+4×k = 92, de unde 4×k = 52, deci k = 13 lei prețul pt 1 kg d kiwi……**3puncte**

4× 8 +5×13 = 97 de lei costă 4 kg de portocale și 5 kg de kiwi ……**2 puncte**

2. Un călător are de făcut un drum. În prima zi parcurge 3/10 din el, a doua zi 2/7 din rest, a treia zi 3/5 din noul rest și a patra zi ultimii 20 de kilometri. Care este lungimea drumului?

Soluție: 2/5 din al doilea rest reprezinta 20 km, deci 1/5 din acesta reprezintă 20:2 = 10 km $\Rightarrow$ al doilea rest reprezinta 50 km, care reprezinta 5/7 din primul rest $\Rightarrow$ 1/7 din primul rest reprezinta 50:5 = 10 km $\Rightarrow$ primul rest reprezinta 70 km, care la rândul său reprezintă 7/10 din lungimea

COLEGIUL NAȚIONAL "SPIRU HARET", BUCUREȘTI

drumului ⇒1/10 din lungimea drumului reprezinta 70:7 = 10 km ⇒ lungimea drumului este de 100 km

3. Suma a 13 numere naturale distincte nenule este 92. Care sunt aceste numere?

Soluție:

Cum 1+2+3+……+13 = 91⇒ pentru a obține suma 92 trebuie să mărim un termen cu 1, , dar fiind distincte numerele din sumă, nu il putem mări decât pe 13 ⇒ numerele sunt: 1, 2, 3, ….,12, 14

Notă: Orice soluție corect matematică, diferită de cea din barem, este punctată corespunzător.

COLEGIUL NAȚIONAL "SPIRU HARET", BUCUREȘTI

ADMITEREA ÎN CLASA A V-A

COLEGIUL NAȚIONAL "SPIRU HARET" București

Barem CONCURSUL „ MICII SPIRIŞTI”

SUBIECTUL I. (6x5 puncte=30 de puncte)

La următoarele 6 exerciţii un singur răspuns este corect.

Alegeti răspunsul corect şi scrieţi-l pe foaia de examen împreună cu litera corespunzătoare:

1. Numărul de 39 de ori mai mic decât 4212 este:
   a) 4173; **b)** 108 ; **c)** 18; **d)** 17; **e)** 118.

2. Calculând trei sferturi din numărul $12+36:6\times 2$ obţinem:
   a) 12; **b)** 20; **c)** 18 ; **d)** 32 ; **e)** 24.

3. Dacă $\overline{abc}+\overline{ab}=520$, atunci $a+b+c$ este egal cu:
   a) 15; **b)** 13; **c)** 12; **d)** 14; **e)** 16.

4. Un număr natural A de 3 cifre are suma cifrelor 27. Care este suma cifrelor lui A+11?
   a) 3; b) 2; c) 29; d) 11; e) 1.

5. Rilă Iepurilă numerotează toate căsuţele animalelor din pădure cu numere consecutive începând cu 1. El a folosit 210 cifre. Câte căsuţe sunt în pădurea lui Rilă Iepurilă?
   a) 210; **b)** 100; **c)** 105; **d)** 106; **e)** 107.

6. Un sac conţine bile de 5 culori diferite: 6 bile roşii, 5 albastre, 8 albe, 9 verzi şi 7 negre. Care este cel mai mic număr de bile pe care trebuie să îl îndepărtezi din sac, fără a te uita, pentru a fi sigur că ai luat 4 bile de aceeaşi culoare?

   a) 4; **b)** 20; **c)** 13; **d)** 15; **e)** 16.

SUBIECTUL II. (3x10 puncte=30 de puncte)

La următoarele 3 cerinţe scrieţi doar răspunsul:

1. Valoarea numărului a din egalitatea $100-91:[22-(33-12:a):2]=87$ este .....**4**.

2. Într-un şir de 11 numere naturale consecutive, termenul din mijloc este 21. Atunci suma numerelor este egală cu **231**

3. Ana locuieşte pe Strada *Spiru Haret*. Numărând de la un capăt al strazii casa ei este a **13**-a, iar pornind numărătoarea din celălalt capăt, casa ei este a **7**-a. Cristi are casa chiar în mijloc. Câte case sunt între casa Anei şi casa lui Cristi?.....**2 case**.....

SUBIECTUL III. (30 puncte)

Scrieți rezolvările complete pe foaia de concurs:

1. **(10 p)** Dacă 5 stilouri costă cât 12 caiete, iar 3 stilouri și 4 caiete costă 56 de lei, aflați cât costă fiecare obiect.

Solutie

c=preț caiet, s=preț stilou

$5s=12c;$

$3s+4c=56\ lei \quad |\cdot 3$ **2p**

$9s+12c=168 \Rightarrow 9s+5s=118 \Rightarrow 14s=168$.....**4p**

$s=168:14=12lei\ (stiloul)$.....**2p**

$5\cdot 12=12c \Rightarrow c=5lei\ (caietul)$.....**2p**

2. **(10 p)** Într-o ladă sunt mere și gutui, în total 175 de fructe. După ce s-au vândut 43 de mere și 8 gutui, au rămas de 3 ori mai multe mere decât gutui. Câte mere și câte gutui au fost în ladă?

Soluție

Aflăm numărul de fructe rămase:

$175-43-8=124$ **2p**

Folosim metoda grafică

124:4=31 .....**2p**

$31+8=39$ (numărul de gutui) **3p**

$175-39=136$ (numărul de mere).....**3p**

3. (10p) Trei numere au suma egală cu 82 . Dacă îl împart pe primul la al doilea şi pe al doilea la al treilea obţin de fiecare dată câtul 2 şi restul 3.
Aflaţi cele trei numere.

Solutie

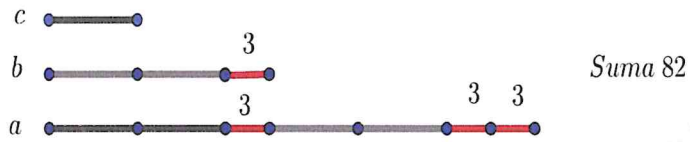
Fie a,b,c cele 3 numere

$a:b=2,$ rest $3 \Leftrightarrow a=2\cdot b+3,\ b>3$

$b:c=2,$ *rest* $3 \Leftrightarrow b=2\cdot c+3,\ c>3$

$a+b+c=82$

Folosim Metoda grafică



b este format din 2 segmente +3

a este format din 4 segmente +9

$82-9-3=70$ **4p**

$c=70:7=10$ *(al treilea număr)*.....**2p**

$b=2\cdot 10+3=23$ (*al doilea număr*).....**2p**

$a=2\cdot 23+3=49$ (*al treilea număr*).....**2p**

Sau

Fie a,b,c cele 3 numere

$a:b=2,$ rest $3 \Leftrightarrow a=2\cdot b+3,\ b>3$

$b:c=2,$ *rest* $3 \Leftrightarrow b=2\cdot c+3,\ c>3$

$a+b+c=82$ **2p**

Deci $a=2\cdot(2\cdot c+3)+3=4\cdot c+6+3=4\cdot c+9$.....**2p**

$4\cdot c+9+2\cdot c+3+c=82$

$\Leftrightarrow 7\cdot c+12=82$

$\Leftrightarrow 7\cdot c=82-12 \Leftrightarrow 7\cdot c=70 \Leftrightarrow c=10$ *(al treilea număr)*.....**2p**

$b=2\cdot 10+3=23$ (*al doilea număr*).....**2p**

$a=2\cdot 23+3=49$ (*al treilea număr*).....**2p**

Toate subiectele sunt obligatorii. Punctajul maxim este de 90 de puncte.

Se acordă 10 puncte din oficiu. Timp de lucru- 60 minute

Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Barem de evaluare şi de notare

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2x+2=\dfrac{1+7}{2}$	**3p**
	$x=1$	**2p**
2.	$f(x)=0\Rightarrow x=1$ sau $x=3$	**3p**
	Distanţa este egală cu 2	**2p**
3.	$x^2+4=x^2+4x+4$	**3p**
	Rezultă $x=0$, care verifică ecuaţia	**2p**
4.	b impar $\Rightarrow b\in\{3,5\}\Rightarrow$ sunt două variante de alegere a lui b	**2p**
	Pentru fiecare b impar sunt trei variante de alegere a lui a	**2p**
	Se pot forma $2\cdot 3=6$ numere	**1p**
5.	$\vec{v}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AO}=3\overrightarrow{AO}$	**3p**
	$\left\|\vec{v}\right\|=15$	**2p**
6.	$\dfrac{AB}{\sin C}=\dfrac{BC}{\sin A}$	**2p**
	$\sin A=1$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(0))=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+1+1-0-0-0=2$	**3p**
b)	$(A(a))^2=\begin{pmatrix}a^2+2&2a+1&2a+1\\2a+1&a^2+2&2a+1\\2a+1&2a+1&a^2+2\end{pmatrix}$	**2p**
	$5A(a)-(A(a))^2=\begin{pmatrix}5a-a^2-2&4-2a&4-2a\\4-2a&5a-a^2-2&4-2a\\4-2a&4-2a&5a-a^2-2\end{pmatrix}$	**1p**
	$5A(a)-(A(a))^2=4I_3\Rightarrow 5a-a^2-2=4$ şi $4-2a=0\Rightarrow a=2$	**2p**
c)	$A(2)\cdot(5I_3-A(2))=4I_3$ şi $(5I_3-A(2))\cdot A(2)=4I_3$	**2p**
	Matricea $A(2)$ este inversabilă şi inversa ei este $B=\dfrac{1}{4}(5I_3-A(2))=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}3&-1&-1\\-1&3&-1\\-1&-1&3\end{pmatrix}$	**3p**

2.a)	$f(2)=8-4m+6-1=-4m+13$	**2p**
	$f(-2)=-8-4m-6-1=-4m-15\Rightarrow f(2)-f(-2)=28$	**3p**
b)	Restul împărţirii lui f la $X-2$ este $f(2)\Rightarrow f(2)=9$	**2p**
	Restul împărţirii lui f la $X+2$ este $f(-2)\Rightarrow f(-2)=-19$	**3p**
c)	$x_1+x_2+x_3=m$, $x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=3\Rightarrow x_1^2+x_2^2+x_3^2=m^2-6$	**2p**
	$x_1^3+x_2^3+x_3^3=m\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)-3\left(x_1+x_2+x_3\right)+3=m^3-9m+3$	**2p**
	$x_1^3+x_2^3+x_3^3=3\Leftrightarrow m^3-9m=0\Leftrightarrow m=-3$ sau $m=0$ sau $m=3$	**1p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{1+x}{1-x}\cdot\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)'=$	**3p**
	$=-\dfrac{2}{1-x^2}=\dfrac{2}{x^2-1}$, pentru orice $x\in(-1,1)$	**2p**
b)	$x^2-1<0$, pentru orice $x\in(-1,1)$	**2p**
	$f'(x)<0$, pentru orice $x\in(-1,1)\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-1,1)$	**3p**
c)	$f''(x)=-\dfrac{4x}{(x^2-1)^2}$, pentru orice $x\in(-1,1)$	**2p**
	$f''(x)=0\Leftrightarrow x=0$	**1p**
	$f''(x)\geq 0$, pentru orice $x\in(-1,0]$, $f''(x)\leq 0$, pentru orice $x\in[0,1)$, deci punctul de inflexiune este $x=0$	**2p**
2.a)	$I_0=\int_1^2 e^x dx=$	**2p**
	$=e^x\Big\|_1^2=e^2-e$	**3p**
b)	$I_1=\int_1^2 xe^x dx=xe^x\Big\|_1^2-\int_1^2 e^x dx=$	**3p**
	$=e^2$	**2p**
c)	$I_{n+1}=\int_1^2 x^{n+1}e^x dx=\int_1^2 x^{n+1}\left(e^x\right)'dx=$	**2p**
	$=x^{n+1}e^x\Big\|_1^2-(n+1)I_n\Rightarrow I_{n+1}+(n+1)I_n=2^{n+1}e^2-e$	**3p**

COLEGIUL NAŢIONAL DE INFORMATICĂ TUDOR VIANU

Str. Arhitect Ion Mincu nr.10, sector 1, Bucureşti, România
Tel/fax 021222 66 70; http://www.lbi.ro ; email: lbi@lbi.ro

Colegiul Naţional de Informatică „Tudor Vianu"

Concursul „Micii campioni" – 2021

Ziua 1, 6 iulie 2021

1. Se ştie că: $\overline{aaa} \times a + \overline{aa} \times a + \overline{aaa} : a - \overline{aa} + a : a = 2020$. Determinaţi cifra a.

Soluţie şi barem:

Relaţia din enunţ este echivalentă cu $122 \times a \times a - 11 \times a = 1908$ 5p

Deducem că cifra a este pară.....2p

Dacă $a = 2$, rezultă că $122 \times a \times a - 11 \times a + 112 = 466 < 1908$ 2p

Dacă $a \geq 6$, rezultă că $122 \times a \times a - 11 \times a > 122 \times 6 \times 6 - 99 > 1908$ 4p

Pentru $a = 4$, relaţia din enunţ se verifică.....2p

2. Trei elevi joacă ping-pong. După fiecare joc, elevul învins este înlocuit de elevul care nu a participat la acel joc. La final s-a constatat că unul dintre elevi a jucat 13 jocuri, iar altul a jucat 27 de jocuri. Jocurile desfăşurate s-au numerotat, în ordine, cu 1, 2, 3, ..., n, unde n este numărul total de jocuri.

a) Determinaţi numărul n.

b) La câte jocuri a participat cel de-al treilea elev?

c) La câte jocuri a participat elevul care a pierdut jocul cu numărul 2 ?

Soluţie şi barem:

a) Fiecare elev participă la cel puţin unul dintre două jocuri consecutive. Deoarece unul dintre jucători a participat la 13 jocuri înseamnă că numărul total de jocuri nu depăşeşte $2 \cdot 13 + 1 = 27$. 3p

Cum unul dintre elevi a participat la 27 jocuri, rezultă că numărul total de jocuri desfăşurate este $n = 27$ 3p

b) Deci, al treilea jucător a participat la $27 - 13 = 14$ jocuri.....5p

c) Jucătorul care a jucat 27 jocuri le-a câştigat pe toate. 2p

Cum jucătorul care a pierdut prima partidă a jucat 14 jocuri, deducem că jucătorul care a participat la 13 jocuri a pierdut a doua partidă.....2p

3. Determinaţi cifrele a, b, c, d pentru care $\overline{abcd}+\overline{abc}=2021$.

Soluţie şi barem:

$\overline{abcd}+\overline{abc}=2021$ este echivalent cu $11\cdot\overline{abc}+d=2021$. 5p

Deoarece $d<11$, rezultă că d este restul împărţirii lui 2021 la 11.....5p

Cum $2021=11\cdot133+8$, rezultă că $a=1, b=8, c=3, d=8$.....5p

4. Doi prieteni s-au angajat să efectueze o lucrare de lungă durată. Ei au început lucrarea la data de 1 ianuarie 2020. Fiecare zi a fiecărui an este considerată zi lucrătoare. Unul dintre prieteni are o zi de odihnă după fiecare trei zile consecutive lucrate, iar celălalt are trei zile de odihnă după fiecare şapte zile consecutive lucrate. Determinaţi ziua calendaristică a anului 2024 în care cei doi prieteni au prima zi de odihnă comună.

Soluţie şi barem:

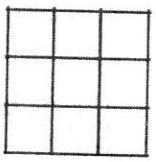
De la 1 ianuarie 2020 până la 31decembrie 2023 (inclusiv) sunt $366+3\cdot365=1461$ zile...3p

Cei doi prieteni au grafice de lucru cu perioade de 4 zile şi respectiv 10 zile.....3p

Deoarece $1461=4\cdot365+1$ şi $1461=10\cdot146+1$, rezultă că , pentru ambii prieteni, ziua de 31decembrie 2023 este prima zi de lucru după o zi de odihnă comună.....7p

Rezultă că prima zi de odihnă comună din anul 2024 este 7 ianuarie.....2p

5. Doi elevi, Andrei şi Bogdan, desenează pe tablă tabloul de mai jos şi propun următorul joc.



Începând cu Andrei, alternativ,fiecare dintre ei scrie într-un pătrăţel liber al tabloului un număr de la 1 la 9. (Fiecare număr se scrie o singură dată). Câştigă jucătorul care completează primul ultimul pătrăţel liber al unei linii sau coloane astfel încât numerele scrise pe acea linie sau coloană să aibă suma egală cu 15. Arătaţi că unul dintre cei doi elevi poate câştiga de fiecare dată. Care este acesta şi explicaţi strategia lui de câştig.

Soluţie şi barem:

Vom arăta că jucătorul care începe jocul (Andrei) câştigă.....1p
Andrei observă că:

- dacă el scrie un număr într-un pătrăţel acesta se află la intersecţia unei linii cu o coloană;
- dacă el găseşte un număr pentru care există cel puţin trei perechi de numere cu care reuşeşte să completeze cele trei pătrăţele de pe linia/coloana respectivă cu suma 15, câştigă;
- $15=8+(6+1)=8+(5+2)=8+(4+3)\neq8+(7+9)$ 7p

Prin urmare, dacă el începe cu 8, are la dispoziţie trei perechi de numere care sunt „bune" $(6,1),(5,2),(4,3)$ şi o pereche „rea" $(7,9)$ 3p

De exemplu:

Andrei scrie cifra 8 în pătrăţelul din centrul tablei. Dacă Bogdan scrie un număr într-un pătrăţel al tablei, atunci Andrei scrie în pătrăţelul simetric faţă de centru numărul din perechea corespunzătoare. Cum cel mult cele două diagonale pot fi complelate cu suma 15, rezultă că cel puţin o linie/coloană va fi completată de Andrei cu suma 15.....4p

COLEGIUL NAȚIONAL DE INFORMATICĂ TUDOR VIANU

Str. Arhitect Ion Mincu nr.10, sector 1, București, România
Tel/fax 021222 66 70; http://www.lbi.ro ; email: lbi@lbi.ro

CONCURSUL "MICII CAMPIONI"
Ziua 02.07.2021

ÎNTREBAREA NR.	RĂSPUNS CORECT
1.	c
2.	d
3.	c
4.	a
5.	e
6.	e
7.	b
8.	b
9.	c
10.	d
11.	d
12.	a
13.	c
14.	d
15.	b

PROBĂ DE SELECȚIE PENTRU ADMITEREA ÎN CLASA A V-A
11 IUNIE 2022

Varianta 1

Probă scrisă la limba şi literatura română

BAREM DE CORECTARE ŞI EVALUARE

1. Scrie câte un cuvânt cu sens asemănător pentru:
   *ghiduşe (*de exemplu*: poznașe* etc.*)*
   *călătorii (*de exemplu*: drumeții* etc.*)*
   *ciudate (*de exemplu*: neobișnuite* etc.*)*
   *mlădioase (*de exemplu*: grațioase* etc.*)*

   4x 1 punct= 4 puncte
2. Formulează câte o propoziţie, în care cuvintele *vară, pui, care* să aibă sens diferit de cel din fragment.
   De exemplu:
   Am făcut cunoștință cu o *vară* de-a lui Cristi.
   Pui legumele la fiert.
   Trei *care* trec pe uliță.

   3 x 2 puncte = 6 puncte
3. Alege din fragmentul de mai sus:

a) un substantiv comun, de genul neutru, numărul plural (de exemplu: *firele* etc.);
b) un adjectiv, de genul feminin, numărul plural (de exemplu: *repetate* etc.);
c) un verb, la timpul trecut ((de exemplu: *se anunța* etc.);
d) un pronume personal (*ea*);
e) subiectul din al treilea enunţ (*păsările*)

5 x 1 punct= 5 puncte

4. Scrie patru cuvinte înrudite cu *a face*.
   De exemplu: *făcut, refăcut, a reface, a desface, desfăcut, desfacere* etc.

   4 x 1 punct= 4 puncte
5. Alcătuieşte câte un enunţ cu două sensuri ale verbului *a face,* diferite de cel din text, pe care să le precizezi.
   De exemplu:
   Mama *face* mâncare. (pregătește)
   Elevul *face* tema. (scrie, rezolvă)

   2 x 1 punct= 2 puncte
   2 x 1 punct= 2 puncte
6. Rescrie enunţul, corectând greşelile.
   Pasărea se aşează pe creanga înflorită a unui copac, mirată că nu m-ai văzuse în aproprierea păduri o aşa finţă gălăgiuasă şi voia decât ai cânta.
   Enunțul corectat:
   *Pasărea se aşează pe creanga înflorită a unui copac, mirată că nu **mai** văzuse în **apropierea pădurii** o aşa **fiinţă gălăgioasă** şi **nu** voia decât **a-i** cânta. /(voia **doar/numai** a-i cânta)*

   7 x 1 punct= 7 puncte

7. Continuă fragmentul de mai sus, ţinând cont de următoarele cerinţe:
a) utilizarea **povestirii** și a **dialogului**; 6 puncte
b) continuarea fragmentului dat cu **minimum 15 rânduri**; 2 puncte
c) logica înlănțuirii ideilor. 2 puncte

Notă! Pentru **redactarea** întregii lucrări vei primi **5 puncte**, după cum urmează:
-respectarea ortografiei și a punctuației- 3 puncte;
-așezarea în pagină, aspectul îngrijit al scrisului- 2 puncte.

Probă scrisă la matematică

BAREM DE CORECTARE ȘI EVALUARE

Subiectul 1

cifra miilor- 9..... 1 p.

cifra sutelor, cifra zecilor- 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3.....7 x 1 p.

cifra unităţilor- 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0.....7 x 1 p.

Total –15 p.

Subiectul 2

(28 x 39 – 893 + 8) : 3 : (6 958 – 6 947 + 12) x 5 – (198 : 2 – 33 x 3) =

(1 092 – 893 + 8) : 3 : (11 + 12) x 5 – (99 – 99) =

(199 + 8) : 3 : 23 x 5 – 0 =

207 : 3 : 23 x 5 – 0 =

69 : 23 x 5 – 0 =

3 x 5 – 0 = 15.....11 p.

15 = 3 x 5 x 1 x 1.....1 p.

Total –12 p.

Subiectul 3

130 : 13 = 10 (cm latura pătratului pe care e cusută litera).....1 p.

70 : 10 = 7 (pătrate are lăţimea).....1 p.

Pânza a fost tăiată pe jumătate, conform desenului.....1 p.

13 x 7 = 91 (pătrate cu litere are pânza).....1 p.

(91 – 1) : 2 = 45 (pătrate cu litera A).....2 x 1p.

45 + 1 = 46 (pătrate cu litera N) .....2 p.

Total – 8 p.

Subiectul 4

168 – 68 = 100 (ghinde avea înainte de al 5-lea schimb).....1 p.

100 + 20 = 120 (ghinde, 2 treimi din ghinde) .....1 p.

120 : 2 = 60 (ghinde, o treime) .....1 p.

60 x 3 = 180 (ghinde mai avea după al 3-lea schimb).....1 p.

180 + 30 = 210 (ghinde a oferit la schimbul 3) .....1 p.

210 x 2 = 420 (ghinde avea după al 2-lea schimb) .....1 p.

420 – 100 = 320 (ghinde avea după primul schimb).....1 p.

320 + 20 = 340 (ghinde, 2 treimi din total) .....1 p.

340 : 2 = 170 (ghinde, o treime din total).....1 p.

170 x 3 = 510 (ghinde a avut).....1 p.

Total- 10 p.

Notă:

Se vor puncta și alte rezolvări corecte ale subiectelor.

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Total 100 de puncte.

Concursul "Micii Campioni" – 2019

Proba 1 , 16 mai 2019. Soluţii şi bareme

1. De exemplu: $2222-222-2-2:2=1997$ 15p

2. Notăm cu x numărul zilei şi cu y numărul lunii datei de naştere. Obţinem:
$\left[(x+2)\cdot 2+4\right]\cdot 5+y=342$ 5p

Deoarece numărul $(x+2)\cdot 2+4$ este par, înseamnă că numărul $\left[(x+2)\cdot 2+4\right]\cdot 5$ are ultima cifră 0, deci $y=2$ sau $y=12$ 4p

Pentru $y=2$, obţinem $x=30$,imposibil deoarece luna februarie are cel mult 29 zile....3p

Pentru $y=12$, obţinem $x=29$, deci data naşterii lui Andrei este 29 decembrie.....3p

3. Notăm: a = numărul bilelor albe, r = numărul bilelor roşii, n = numărul bilelor negre.

Din datele problemei deducem că: $n\geq 12$ 3p

$r\geq 10$ 3p

$a\geq 8$ 3p

Rezultă că $n+r+a\geq 30$ 3p

Dar $n+r+a=30$ şi deducem că $n=12$, $r=10$, $a=8$ 3p

4. După funcţionarea simultană pe parcursul unei *zile întregi* (24 de ore), diferenţa dintre orele indicate de cele două ceasornice este de $8+4=12$ minute.....3p

După 5 zile de funcţionare simultană primul ceas va fi cu o oră înaintea celui de-al doilea. Prin urmare, după $24\times 5=120$ *zile intregi*, primul ceas este înaintea celui de-al doilea cu 24 de ore, adică cele două ceasuri vor indica aceeaşi oră.....4p

Deoarece primul ceasornic va fi înaintea orei reale cu $8\times 120=960$ minute, adică 16 ore, ceasurile vor indica ora 4 a.m.....4p

După încă 120 *zile intregi*, ceasurile vor arăta ora 20 p.m., iar după următoarele 120 de *zile intregi*, ceasurile vor arăta 12:00 (prânz). Răspuns: $120\times 3=360$ *zile întregi*.....4p

5. Se aplică *metoda mersului invers*:

Ziua	Înainte de:	Număr arici (a)	Număr vulpi (v)	Număr şerpi (s)	Punctaj
Miercuri	Cină	-	1	1	5p
	Prânz	1	1	1	
	Mic dejun	1	1	2	
Marţi	Cină	1	3	2	5p
	Prânz	4	3	2	
	Mic dejun	4	3	6	
Luni	Cină	4	9	6	5p
	Prâz	13	9	6	
	Mic dejun	13	9	19	

Prin urmare $a=13, v=9, s=19$.

Examenul de bacalaureat național 2013
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Barem de evaluare şi de notare

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(\sqrt{5}-1)^2+2\sqrt{5}=\left(5-2\sqrt{5}+1\right)+2\sqrt{5}=$	**3p**
	$=6\in\mathbb{N}$	**2p**
2.	$f(x)=0$ are două soluții reale distincte	**2p**
	$\Delta=m^2-16>0$	**1p**
	$m\in(-\infty,-4)\cup(4,+\infty)$	**2p**
3.	$2-x^2=x$	**1p**
	$x_1=1,\ x_2=-2$	**2p**
	x_1 convine şi x_2 nu convine	**2p**
4.	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}$	**1p**
	Numărul submulțimilor cu cel mult un element este egal cu $C_7^0+C_7^1=8\Rightarrow 8$ cazuri favorabile	**2p**
	Numărul submulțimilor mulțimii A este $2^7=128\Rightarrow 128$ de cazuri posibile	**1p**
	$p=\dfrac{1}{16}$	**1p**
5.	$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=5\vec{i}+12\vec{j}$	**3p**
	$AC=\sqrt{5^2+12^2}=13$	**2p**
6.	$b=\dfrac{\pi}{3}-a\Rightarrow\cos b=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-a\right)=$	**2p**
	$=\dfrac{1}{2}\cos a+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin a$, de unde concluzia	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$D(-1,2)=\begin{vmatrix}-1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}$	**1p**
	$D(-1,2)=-1+1+8+2+2+2$	**3p**
	$D(-1,2)=14$	**1p**
b)	$A(2,q)=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & q & 2\end{pmatrix}$	**1p**
	Există minorul $d=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=2\neq 0\Rightarrow \text{rang } A(2,q)\geq 2$	**1p**
	$\text{rang } A(2,q)=2\Rightarrow D(2,q)=0$	**1p**
	$q=-\dfrac{1}{2}$	**2p**

c)	$D(x,y)=x^3+4y-4x-xy+1$	**1p**
	$D(y,x)=y^3+4x-4y-yx+1$	**1p**
	$D(x,y)=D(y,x)\Rightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2-8)=0\Rightarrow x^2+xy+y^2-8=0$	**2p**
	Finalizare: de exemplu $(x,y)=(0,2\sqrt{2})$	**1p**
2.a)	$f(1)=2-m$	**2p**
	$f(1)=8$	**2p**
	Finalizare: $m=-6$	**1p**
b)	$x_1+x_2+x_3=0$ și $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=1$	**2p**
	$x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2=\left(x_1+x_2+x_3\right)^2-2\left(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1\right)=-2\in\mathbb{Z}$	**3p**
c)	x_1,x_2,x_3 rădăcinile polinomului $f=X^3+X-2\Rightarrow$ polinomul $-2X^3+X^2+1$ are rădăcinile $\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2},\frac{1}{x_3}$	**2p**
	$a,b,c,d\in\mathbb{Z}$ cu $a>0\Rightarrow g=2X^3-X^2+0\cdot X-1$ are rădăcinile $\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2},\frac{1}{x_3}$	**2p**
	un exemplu este $a=2,\ b=-1,\ c=0,\ d=-1$	**1p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=e^x-1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$	**3p**
	$f'(0)=0$	**2p**
b)	$f(0)=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ și f este continuă pe $[0,+\infty)$, deci ecuația dată are cel puțin o soluție	**3p**
	$f'(x)>0$ pentru orice $x>0\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $[0,+\infty)\Rightarrow f$ este injectivă pe $[0,+\infty)$, deci soluția este unică	**2p**
c)	$f(x_n)=n\Rightarrow e^{x_n}=n+x_n\Rightarrow e^{x_n}>n$ pentru că $x_n>0$, oricare ar fi $n\geq 2$	**2p**
	$x_n>\ln n\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}x_n=+\infty$	**3p**
2.a)	$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\lvert f(x)\rvert dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=$	**2p**
	$=\sin x\Big\rvert_0^{\frac{\pi}{2}}=1$	**3p**
b)	$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}f^2(x)dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx=$	**1p**
	$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2x)\,dx=\frac{\pi}{2}\left(x\Big\rvert_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\sin 2x\Big\rvert_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=\frac{\pi^2}{4}$	**4p**
c)	$t=kx\Rightarrow \int_0^{2\pi}f^n(kx)dx=\frac{1}{k}\int_0^{2k\pi}\cos^n t\,dt$	**2p**
	$\int_0^{2k\pi}\cos^n t\,dt=\int_0^{2\pi}\cos^n t\,dt+\int_{2\pi}^{4\pi}\cos^n t\,dt+\ldots+\int_{2(k-1)\pi}^{2k\pi}\cos^n t\,dt=$	**2p**

	$= k\int_0^{2\pi} \cos^n t\,dt$, deoarece $g_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g_n(x)=\cos^n x$ este periodică de perioadă 2π, de unde concluzia	**1p**

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ
COLEGIUL NAŢIONAL „EMIL RACOVIŢĂ” CLUJ-NAPOCA
Str. Mihail Kogălniceanu nr. 9-11, Cluj-Napoca, Tel. Fax: +(40)264-591825; 431930
web : www.e-racovita.ro; e-mail: racovitacj@gmail.com

MINISTERUL EDUCAȚIEI

Concursul claselor a IV-a „MICUL RACOVIŢIST” 2021
MATEMATICĂ

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 45 minute.**
- **Se acordă 30 de puncte din oficiu.**

Următoarele exerciții au un singur răspuns corect. Alegeți varianta corectă!

1. Valoarea lui a din egalitatea :

$$\left[1860-\left(325+15\times a\right):2\right]:5\times 3+482=1163 \text{ este :}$$

a) 85
b) 15
c) 57
d) 75

2. Dintr-o cutie cu monede de aur fiecare dintre cei trei pirați ia câte o zecime. Câte monede au luat cei trei pirați, dacă în cutie au rămas 105 monede ?

a) 30
b) 15
c) 45
d) 55

3. În figura alăturată suma numerelor naturale de pe fiecare rând, coloană și cele două diagonale este aceeași. Calculând $a+b+c$ obținem :

b		2
c	5	
8	1	a

a) 13
b) 11
c) 15
d) 30

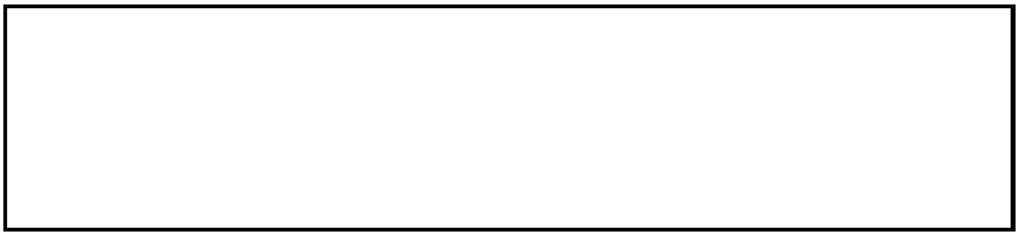
4. Un număr natural este cu 44 mai mare ca altul. Să se afle produsul numerelor știind că împărțind numărul mai mare la numărul mai mic obținem câtul 7 și restul 2 .

a) 300
b) 357
c) 375
d) 310

5. Un bloc de locuinţe are parter şi 5 etaje. Fiecare etaj şi parterul au acelaşi număr de apartamente. Dacă apartamentul 13 se află la etajul al II-lea, iar apartamentul 22 se află la etajul al III-lea, atunci numărul de apartamente din bloc este :

a) 25
b) 24
c) 30
d) 36

6. Pentru împrejmuirea unei grădini în formă de dreptunghi cu lungimea de 135 m şi lăţimea de 9 ori mai mică, se folosesc 3 rânduri de sârmă. Câţi metri de sârmă sunt necesari dacă este prevăzută o poartă de intrare de 3 m ?



a) 300 m
b) 891 m
c) 900 m
d) 297 m

7. Câte numere $\overline{abc}$ au proprietatea $a+b+c=7$?

a) 28
b) 7
c) 13
d) 35

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

GRILA DE RĂSPUNSURI

Răspuns / Problemă	a	b	c	d
1				X
2			X	
3	X			
4		X		
5				X
6		X		
7	X			

Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Barem de evaluare şi de notare

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$3(3-2i)=9-6i$	**2p**
	$2(5+3i)=10+6i$	**2p**
	$a=19\in\mathbb{R}$	**1p**
2.	$f(1)+f(2)+...+f(10)=4\cdot(1+2+...+10)-10=$	**3p**
	$=210$	**2p**
3.	$2x=1+x$	**3p**
	Rezultă $x=1$, care verifică ecuaţia	**2p**
4.	Se notează cu x preţul iniţial $x+10\%\cdot x=2200$	**2p**
	Preţul înainte de scumpire este 2000 de lei	**3p**
5.	$\frac{2}{1}=\frac{a+1}{4}$	**3p**
	$a=7$	**2p**
6.	$3\sin x+\cos x=4\sin x\Rightarrow \sin x=\cos x$	**3p**
	$x=\frac{\pi}{4}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$D(2,3)=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&4&1\\3&9&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=2$	**3p**
b)	$D(a,b)=\begin{vmatrix}0&0&1\\a-1&a^2-1&1\\b-1&b^2-1&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=(a-1)(b-1)\begin{vmatrix}1&a+1\\1&b+1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=(a-1)(b-1)(b-a)$, pentru orice numere reale a şi b	**1p**
c)	$\mathcal{A}_{\Delta P_1P_2P_n}=\frac{1}{2}\cdot\lvert\Delta\rvert$, unde $\Delta=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&2^2&1\\n&n^2&1\end{vmatrix}=(n-1)(n-2)$	**2p**
	$\mathcal{A}_{\Delta P_1P_2P_n}=1\Leftrightarrow(n-1)(n-2)=2\Leftrightarrow n=3$	**3p**
2.a)	$f=X^3-4X^2+3X-4$	**2p**
	$f(4)=4^3-4\cdot4^2+3\cdot4-4=8$	**3p**
b)	$x_1+x_2+x_3=4$	**1p**
	$x_1+x_2=x_3\Rightarrow x_3=2$	**2p**
	$f(2)=0\Leftrightarrow m=-2$	**2p**

c)	$x_1^3+x_2^3+x_3^3=3m+28$	**2p**
	$x_1^3+x_2^3+x_3^3=7(x_1+x_2+x_3)\Rightarrow m=0$	**1p**
	Dacă $m=0$, atunci $f(3)=0$, deci f se divide cu $X-3$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(\cos x+\frac{x^2}{2}\right)'=(\cos x)'+\left(\frac{x^2}{2}\right)'=$	**2p**
	$=-\sin x+2\cdot\frac{x}{2}=x-\sin x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$y-f(0)=f'(0)(x-0)$	**2p**
	$f(0)=1$, $f'(0)=0$	**2p**
	Ecuaţia tangentei este $y=1$	**1p**
c)	$f''(x)=-\cos x+1\geq 0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\Rightarrow f'$ este crescătoare pe $\mathbb{R}$	**2p**
	$f'(x)\leq 0$, pentru $x\in(-\infty,0]$ şi $f'(x)\geq 0$, pentru $x\in[0,+\infty)$	**2p**
	$f(x)\geq f(0)\Rightarrow f(x)\geq 1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$	**1p**
2.a)	$I_1=\int_0^1 xe^x dx=xe^x\Big\|_0^1-\int_0^1 e^x dx=$	**3p**
	$=e-e^x\Big\|_0^1=1$	**2p**
b)	$I_{n+1}=\int_0^1 x^{n+1}e^x dx=x^{n+1}e^x\Big\|_0^1-(n+1)\int_0^1 x^n e^x dx=$	**3p**
	$=e-(n+1)I_n\Rightarrow I_{n+1}+(n+1)I_n=e$	**2p**
c)	Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ şi $x\in[0,1]$, avem $1\leq e^x\leq e$ şi $x^n\geq 0\Rightarrow x^n\leq x^n e^x\leq x^n e$	**2p**
	$\int_0^1 x^n dx\leq\int_0^1 x^n e^x dx\leq e\int_0^1 x^n dx\Rightarrow 1\leq(n+1)I_n\leq e$	**3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătaţi că numărul $a=3(3-2i)+2(5+3i)$ este real.

5p **2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x-1$. Calculaţi $f(1)+f(2)+...+f(10)$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(2x)=\log_2(1+x)$.

5p **4.** După o scumpire cu 10% preţul unui produs este 2200 de lei. Calculaţi preţul produsului înainte de scumpire.

5p **5.** Determinaţi numărul real a pentru care vectorii $\vec{u}=\vec{i}+4\vec{j}$ şi $\vec{v}=2\vec{i}+(a+1)\vec{j}$ sunt coliniari.

5p **6.** Determinaţi $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, ştiind că $\frac{3\sin x+\cos x}{\sin x}=4$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră determinantul $D(a,b)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & a^2 & 1\\ b & b^2 & 1\end{vmatrix}$, unde a şi b sunt numere reale.

5p **a)** Arătaţi că $D(2,3)=2$.

5p **b)** Verificaţi dacă $D(a,b)=(a-1)(b-1)(b-a)$, pentru orice numere reale a şi b.

5p **c)** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $P_n\left(n,n^2\right)$, unde n este un număr natural nenul. Determinaţi numărul natural n, $n\geq 3$, pentru care aria triunghiului $P_1P_2P_n$ este egală cu 1.

2. Se consideră x_1,x_2,x_3 rădăcinile complexe ale polinomului $f=X^3-4X^2+3X-m$, unde m este număr real.

5p **a)** Pentru $m=4$, arătaţi că $f(4)=8$.

5p **b)** Determinaţi numărul real m pentru care rădăcinile polinomului f verifică relaţia $x_1+x_2=x_3$.

5p **c)** Dacă $x_1^3+x_2^3+x_3^3=7(x_1+x_2+x_3)$, arătaţi că f se divide cu $X-3$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos x+\frac{x^2}{2}$.

5p **a)** Calculaţi $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=0$, situat pe graficul funcţiei f.

5p **c)** Demonstraţi că $f(x)\geq 1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1 x^n e^x dx$.

5p **a)** Calculaţi I_1.

5p **b)** Arătaţi că $I_{n+1}+(n+1)I_n=e$, pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Arătaţi că $1\leq(n+1)I_n\leq e$, pentru orice număr natural nenul n.

Examenul de bacalaureat naţional 2014
Proba E. c) – 2 iulie 2014
Matematică *M_mate-info*
Barem de evaluare şi de notare

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_3=18$	**2p**
	$a_1+a_2+a_3=36$	**3p**
2.	$x_V=-1$	**2p**
	$y_V=3$	**3p**
3.	$3^x=1$ sau $3^x=3$	**2p**
	$x=0$ sau $x=1$	**3p**
4.	Sunt 18 numere de două cifre care conţin cifra 1, deci sunt 18 cazuri favorabile	**2p**
	Sunt 90 de numere de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{18}{90}=\dfrac{1}{5}$	**2p**
5.	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$	**2p**
	ΔABC echilateral $\Rightarrow AC=2$	**3p**
6.	ΔABC dreptunghic isoscel $\Rightarrow AB=4$	**2p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\dfrac{4\cdot 4}{2}=8$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det\left(A(0)\right)=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&2&2\\0&0&2\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=8+0+0-0-0-0=8$	**3p**
b)	$\det\left(A(a)\right)=\begin{vmatrix}2&a&a\\a&2&2\\a&a&2\end{vmatrix}=(a-2)^2(a+2)$	**3p**
	$(a-2)^2(a+2)=0\Leftrightarrow a=-2$ sau $a=2$	**2p**
c)	$\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&2\\1&1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\5\\4\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2x+y+z=4\\x+2y+2z=5\\x+y+2z=4\end{cases}$	**2p**
	$X=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$	**3p**
2.a)	$f(1)=1^3-2\cdot 1^2+3\cdot 1+m=$	**2p**
	$=m+2$	**3p**
b)	$x_1+x_2+x_3=2$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=3$	**2p**
	$x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=2^2-2\cdot 3=-2$	**3p**

c)	$\left(x_1^3+x_2^3+x_3^3\right)-2\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)+3\left(x_1+x_2+x_3\right)+3m=0$	**2p**
	$x_1^3+x_2^3+x_3^3=-3m-10\Rightarrow m=-6$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{(\ln x)'\cdot x-\ln x\cdot x'}{x^2}=$	**2p**
	$=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2},\ x\in(0,+\infty)$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	$f'(e)=0$, $f'(x)>0$ pentru orice $x\in(0,e)$ și $f'(x)<0$ pentru orice $x\in(e,+\infty)$	**3p**
	$f(x)\le f(e)\Rightarrow f(x)\le\dfrac{1}{e}$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\left(x^2+x+1\right)dx=\left(\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+x\right)\Big\|_0^1=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{11}{6}$	**2p**
b)	$I_{n+1}-I_n=\int_0^1\dfrac{x^n(x-1)}{x^2+x+1}dx$ pentru orice număr natural nenul n	**2p**
	Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ și $x\in[0,1]$ avem $x^n\ge0$, $x-1\le0$ și $x^2+x+1>0\Rightarrow I_{n+1}\le I_n$	**3p**
c)	$\int_0^a\dfrac{2x+1}{f(x)}dx=\int_0^a\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}dx=\left(\ln\left(x^2+x+1\right)\right)\Big\|_0^a=\ln\left(a^2+a+1\right)$	**3p**
	$\ln\left(a^2+a+1\right)=\ln3\Leftrightarrow a^2+a+1=3$ care are soluția pozitivă $a=1$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2014
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Barem de evaluare şi de notare

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z^2=(1+i)^2=1+2i+i^2=$	**2p**
	$=2i$	**3p**
2.	$\Delta=16-24=-8$	**3p**
	$\Delta<0$, deci parabola asociată funcției f **nu** intersectează axa Ox	**2p**
3.	$2x-3=x+1$	**2p**
	$x=4$ care verifică ecuația	**3p**
4.	Sunt 45 de numere impare de două cifre, deci sunt 45 de cazuri favorabile	**2p**
	Sunt 90 de numere de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{45}{90}=\dfrac{1}{2}$	**2p**
5.	$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CA}=$	**2p**
	$=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)=\vec{0}$	**3p**
6.	$\dfrac{\sin a-\cos a}{\cos a+\sin a}=\dfrac{\cos a\left(\dfrac{\sin a}{\cos a}-1\right)}{\cos a\left(1+\dfrac{\sin a}{\cos a}\right)}=\dfrac{\text{tg}a-1}{1+\text{tg}a}=$	**3p**
	$=\dfrac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det\left(A(1)\right)=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&2\\1&2&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1+2+2-1-4-1=-1$	**3p**
b)	$\det\left(A(m)\right)=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&m&2\\1&2&m\end{vmatrix}=m^2-2m$	**3p**
	$m^2-2m=0\Leftrightarrow m_1=0$ și $m_2=2$	**2p**
c)	$A(a)\cdot A(a)=\begin{pmatrix}3&a+3&a+3\\a+3&a^2+5&4a+1\\a+3&4a+1&a^2+5\end{pmatrix}$, $A\left(a^2\right)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&a^2&2\\1&2&a^2\end{pmatrix}$	**3p**
	$\begin{pmatrix}2&a+2&a+2\\a+2&5&4a-1\\a+2&4a-1&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&5&-5\\1&-5&5\end{pmatrix}\Leftrightarrow a=-1$	**2p**

2.a)	$1*3=3\cdot 1+3\cdot 3-1\cdot 3-6=$ $=3$	**3p** **2p**
b)	$x*y=3-xy+3x+3y-9=$ $=3-x(y-3)+3(y-3)=3-(x-3)(y-3)$ pentru orice numere reale x şi y	**2p** **3p**
c)	$3-(x-3)^{2014}=x$ $x_1=3$ şi $x_2=2$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{(x-2)'\left(x^2-4x+5\right)-(x-2)\left(x^2-4x+5\right)'}{\left(x^2-4x+5\right)^2}=$ $=\dfrac{-x^2+4x-3}{\left(x^2-4x+5\right)^2}=\dfrac{(1-x)(x-3)}{\left(x^2-4x+5\right)^2},\ x\in\mathbb{R}$	**2p** **3p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2}{x^2-4x+5}=0$ Dreapta de ecuaţie $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcţiei f	**3p** **2p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x_1=1$ şi $x_2=3$ $f'(x)\le 0$ pentru orice $x\in(-\infty,1]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty,1]$ $f'(x)\ge 0$ pentru orice $x\in[1,3]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[1,3]$ $f'(x)\le 0$ pentru orice $x\in[3,+\infty)\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[3,+\infty)$	**2p** **1p** **1p** **1p**
2.a)	$I_1=\int_1^e x\ln x\,dx=\dfrac{x^2}{2}\ln x\Big\vert_1^e-\dfrac{1}{2}\int_1^e x\,dx=$ $=\dfrac{e^2}{2}-\dfrac{e^2}{4}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{e^2+1}{4}$	**3p** **2p**
b)	$I_{n+1}-I_n=\int_1^e x(\ln x-1)\ln^n x\,dx$ Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ şi $x\in[1,e]$ avem $\ln x\ge 0$ şi $\ln x-1\le 0\Rightarrow I_{n+1}\le I_n$	**2p** **3p**
c)	$I_{n+1}=\int_1^e x\ln^{n+1} x\,dx=\dfrac{x^2}{2}\ln^{n+1} x\Big\vert_1^e-\int_1^e\dfrac{x^2}{2}\cdot\dfrac{1}{x}(n+1)\ln^n x\,dx=$ $=\dfrac{e^2}{2}-\dfrac{n+1}{2}\int_1^e x\ln^n x\,dx\Rightarrow 2I_{n+1}+(n+1)I_n=e^2$ pentru orice număr natural nenul n	**3p** **2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2014
Proba E. c) – 2 iulie 2014
Matematică *M_mate-info*
Barem de evaluare şi de notare

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2\cdot(x+5)=4^2$	**2p**
	$x=3$	**3p**
2.	$\Delta=1-16=-15$	**2p**
	$a=1>0$ şi $\Delta<0\Rightarrow$ parabola asociată funcţiei f este situată deasupra axei Ox	**3p**
3.	$x^2-1=8\Leftrightarrow x^2-9=0$	**3p**
	$x_1=-3$ şi $x_2=3$	**2p**
4.	Sunt 7 numere de două cifre care au suma cifrelor egală cu 7, deci sunt 7 cazuri favorabile	**2p**
	Sunt 90 de numere de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{7}{90}$	**2p**
5.	$M(0,3)$	**2p**
	$OM=3$	**3p**
6.	$x=\dfrac{\pi}{6}$	**2p**
	$\sin 2x=\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(0))=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1+0+0-0-0-0=1$	**3p**
b)	$A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}1&2x&0\\0&4x+1&0\\0&3x&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2y&0\\0&4y+1&0\\0&3y&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2x+2y+8xy&0\\0&4x+4y+16xy+1&0\\0&3x+3y+12xy&1\end{pmatrix}$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1&2(x+y+4xy)&0\\0&4(x+y+4xy)+1&0\\0&3(x+y+4xy)&1\end{pmatrix}=A(x+y+4xy)$ pentru orice numere reale x şi y	**2p**
c)	$A(x)\cdot A(x)=I_3\Rightarrow A(2x+4x^2)=A(0)\Rightarrow 2x+4x^2=0$	**3p**
	$x_1=0$ şi $x_2=-\dfrac{1}{2}$	**2p**
2.a)	$f(0)=0^3+0^2-4\cdot 0+2a=$	**2p**
	$=2a$	**3p**
b)	$x_1=1+i\Rightarrow x_2=1-i$	**1p**
	$x_1+x_2+x_3=-1\Rightarrow x_3=-3$	**2p**
	$x_1x_2x_3=-2a\Rightarrow a=3$	**2p**

c)	$x_1^3+x_2^3+x_3^3=(1+i)^3+(1-i)^3+(-3)^3=$	**3p**
	$=(2i-2)+(-2i-2)-27=-31$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{\left(x^2\right)'\cdot(x-2)-x^2\cdot(x-2)'}{(x-2)^2}=$	**2p**
	$=\dfrac{2x(x-2)-x^2}{(x-2)^2}=\dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2}$, $x\in(2,+\infty)$	**3p**
b)	$y-f(4)=f'(4)(x-4)$	**2p**
	$f(4)=8$, $f'(4)=0$, deci ecuaţia tangentei este $y=8$	**3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=4$	**1p**
	$f'(x)\le 0$ pentru orice $x\in(2,4]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(2,4]$	**2p**
	$f'(x)\ge 0$ pentru orice $x\in[4,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[4,+\infty)$	**2p**
2.a)	$I_2=\displaystyle\int_0^1\frac{x^2}{x^3+1}dx=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{3x^2}{x^3+1}dx=$	**2p**
	$=\dfrac{1}{3}\ln\left(x^3+1\right)\Big\vert_0^1=\dfrac{1}{3}\ln 2$	**3p**
b)	$I_{n+3}+I_n=\displaystyle\int_0^1\frac{x^{n+3}}{x^3+1}dx+\int_0^1\frac{x^n}{x^3+1}dx=\int_0^1\frac{x^n\left(x^3+1\right)}{x^3+1}dx=$	**3p**
	$=\displaystyle\int_0^1 x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big\vert_0^1=\frac{1}{n+1}$ pentru orice număr natural nenul n	**2p**
c)	Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ şi $x\in[0,1]$ avem $x^n\ge 0$, $x^3+1>0\Rightarrow I_n\ge 0$	**2p**
	$I_{n+3}\ge 0$ şi $I_{n+3}+I_n=\dfrac{1}{n+1}\Rightarrow 0\le I_n\le\dfrac{1}{n+1}\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$	**3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2014
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Barem de evaluare şi de notare

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z=-2+2i$ Partea reală a numărului z este egală cu -2	**2p** **3p**
2.	$f(x)=g(x)\Leftrightarrow x-1=3x-5$ $x=2$ şi $y=1$	**3p** **2p**
3.	$x^2-x=2x\Leftrightarrow x^2-3x=0$ $x_1=0$ şi $x_2=3$	**3p** **2p**
4.	Cifra unităților poate fi 0 sau 2 Cifra zecilor poate fi aleasă în câte 3 moduri, deci se pot forma $3\cdot 2=6$ numere	**2p** **3p**
5.	$(m+1)\vec{i}+4\vec{j}=2\left(3\vec{i}+2\vec{j}\right)$ $m=5$	**2p** **3p**
6.	ΔABC este dreptunghic isoscel $\cos C=\frac{\sqrt{2}}{2}$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det\left(A(0)\right)=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=$ $=1+0+0-0-0-0=1$	**2p** **3p**
b)	$A(x+y)=\begin{pmatrix}1&0&0\\x+y&1&0\\2(x+y)^2-2(x+y)&4(x+y)&1\end{pmatrix}$ $A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}1&0&0\\x+y&1&0\\2x^2+4xy+2y^2-2x-2y&4x+4y&1\end{pmatrix}=A(x+y)$ pentru orice numere reale x şi y	**2p** **3p**
c)	$A(x)\cdot A(x)\cdot A(x)=A(3x)$ $x^2+2=3x\Rightarrow x_1=1$ şi $x_2=2$	**2p** **3p**
2.a)	$f(2)=2^3-3\cdot 2^2+a\cdot 2-2=$ $=2a-6=2(a-3)$	**2p** **3p**
b)	$f=(X-2)\left(X^2-X+1\right)+(a-3)X$ $a=3$	**3p** **2p**

c)	$f=(X-2)\left(X^2-X+1\right)$	**2p**
	$\left(2^x-2\right)\left(2^{2x}-2^x+1\right)=0\Leftrightarrow x=1$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{\left(xe^x\right)'\cdot(x+2)-xe^x\cdot(x+2)'}{(x+2)^2}=$	**2p**
	$=\dfrac{\left(e^x+xe^x\right)\cdot(x+2)-xe^x}{(x+2)^2}=\dfrac{\left(x^2+2x+2\right)e^x}{(x+2)^2}$, $x\in(-2,+\infty)$	**3p**
b)	$y-f(0)=f'(0)(x-0)$	**2p**
	$f(0)=0$, $f'(0)=\dfrac{1}{2}$, deci ecuaţia tangentei este $y=\dfrac{1}{2}x$	**3p**
c)	Funcţia $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-1$ este continuă pe $[1,2]$	**2p**
	$g(1)\cdot g(2)=\dfrac{e-3}{3}\cdot\dfrac{e^2-2}{2}<0$, deci există $c\in(1,2)$ astfel încât $g(c)=0$, adică $f(c)=1$	**3p**
2.a)	$I_1=\displaystyle\int_0^1\frac{x}{1+x}dx=\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x}\right)dx=$	**2p**
	$=x\Big\vert_0^1-\ln(1+x)\Big\vert_0^1=1-\ln 2$	**3p**
b)	$I_{n+1}-I_n=\displaystyle\int_0^1 x^n\left(\frac{x}{1+x^{n+1}}-\frac{1}{1+x^n}\right)dx=\int_0^1\frac{x^n(x-1)}{\left(1+x^n\right)\left(1+x^{n+1}\right)}dx$	**2p**
	Pentru orice $x\in[0,1]$ avem $x-1\le 0$, $x^n\ge 0$, $1+x^n>0$ şi $1+x^{n+1}>0$, deci $I_{n+1}-I_n\le 0$	**3p**
c)	Pentru orice $x\in[0,1]$ şi orice $n\in\mathbb{N}^*$ avem $0\le\dfrac{x^n}{1+x^n}\le x^n$	**2p**
	$0\le\int_0^1\frac{x^n}{1+x^n}dx\le\int_0^1 x^n dx\Rightarrow 0\le I_n\le\dfrac{1}{n+1}$, deci $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$	**3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2014
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Barem de evaluare şi de notare

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$6+12i+2-12i=$ $=6+2=8$	**3p** **2p**
2.	$\Delta=4-4=$ $=0$, deci parabola asociată funcției f este tangentă la axa Ox	**3p** **2p**
3.	$x^2+4=4x\Leftrightarrow x^2-4x+4=0$ $x=2$	**3p** **2p**
4.	Cifra unităților se poate alege în 4 moduri Pentru fiecare alegere a cifrei unităților, cifra zecilor se poate alege în 3 moduri, deci se pot forma $4\cdot 3=12$ numere	**3p** **2p**
5.	Panta dreptei BC este $m_{BC}=\frac{1}{2}\Rightarrow m_d=-2$ $d: y=-2x-2$	**2p** **3p**
6.	$\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow \sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{3\pi}{4}=0$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det\left(A(0)\right)=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=$ $=1+0+0-0-0-0=1$	**2p** **3p**
b)	$A(1)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&1&1\end{pmatrix}$, $A(n)\cdot A(1)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2^{n+1}&0\\0&2^{n+1}-1&1\end{pmatrix}$ $A(3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2^3&0\\0&2^3-1&1\end{pmatrix}$ și $A(n)\cdot A(1)=A(3)\Rightarrow n=2$	**3p** **2p**
c)	$A(p)\cdot A(q)=A(p+q)$ pentru orice numere naturale p și q $A(p+q)=A(pq)\Rightarrow p+q=pq\Rightarrow (p-1)(q-1)=1\Rightarrow p=q=0$ sau $p=q=2$	**2p** **3p**
2.a)	$f(0)=0^3+0^2-3\cdot 0+2=$ $=2$	**3p** **2p**
b)	Câtul este $X+1$ Restul este $X+6$	**3p** **2p**

c)	$x_1+x_2+x_3=-1$, $x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=-3$	**2p**
	$(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2=2(x_1+x_2+x_3)^2-6(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)=20$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=(3x)'+\left(e^x\right)'=$	**2p**
	$=3+e^x$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x+e^x}{x}=3$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-3x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$, deci dreapta de ecuație $y=3x$ este asimptotă oblică spre $-\infty$ la graficul funcţiei f	**3p**
c)	$g'(0)=0$, $g'(x)<0$ pentru orice $x\in(-\infty,0)$ și $g'(x)>0$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$, unde $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-4x-1=e^x-x-1$	**3p**
	$g(x)\geq g(0)\Rightarrow g(x)\geq 0\Rightarrow f(x)\geq 4x+1$ pentru orice număr real x	**2p**
2.a)	$\int_0^1\left(x^2+x+1\right)f(x)\,dx=\int_0^1 x^3\,dx=$	**2p**
	$=\dfrac{x^4}{4}\Big\vert_0^1=\dfrac{1}{4}$	**3p**
b)	$\int_0^1\left(f(x)-x+1\right)dx=\int_0^1\dfrac{1}{x^2+x+1}dx=\int_0^1\dfrac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{3}-\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$	**2p**
c)	$\lim\limits_{t\to0}\left(\dfrac{1}{t^4}\cdot\int_0^t f(x)\,dx\right)=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(t)}{4t^3}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t^3}{4t^3\left(t^2+t+1\right)}=\dfrac{1}{4}$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2014
Proba E. c) – 2 iulie 2014
Matematică *M_mate-info*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculaţi suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ ştiind că $a_1=6$ şi $a_2=12$.

5p **2.** Determinaţi coordonatele vârfului parabolei asociate funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x+4$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\left(3^x-1\right)\left(3^x-3\right)=0$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să conţină cifra 1.

5p **5.** Se consideră triunghiul echilateral ABC cu $AB=2$. Calculaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.

5p **6.** Calculaţi aria triunghiului isoscel ABC ştiind că $A=\frac{\pi}{2}$ şi $AC=4$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2 & a & a\\ a & 2 & 2\\ a & a & 2\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\det(A(0))=8$.

5p **b)** Determinaţi numerele reale a pentru care $\det(A(a))=0$.

5p **c)** Determinaţi matricea $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ ştiind că $A(1)\cdot X=\begin{pmatrix}4\\ 5\\ 4\end{pmatrix}$.

2. Se consideră x_1, x_2, x_3 rădăcinile polinomului $f=X^3-2X^2+3X+m$, unde m este număr real.

5p **a)** Calculaţi $f(1)$.

5p **b)** Arătaţi că $x_1^2+x_2^2+x_3^2=-2$.

5p **c)** Determinaţi numărul real m ştiind că $x_1^3+x_2^3+x_3^3=8$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

5p **c)** Arătaţi că $f(x)\leq\frac{1}{e}$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x+1$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{11}{6}$.

5p **b)** Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{f(x)}dx$. Arătaţi că $I_{n+1}\leq I_n$ pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Determinaţi numărul real pozitiv a ştiind că $\int_0^a\frac{2x+1}{f(x)}dx=\ln 3$.

Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numărul complex $z=1+i$. Calculați z^2.

5p **2.** Arătați că parabola asociată funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+6$ **nu** intersectează axa Ox.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(2x-3)=\log_2(x+1)$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie impar.

5p **5.** În triunghiul ABC punctele M, N și P sunt mijloacele laturilor AB, BC și, respectiv, AC. Arătați că $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\vec{0}$.

5p **6.** Știind că $\operatorname{tg}a=\sqrt{3}$ și $a\in\mathbb{R}$, arătați că $\dfrac{\sin a-\cos a}{\cos a+\sin a}=2-\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a & 2\\ 1 & 2 & a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=-1$.

5p **b)** Determinaţi numerele reale m știind că $\det(A(m))=0$.

5p **c)** Determinaţi numerele reale a astfel încât $A(a)\cdot A(a)-A(a^2)=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 5 & -5\\ 1 & -5 & 5\end{pmatrix}$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=3x+3y-xy-6$.

5p **a)** Calculaţi $1*3$.

5p **b)** Arătaţi că $x*y=3-(x-3)(y-3)$ pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinaţi numerele reale x pentru care $\underbrace{x*x*...*x}_{x \text{ de } 2014 \text{ ori}}=x$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-4x+5}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{(1-x)(x-3)}{\left(x^2-4x+5\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

5p **c)** Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\displaystyle\int_1^e x\ln^n x\,dx$.

5p **a)** Arătați că $I_1=\dfrac{e^2+1}{4}$.

5p **b)** Arătați că $I_{n+1}\le I_n$ pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Demonstraţi că $2I_{n+1}+(n+1)I_n=e^2$ pentru orice număr natural nenul n.

Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c) – 2 iulie 2014
Matematică *M_mate-info*

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați numărul real x știind că numerele 2, 4 și $x+5$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

5p **2.** Arătați că parabola asociată funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x+4$ este situată deasupra axei Ox.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{x^2-1}=2$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă suma cifrelor egală cu 7.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,4)$ și $B(1,2)$. Determinați lungimea vectorului $\overrightarrow{OM}$, unde punctul M este mijlocul segmentului AB.

5p **6.** Știind că $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, calculați $\sin 2x$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 2x & 0\\ 0 & 4x+1 & 0\\ 0 & 3x & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=1$.

5p **b)** Arătați că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y+4xy)$ pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale x, $x\neq-\frac{1}{4}$, pentru care matricea $A(x)$ este egală cu inversa ei.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+X^2-4X+2a$, unde a este număr real.

5p **a)** Calculați $f(0)$.

5p **b)** Determinați numărul real a știind că $1+i$ este rădăcină a polinomului f.

5p **c)** Pentru $a=3$, arătați că $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-31$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2}{x-2}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$, $x\in(2,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=4$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{x^3+1}dx$.

5p **a)** Arătați că $I_2=\frac{1}{3}\ln 2$.

5p **b)** Arătați că $I_{n+3}+I_n=\frac{1}{n+1}$ pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n$.

Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați partea reală a numărului complex $z=1+2i+3i^2$.

5p **2.** Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=3x-5$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x^2-x}=3^{2x}$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale pare, de două cifre, se pot forma cu cifrele 0, 1, 2 și 3.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră vectorii $\overrightarrow{AB}=3\vec{i}+2\vec{j}$ și $\overrightarrow{AC}=(m+1)\vec{i}+4\vec{j}$, unde m este număr real. Determinați numărul real m știind că $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB=AC=3$ și $BC=3\sqrt{2}$. Determinați $\cos C$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ x & 1 & 0\\ 2x^2-2x & 4x & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=1$.

5p **b)** Arătați că $A(x+y)=A(x)\cdot A(y)$ pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale x știind că $A(x^2+2)=A(x)\cdot A(x)\cdot A(x)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-3X^2+aX-2$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(2)=2(a-3)$.

5p **b)** Determinați numărul real a știind că polinomul f este divizibil prin X^2-X+1.

5p **c)** Pentru $a=3$, rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $f(2^x)=0$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{xe^x}{x+2}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{(x^2+2x+2)e^x}{(x+2)^2}$, $x\in(-2,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=0$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Arătați că ecuația $f(x)=1$ are cel puțin o soluție în intervalul $(1,2)$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\displaystyle\int_0^1\frac{x^n}{1+x^n}dx$.

5p **a)** Arătați că $I_1=1-\ln 2$.

5p **b)** Arătați că $I_{n+1}\le I_n$ pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$.

Examenul de bacalaureat naţional 2014
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătaţi că $3(2+4i)+2(1-6i)=8$.

5p **2.** Arătați că parabola asociată funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x+1$ este tangentă la axa Ox.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^{x^2+4}=5^{4x}$.

5p **4.** Determinaţi câte numere naturale de două cifre distincte se pot forma cu cifrele 1, 3, 5 și 7.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,2)$, $B(-4,-2)$ și $C(4,2)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin A și este perpendiculară pe dreapta BC.

5p **6.** Arătați că $\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{3\pi}{4}=0$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(n)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2^n & 0\\ 0 & 2^n-1 & 1\end{pmatrix}$, unde n este număr natural.

5p **a)** Arătaţi că $\det(A(0))=1$.

5p **b)** Determinaţi numărul natural n știind că $A(n)\cdot A(1)=A(3)$.

5p **c)** Determinați numerele naturale p și q știind că $A(p)\cdot A(q)=A(pq)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+X^2-3X+2$.

5p **a)** Calculați $f(0)$.

5p **b)** Determinaţi câtul şi restul împărţirii polinomului f la X^2-4.

5p **c)** Arătați că $(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2=20$ știind că x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile lui f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+e^x$.

5p **a)** Calculaţi $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.

5p **c)** Arătaţi că $f(x)\geq 4x+1$ pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+x+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1\left(x^2+x+1\right)f(x)\,dx=\frac{1}{4}$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1\left(f(x)-x+1\right)dx=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

5p **c)** Arătați că $\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{1}{t^4}\cdot\int_0^t f(x)\,dx\right)=\frac{1}{4}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2015

Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$r=5-2=3$ $a_3=5+3=8$	**3p** **2p**
2.	$f(3)=5\Leftrightarrow a-3=5$ $a=8$	**3p** **2p**
3.	$2^{3(4-x)}=2^{2x+2}\Leftrightarrow 12-3x=2x+2$ $x=2$	**3p** **2p**
4.	Sunt 90 de numere naturale de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile Sunt 9 numere naturale de două cifre care au produsul cifrelor egal cu 0, deci sunt 9 cazuri favorabile $p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{9}{90}=\frac{1}{10}$	**1p** **2p** **2p**
5.	$y-y_M=2(x-x_M)$ $y=2x-1$	**2p** **3p**
6.	$13^2=5^2+12^2$, deci triunghiul ABC este dreptunghic în A $\sin C=\frac{AB}{BC}=\frac{5}{13}$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}0&0&2\\0&1&0\\-1&0&3\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}0&0&2\\0&1&0\\-1&0&3\end{vmatrix}=$ $=0+0+0-(-2)-0-0=2$	**2p** **3p**
b)	$A(x)A(y)=\begin{pmatrix}(1-x)(1-y)-2xy&0&(1-x)2y+2x(1+2y)\\0&1&0\\-x(1-y)-(1+2x)y&0&-2xy+(1+2x)(1+2y)\end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix}1-(xy+x+y)&0&2(xy+x+y)\\0&1&0\\-(xy+x+y)&0&1+2(xy+x+y)\end{pmatrix}=A(xy+x+y)$, pentru orice numere reale x şi y	**3p** **2p**
c)	$A(x)A(x)A(x)=A\left((x+1)^3-1\right)$, pentru orice număr real x $(x+1)^3-1=7\Leftrightarrow x=1$	**3p** **2p**
2.a)	$f(0)=0^3+2\cdot 0^2+0+m=$ $=0+0+0+m=m$	**3p** **2p**

b)	$x_1+x_2+x_3=-2$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=1$, $x_1x_2x_3=-1$	**3p**
	$x_1^3+x_2^3+x_3^3=-2\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)-\left(x_1+x_2+x_3\right)-3=-2\left((-2)^2-2\cdot 1\right)-(-2)-3=-5=5x_1x_2x_3$	**2p**
c)	$x_1\in\mathbb{Z}$ și $f(x_1)=0\Leftrightarrow m=-x_1(x_1+1)^2$	**2p**
	Deoarece m este prim, obținem $(x_1+1)^2=1\Leftrightarrow x_1=0$, care nu convine, sau $x_1=-2$, pentru care $m=2$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=1-\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\left(x^2+1\right)'=$	**3p**
	$=1-\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-\left(x^2+1\right)}{x+\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{x+\sqrt{x^2+1}}=0$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	$f''(x)=-\dfrac{x'\sqrt{x^2+1}-x\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{x^2+1}=-\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=-\dfrac{1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
	$f''(x)<0$, pentru orice număr real x, deci funcția f' este descrescătoare pe $\mathbb{R}$	**2p**
2.a)	$\int_1^e\dfrac{1}{x}dx=\ln x\Big\vert_1^e=$	**3p**
	$=\ln e-\ln 1=1$	**2p**
b)	$\mathcal{A}=\int_1^e\lvert f(x)\rvert dx=\int_1^e\ln x\,dx=x\ln x\Big\vert_1^e-\int_1^e x\cdot\dfrac{1}{x}dx=$	**3p**
	$=e-x\Big\vert_1^e=e-e+1=1$	**2p**
c)	$\int_1^e\dfrac{1}{x}\left(f(x)\right)^n dx=\int_1^e\dfrac{1}{x}\ln^n x\,dx=\dfrac{1}{n+1}\ln^{n+1}x\Big\vert_1^e=\dfrac{1}{n+1}$	**3p**
	$\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{1}{2015}\Leftrightarrow n=2014$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2015

Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$r=a_2-a_1=2015-1=$ $=2014$	**3p** **2p**
2.	Valoarea maximă a funcției f este $f(4)=$ $=4+1=5$	**3p** **2p**
3.	$x^2-8x=9\Leftrightarrow x^2-8x-9=0$ $x_1=-1$ și $x_2=9$, care verifică ecuația	**3p** **2p**
4.	Prima cifră se poate alege în 4 moduri, a doua cifră se poate alege în câte 3 moduri Ultima cifră se poate alege, pentru fiecare mod de alegere a primelor două cifre, în câte 2 moduri, deci se pot forma $4\cdot3\cdot2=24$ de numere	**2p** **3p**
5.	$x_A+x_C=x_B+x_D\Rightarrow x_D=1$ $y_A+y_C=y_B+y_D\Rightarrow y_D=0$	**3p** **2p**
6.	$A=\dfrac{\pi}{2}$ $BC=2$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(1))=\begin{vmatrix}1&1&2\\0&1&3\\0&0&1\end{vmatrix}=$ $=1+0+0-0-0-0=1$	**2p** **3p**
b)	$A^2(a)=\begin{pmatrix}1&2a&a^2+4a+2\\0&1&2a+4\\0&0&1\end{pmatrix}$, $2A(a)=\begin{pmatrix}2&2a&2a+2\\0&2&2a+4\\0&0&2\end{pmatrix}$ $A^2(a)-2A(a)+I_3=\begin{pmatrix}0&0&a^2+2a\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0&0&a^2+2a\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Leftrightarrow a^2+2a=0\Leftrightarrow a_1=-2$ și $a_2=0$	**2p** **1p** **2p**
c)	$A(2)+A(100)=2A(51)$, $A(4)+A(98)=2A(51)$, ..., $A(50)+A(52)=2A(51)$ $A(2)+A(4)+A(6)+\ldots+A(100)=25\cdot2A(51)=50A(51)$	**3p** **2p**

2.a)	$f(0)=0^3-4\cdot 0^2+m\cdot 0+2=$	**3p**
	$=2$	**2p**
b)	$x_1+x_2+x_3=4$, $x_1=x_2+x_3\Leftrightarrow x_1=2$	**2p**
	$f(2)=0\Leftrightarrow 2m-6=0\Leftrightarrow m=3$	**3p**
c)	$f=X^3-4X^2+8X+2$, $x_1+x_2+x_3=4$ și $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=8$	**2p**
	Cum $x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=16-16=0$, dacă polinomul f ar avea toate rădăcinile reale, am obține $x_1=x_2=x_3=0$, contradicție cu $f(0)=2$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=e^x\left(x^2-6x+9\right)+e^x(2x-6)=$	**3p**
	$=e^x\left(x^2-6x+9+2x-6\right)=e^x\left(x^2-4x+3\right)$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x_1=1$ și $x_2=3$	**2p**
	$f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in(-\infty,1]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $(-\infty,1]$	**1p**
	$f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in[1,3]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[1,3]$	**1p**
	$f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[3,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[3,+\infty)$	**1p**
c)	$f(x)\leq f(1)$, pentru orice $x\in(-\infty,3]$	**3p**
	Cum $f(1)=4e$, obținem $e^x(x-3)^2\leq 4e$, pentru orice $x\in(-\infty,3]$	**2p**
2.a)	$I_1=\int_0^1\left(1-x^3\right)dx=\left(x-\frac{x^4}{4}\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$	**2p**
b)	$I_{n+1}-I_n=\int_0^1\left(-x^3\right)\left(1-x^3\right)^n dx$, pentru orice număr natural nenul n	**2p**
	Pentru orice număr natural nenul n și $x\in[0,1]$ avem $-x^3\leq 0$ și $\left(1-x^3\right)^n\geq 0\Rightarrow I_{n+1}\leq I_n$	**3p**
c)	$I_{n+1}=\int_0^1 x'\left(1-x^3\right)^{n+1}dx=x\left(1-x^3\right)^{n+1}\Big\vert_0^1-\int_0^1 x(n+1)\left(1-x^3\right)^n\left(-3x^2\right)dx=$	**2p**
	$=3(n+1)\int_0^1 x^3\left(1-x^3\right)^n dx=-3(n+1)\int_0^1\left(1-x^3-1\right)\left(1-x^3\right)^n dx=-3(n+1)(I_{n+1}-I_n)$, deci $I_{n+1}=\frac{3(n+1)}{3n+4}I_n$, pentru orice număr natural nenul n	**3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2015

Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(\sqrt{5}+1\right)^2=6+2\sqrt{5}$	**2p**
	$\left(\sqrt{5}-1\right)^2=6-2\sqrt{5}\Rightarrow\left(6+2\sqrt{5}\right)+\left(6-2\sqrt{5}\right)=12$	**3p**
2.	$f(3)=0$	**3p**
	$f(1)f(2)f(3)f(4)=0$	**2p**
3.	$x^2-4x+4=1\Leftrightarrow x^2-4x+3=0$	**2p**
	$x_1=1$ şi $x_2=3$, care verifică ecuaţia dată	**3p**
4.	Cifra unităţilor este 3	**2p**
	Numerele sunt 243 şi 423, deci se pot forma două astfel de numere	**3p**
5.	$m_{AB}=1$ şi $m_d\cdot m_{AB}=-1\Rightarrow m_d=-1$	**3p**
	Ecuaţia dreptei d este $y=-x+3$	**2p**
6.	$\sin(\pi-x)=\sin x$	**2p**
	$\sin(\pi+x)=-\sin x\Rightarrow\sin(\pi-x)+\sin(\pi+x)=\sin x-\sin x=0$, pentru orice număr real x	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$B(0)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det(B(0))=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1+0+0-0-0-0=1$	**3p**
b)	$B(x)+B(y)=\begin{pmatrix}1&0&x\\0&1&0\\3x&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&y\\0&1&0\\3y&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&x+y\\0&2&0\\3x+3y&0&2\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=2\begin{pmatrix}1&0&\frac{x+y}{2}\\0&1&0\\3\cdot\frac{x+y}{2}&0&1\end{pmatrix}=2B\left(\frac{x+y}{2}\right)$, pentru orice numere reale x şi y	**2p**
c)	$B\left(x^2+1\right)B(x)=\begin{pmatrix}3x^3+3x+1&0&x^2+x+1\\0&1&0\\3\left(x^2+x+1\right)&0&3x^3+3x+1\end{pmatrix}$, $B\left(x^2+x+1\right)=\begin{pmatrix}1&0&x^2+x+1\\0&1&0\\3\left(x^2+x+1\right)&0&1\end{pmatrix}$	**3p**
	$3x^3+3x+1=1\Leftrightarrow x=0$	**2p**

2.a)	$(-3)\circ 3=\frac{1}{2}(-3-3)(3-3)+3=$	**3p**
	$=0+3=3$	**2p**
b)	$n\circ n=\frac{1}{2}(n-3)^2+3$	**2p**
	$(n-3)^2=16\Leftrightarrow n_1=-1$, care nu convine, și $n_2=7$, care convine	**3p**
c)	$x\circ 3=3$ și $3\circ y=3$, pentru x și y numere reale	**2p**
	$1\circ 2\circ 3\circ\ldots\circ 2015=(1\circ 2)\circ 3\circ(4\circ 5\circ\ldots\circ 2015)=3\circ(4\circ 5\circ\ldots\circ 2015)=3$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{1\cdot(x-1)-(x+2)\cdot 1}{(x-1)^2}=$	**3p**
	$=\frac{x-1-x-2}{(x-1)^2}=-\frac{3}{(x-1)^2}$, $x\in(1,+\infty)$	**2p**
b)	$f''(x)=\frac{6}{(x-1)^3}$, $x\in(1,+\infty)$	**3p**
	$f''(x)>0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$, deci funcția f este convexă pe intervalul $(1,+\infty)$	**2p**
c)	$f'(x)=-3\Leftrightarrow(x-1)^2=1$	**3p**
	Cum $x\in(1,+\infty)$, coordonatele punctului sunt $x=2$ și $y=4$	**2p**
2.a)	$\int_1^2\frac{1}{x}f(x)dx=\int_1^2 e^x dx=e^x\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=e^2-e=e(e-1)$	**2p**
b)	$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=(x-1)e^x+c$, unde $c\in\mathbb{R}$	**3p**
	$F(1)=0\Rightarrow c=0$, deci $F(x)=(x-1)e^x$	**2p**
c)	$I_n=\int_0^1 x^{n+1}e^x dx=\left(x^{n+1}e^x\right)\Big\vert_0^1-(n+1)\int_0^1 x^n e^x dx=$	**3p**
	$=e-(n+1)I_{n-1}$, deci $I_n+(n+1)I_{n-1}=e$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2015

Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z_1+z_2=(2+3i)+(1-3i)=$	**3p**
	$=3$, care este număr real	**2p**
2.	$g(1)=3$	**2p**
	$(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(3)=2$	**3p**
3.	$4^x=4^3$	**2p**
	$x=3$	**3p**
4.	Sunt 90 de numere naturale de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	Sunt 13 numere naturale de două cifre care sunt divizibile cu 7, deci sunt 13 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{13}{90}$	**2p**
5.	Dreapta paralelă cu dreapta d are panta egală cu 4	**2p**
	Ecuația paralelei duse prin punctul A la dreapta d este $y=4x-8$	**3p**
6.	$\sin(\pi-x)\sin x-\cos(\pi-x)\cos x=-\cos(\pi-x+x)=$	**3p**
	$=-\cos\pi=1$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1+0+0-1-0-0=0$	**3p**
b)	$A\cdot B(x)=\begin{pmatrix}0&2x&0\\x&0&x\\0&2x&0\end{pmatrix}$, $B(x)\cdot A=\begin{pmatrix}0&x&0\\2x&0&2x\\0&x&0\end{pmatrix}$	**2p**
	$A\cdot B(x)+B(x)\cdot A=\begin{pmatrix}0&3x&0\\3x&0&3x\\0&3x&0\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}0&x&0\\x&0&x\\0&x&0\end{pmatrix}=3B(x)$, pentru orice număr real x	**3p**
c)	$B(x)B(x)B(x)=\begin{pmatrix}0&2x^3&0\\2x^3&0&2x^3\\0&2x^3&0\end{pmatrix}$ și $B\left(x^2+x-2\right)=\begin{pmatrix}0&x^2+x-2&0\\x^2+x-2&0&x^2+x-2\\0&x^2+x-2&0\end{pmatrix}$	**3p**
	$2x^3=x^2+x-2,\ x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow x=-1$	**2p**
2.a)	$f(0)=0^3-2\cdot0^2+2\cdot0+m=$	**3p**
	$=0-0+0+m=m$	**2p**

b)	$x_1+x_2+x_3=2,\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=2,\ x_1x_2x_3=1$	**3p**
	$(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=\frac{(x_1+x_2+x_3)(x_2x_3+x_1x_3+x_1x_2)}{x_1x_2x_3}=\frac{2\cdot 2}{1}=4$	**2p**
c)	$x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=2^2-2\cdot 2=0$	**2p**
	Dacă polinomul f ar avea toate rădăcinile reale, am obține $x_1=x_2=x_3=0$, contradicție cu $x_1+x_2+x_3=2$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{(2x-1)(x^2+x+1)-(2x+1)(x^2-x+1)}{(x^2+x+1)^2}=$	**3p**
	$=\frac{2x^2-2}{(x^2+x+1)^2}=\frac{2(x-1)(x+1)}{(x^2+x+1)^2},\ x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f(0)=1,\ f'(0)=-2$	**2p**
	Ecuaţia tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)\Rightarrow y=-2x+1$	**3p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x))^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2x}{x^2+x+1}\right)^x=$	**2p**
	$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2x^2}{x^2+x+1}}=e^{-2}$	**3p**
2.a)	$\int_0^1(f(x)+2x)\,dx=\int_0^1 e^x dx=$	**2p**
	$=e^x\Big\|_0^1=e-1$	**3p**
b)	$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F(x)=e^x-x^2+c$, unde $c\in\mathbb{R}$	**2p**
	$F(1)=e-3\Rightarrow c=-2$, deci $F(x)=e^x-x^2-2$	**3p**
c)	$V=\pi\int_0^1 g^2(x)\,dx=\pi\int_0^1\left(e^x-2x\right)^2dx=\pi\int_0^1\left(e^{2x}-4xe^x+4x^2\right)dx=$	**2p**
	$=\pi\left(\frac{1}{2}e^{2x}-4(x-1)e^x+4\frac{x^3}{3}\right)\Big\|_0^1=\frac{\pi(3e^2-19)}{6}$	**3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2015
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(z-1)^2 = i^2 =$	**2p**
	$=-1$	**3p**
2.	$x_1 + x_2 = 5$	**2p**
	$x_1 \cdot x_2 = 3 \Rightarrow 3(x_1 + x_2) - 4x_1x_2 = 3 \cdot 5 - 4 \cdot 3 = 3$	**3p**
3.	$(2^x - 1)(2^x - 2) = 0 \Leftrightarrow 2^x = 1$ sau $2^x = 2$	**3p**
	$x = 0$ sau $x = 1$	**2p**
4.	Sunt 7 numere de două cifre care sunt divizibile cu 13, deci sunt 7 cazuri favorabile	**2p**
	Sunt 90 de numere de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	$p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{7}{90}$	**2p**
5.	Panta paralelei duse prin punctul A la dreapta d este $m = 3$	**3p**
	Ecuația paralelei duse prin punctul A la dreapta d este $y = 3x - 3$	**2p**
6.	$\sin C = \frac{1}{2}$	**2p**
	$\frac{AB}{\sin C} = 2R \Rightarrow R = 12$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & a+1 \\ 2 & a+2 & a+3 \end{vmatrix} =$	**2p**
	$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & a+1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$	**3p**
b)	$2A(n^2) - A(n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2n^2-n & 2n^2-n+1 \\ 2 & 2n^2-n+2 & 2n^2-n+3 \end{pmatrix}$, $A(6) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 7 \\ 2 & 8 & 9 \end{pmatrix}$	**3p**
	$2n^2 - n - 6 = 0 \Rightarrow n = -\frac{3}{2} \notin \mathbb{N}$, $n = 2 \in \mathbb{N}$	**2p**

c)	Pentru $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, avem $A(2015)\cdot X=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2015y+2016z=0 \\ 2x+2017y+2018z=0 \end{cases}$	**2p**
	Determinantul sistemului omogen este egal cu $0 \Rightarrow$ sistemul are o infinitate de soluţii, deci există o infinitate de matrice X	**3p**
2.a)	$f=X^3+2X-3$	**2p**
	$f(1)=1+2-3=0$	**3p**
b)	$f=X^3+mX-3$ este divizibil cu $X+1 \Leftrightarrow f(-1)=0$	**2p**
	$m=-4$	**3p**
c)	$x_1^2+x_2^2+x_3^2=-2m<0 \Rightarrow f$ are cel puţin o rădăcină din $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$	**2p**
	$f\in\mathbb{R}[X] \Rightarrow f$ are două rădăcini conjugate din $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, care au modulele egale	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{e^x-x-(x+1)(e^x-1)}{(e^x-x)^2}=$	**2p**
	$=\dfrac{1-xe^x}{(e^x-x)^2},\ x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$y-f(0)=f'(0)(x-0)$	**2p**
	$f(0)=1$, $f'(0)=1$, deci ecuaţia tangentei este $y=x+1$	**3p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x+1}{e^{-x}+x}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{1-e^{-x}}=-1$	**3p**
2.a)	$\int_0^2 f^2(x)\,dx=\int_0^2\dfrac{1}{x^2+4}\,dx=\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}\Big\|_0^2=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{2}(\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}0)=\dfrac{\pi}{8}$	**2p**
b)	F este o primitivă a funcţiei $f \Rightarrow F'(x)=f(x)$	**2p**
	$F'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}>0$ pentru orice număr real x, deci F este crescătoare pe $\mathbb{R}$	**3p**
c)	$I_n=\int_0^1\dfrac{x^n}{\sqrt{x^2+4}}\,dx=x^{n-1}\sqrt{x^2+4}\Big\|_0^1-(n-1)\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{x^2+4}\,dx=\sqrt{5}-(n-1)\int_0^1\dfrac{x^{n-2}(x^2+4)}{\sqrt{x^2+4}}\,dx=$	**3p**
	$=\sqrt{5}-(n-1)I_n-4(n-1)I_{n-2} \Rightarrow nI_n=\sqrt{5}-4(n-1)I_{n-2}$ pentru orice număr natural n, $n\geq 3$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2015
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinaţi al treilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $a_1=2$ şi $a_2=5$.

5p **2.** Determinați numărul real a, știind că punctul $A(3,5)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=a-x$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $8^{4-x}=2^{2x+2}$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 0.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctul $M(1,1)$. Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul M şi are panta egală cu 2.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB=5$, $AC=12$ şi $BC=13$. Arătaţi că $\sin C=\frac{5}{13}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1-x & 0 & 2x\\ 0 & 1 & 0\\ -x & 0 & 1+2x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=2$.

5p **b)** Arătați că $A(x)A(y)=A(xy+x+y)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale x, știind că $A(x)A(x)A(x)=A(7)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+2X^2+X+m$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $f(0)=m$.

5p **b)** Pentru $m=1$, arătați că $x_1^3+x_2^3+x_3^3=5x_1x_2x_3$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Determinaţi numărul natural prim m, ştiind că polinomul f are o rădăcină întreagă.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\sqrt{x^2+1}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=1-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

5p **c)** Arătaţi că derivata funcţiei f este descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_1^e \frac{1}{x}dx=1$.

5p **b)** Calculați aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei f, axa Ox și dreptele de ecuaţii $x=1$ și $x=e$.

5p **c)** Determinaţi numărul natural nenul n, ştiind că $\int_1^e \frac{1}{x}(f(x))^n dx=\frac{1}{2015}$.

Examenul de bacalaureat național 2015
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați rația progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1=1$ și $a_2=2015$.

5p **2.** Determinați valoarea maximă a funcției $f:[1,4]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3\left(x^2-8x\right)=\log_3 9$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $A=\{1,2,3,4\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,3)$, $B(6,3)$ și $C(4,0)$. Determinați coordonatele punctului D, știind că $ABCD$ este paralelogram.

5p **6.** Calculați lungimea laturii BC a triunghiului ABC în care $AB=1$, $B=\frac{\pi}{3}$ și $C=\frac{\pi}{6}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $O_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}1&a&a+1\\0&1&a+2\\0&0&1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=1$.

5p **b)** Determinați numerele reale a, știind că $A^2(a)-2A(a)+I_3=O_3$, unde $A^2(a)=A(a)A(a)$.

5p **c)** Arătați că $A(2)+A(4)+A(6)+\ldots+A(100)=50A(51)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-4X^2+mX+2$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(0)=2$.

5p **b)** Determinați numărul real m pentru care $x_1=x_2+x_3$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Pentru $m=8$, arătați că polinomul f **nu** are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\left(x^2-6x+9\right)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=e^x\left(x^2-4x+3\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $e^x(x-3)^2\leq 4e$, pentru orice $x\in(-\infty,3]$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1\left(1-x^3\right)^n dx$.

5p **a)** Arătați că $I_1=\frac{3}{4}$.

5p **b)** Arătați că $I_{n+1}\leq I_n$, pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Demonstrați că $I_{n+1}=\frac{3(n+1)}{3n+4}I_n$, pentru orice număr natural nenul n.

Examenul de bacalaureat național 2015
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\left(\sqrt{5}+1\right)^2+\left(\sqrt{5}-1\right)^2=12$.

5p **2.** Calculați produsul $f(1)f(2)f(3)f(4)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-3$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2\left(x^2-4x+4\right)=0$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale impare, de trei cifre distincte, se pot forma cu cifrele 2, 3 și 4.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,2)$ și $B(2,3)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul A și este perpendiculară pe dreapta AB.

5p **6.** Arătați că $\sin(\pi-x)+\sin(\pi+x)=0$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $B(x)=\begin{pmatrix}1&0&x\\0&1&0\\3x&0&1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(B(0))=1$.

5p **b)** Arătați că $B(x)+B(y)=2B\left(\frac{x+y}{2}\right)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $B\left(x^2+1\right)B(x)=B\left(x^2+x+1\right)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=\frac{1}{2}(x-3)(y-3)+3$.

5p **a)** Arătați că $(-3)\circ 3=3$.

5p **b)** Determinați numerele naturale n pentru care $n\circ n=11$.

5p **c)** Calculați $1\circ 2\circ 3\circ\ldots\circ 2015$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+2}{x-1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=-\frac{3}{(x-1)^2}$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Arătați că funcția f este convexă pe intervalul $(1,+\infty)$.

5p **c)** Determinați coordonatele punctului situat pe graficul funcției f, în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu dreapta de ecuație $y=-3x$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2\frac{1}{x}f(x)\,dx=e(e-1)$.

5p **b)** Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(1)=0$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1 x^n f(x)\,dx$. Arătați că $I_n+(n+1)I_{n-1}=e$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$.

Examenul de bacalaureat naţional 2015
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numerele complexe $z_1=2+3i$ şi $z_2=1-3i$. Arătaţi că numărul z_1+z_2 este real.

5p **2.** Calculaţi $(f\circ g)(1)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-1$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=3x$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $4^x-64=0$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 7.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuaţie $y=4x+1$ şi punctul $A(2,0)$. Determinaţi ecuaţia paralelei duse prin punctul A la dreapta d.

5p **6.** Arătaţi că $\sin(\pi-x)\sin x-\cos(\pi-x)\cos x=1$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ şi $B(x)=\begin{pmatrix}0&x&0\\x&0&x\\0&x&0\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\det A=0$.

5p **b)** Arătaţi că $A\cdot B(x)+B(x)\cdot A=3B(x)$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinaţi numerele reale x pentru care $B(x)\cdot B(x)\cdot B(x)=B\left(x^2+x-2\right)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-2X^2+2X+m$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $f(0)=m$.

5p **b)** Pentru $m=-1$, demonstraţi că $(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=4$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Arătaţi că polinomul f **nu** are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{2(x-1)(x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcţiei f.

5p **c)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\right)^x$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-2x$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^1\left(f(x)+2x\right)dx=e-1$

5p **b)** Determinaţi primitiva F a funcţiei f pentru care $F(1)=e-3$.

5p **c)** Arătaţi că volumul corpului obţinut prin rotirea în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$, este egal cu $\frac{\pi}{6}\left(3e^2-19\right)$.

Examenul de bacalaureat naţional 2015
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numărul complex $z=1+i$. Calculaţi $(z-1)^2$.

5p **2.** Arătaţi că $3(x_1+x_2)-4x_1x_2=3$, ştiind că x_1 şi x_2 sunt soluţiile ecuaţiei $x^2-5x+3=0$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $4^x-3\cdot 2^x+2=0$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 13.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuaţie $y=3x+4$ şi punctul $A(1,0)$. Determinaţi ecuaţia paralelei duse prin punctul A la dreapta d.

5p **6.** Calculaţi raza cercului circumscris triunghiului ABC, ştiind că $AB=12$ şi $C=\frac{\pi}{6}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & a & a+1\\ 2 & a+2 & a+3\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Calculaţi $\det(A(a))$.

5p **b)** Determinaţi numărul natural n, ştiind că $2A(n^2)-A(n)=A(6)$.

5p **c)** Arătaţi că există o infinitate de matrice $X\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ care verifică relaţia $A(2015)\cdot X=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+mX-3$, unde m este număr real.

5p **a)** Pentru $m=2$, arătaţi că $f(1)=0$.

5p **b)** Determinaţi numărul real m, ştiind că polinomul f este divizibil cu $X+1$.

5p **c)** Arătaţi că, pentru orice număr real strict pozitiv m, polinomul f are două rădăcini de module egale.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+1}{e^x-x}$.

5p **a)** Calculaţi $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=0$, situat pe graficul funcţiei f.

5p **c)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(-x)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$.

5p **a)** Calculaţi $\int_0^2 f^2(x)\,dx$.

5p **b)** Arătaţi că orice primitivă a funcţiei f este funcţie crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1 x^n f(x)\,dx$. Arătaţi că $nI_n=\sqrt{5}-4(n-1)I_{n-2}$ pentru orice număr natural n, $n\geq 3$.

Examenul de bacalaureat naţional 2016
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 01

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$r=4-1=3$ $a_4=1+3\cdot 3=10$	**2p** **3p**
2.	$f(1)=a\Rightarrow 1^2+4=a$ $a=5$	**3p** **2p**
3.	$3^{2(x-2)}=3^{2-x}\Leftrightarrow 2x-4=2-x$ $x=2$	**3p** **2p**
4.	Sunt 90 de numere naturale de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile Sunt 21 de numere naturale de două cifre care sunt mai mici sau egale cu 30, deci sunt 21 de cazuri favorabile $p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{21}{90}=\frac{7}{30}$	**1p** **2p** **2p**
5.	$y-3=1\cdot(x-0)$ $y=x+3$	**3p** **2p**
6.	$AD=8$, unde $AD\perp BC$, $D\in BC$ $\sin B=\frac{AD}{AB}=\frac{4}{5}$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(0))=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{vmatrix}=$ $=0+1+1-0-0-0=2$	**2p** **3p**
b)	$\det(A(m))=\begin{vmatrix}-m&1&1\\1&-m&1\\1&1&-m\end{vmatrix}=(2-m)(m+1)^2$ Pentru orice număr real m, $m\neq -1$ şi $m\neq 2$, obţinem $\det(A(m))\neq 0$, deci matricea $A(m)$ este inversabilă	**3p** **2p**
c)	Pentru $m=2$, sistemul este compatibil nedeterminat şi soluţiile sistemului sunt de forma $(1+\alpha,1+\alpha,\alpha)$, unde $\alpha\in\mathbb{R}$ Cum $x_0+2y_0+3z_0=9\Leftrightarrow 1+\alpha+2(1+\alpha)+3\alpha=9\Leftrightarrow \alpha=1$, soluţia sistemului care verifică relaţia este $(2,2,1)$	**3p** **2p**
2.a)	$x*y=-2xy+10x+10y-50+5=$ $=-2x(y-5)+10(y-5)+5=-2(x-5)(y-5)+5$, pentru orice numere reale x şi y	**2p** **3p**

b)	$x*5=5*y=5$, pentru x şi y numere reale	**2p**
	$\left((1*2*3*4)*5\right)*6*7*8*9*10=5*(6*7*8*9*10)=5$	**3p**
c)	$-2(m-5)(n-5)+5=27\Leftrightarrow(m-5)(n-5)=-11$	**2p**
	Cum m şi n sunt numere naturale, obţinem $m=4$, $n=16$ sau $m=16$, $n=4$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=2x-\frac{8}{x}=$	**2p**
	$=\frac{2x^2-8}{x}=\frac{2(x-2)(x+2)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$	**3p**
b)	Cum $x\in(0,+\infty)$, $f'(x)=0\Leftrightarrow x=2$	**1p**
	$x\in(0,2]\Rightarrow f'(x)\le 0$, deci f este descrescătoare pe $(0,2]$	**2p**
	$x\in[2,+\infty)\Rightarrow f'(x)\ge 0$, deci f este crescătoare pe $[2,+\infty)$	**2p**
c)	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\left(x^2-8\ln x\right)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1-\frac{8\ln x}{x^2}\right)=+\infty$	**2p**
	Cum $f(2)<0$, ecuaţia $f(x)=0$ are două soluţii reale distincte	**3p**
2.a)	$\int_5^{10}(x-4)f(x)dx=\int_5^{10}\frac{1}{x}dx=\ln x\Big\vert_5^{10}=$	**3p**
	$=\ln 10-\ln 5=\ln 2$	**2p**
b)	$g(x)=\frac{1}{x-4}$, deci $V=\pi\int_5^6 g^2(x)dx=\pi\int_5^6\frac{1}{(x-4)^2}dx=$	**2p**
	$=\pi\left(-\frac{1}{x-4}\right)\Big\vert_5^6=\frac{\pi}{2}$	**3p**
c)	Pentru $n>4$, $\int_n^{n+1} f(x)dx=\int_n^{n+1}\frac{1}{x(x-4)}dx=\frac{1}{4}\int_n^{n+1}\left(\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x}\right)dx=\frac{1}{4}\ln\frac{n^2-3n}{n^2-3n-4}$	**2p**
	$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2\int_n^{n+1} f(x)dx\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(\left(1+\frac{4}{n^2-3n-4}\right)^{\frac{n^2-3n-4}{4}}\right)^{\frac{4n^2}{4(n^2-3n-4)}}=\ln e=1$	**3p**

Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_3 = 2016 + 2 \cdot 2 =$ $= 2020$	**3p** **2p**
2.	$f(1) = 2 \Rightarrow 1 + m = 2$ $m = 1$	**3p** **2p**
3.	$2^{4x-6} = \left(2^2\right)^{3x-4} \Leftrightarrow 4x - 6 = 6x - 8$ $x = 1$	**3p** **2p**
4.	Mulțimea A are 40 de elemente, deci sunt 40 de cazuri posibile Numerele din mulțimea A care conțin cifra 4 sunt 4, 14, 24, 34 și 40, deci sunt 5 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$	**1p** **2p** **2p**
5.	$y - 2 = \frac{5-2}{4-1}(x-1)$ $y = x + 1$	**3p** **2p**
6.	Cum $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, obţinem $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \frac{3}{5}$ $\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{24}{25}$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} =$ $= -2 + 0 + 0 - 1 - (-1) - 0 = -2$	**2p** **3p**
b)	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2(a-1)(a+1)$ Pentru orice număr real a, $a \neq -1$ și $a \neq 1$, obţinem $\det(A(a)) \neq 0$, deci matricea $A(a)$ este inversabilă	**3p** **2p**
c)	Sistemul are soluție unică, deci $a \neq -1$ și $a \neq 1$; pentru fiecare număr a, $a \neq -1$ și $a \neq 1$, soluția sistemului este de forma $\left(-\frac{1}{a-1}, \frac{1}{a-1}, 0\right)$ Cum a este număr întreg, $\frac{1}{a-1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a - 1$ este divizor al lui 1, deci $a = 0$ sau $a = 2$	**3p** **2p**

2.a)	$x\circ y=3xy+3x+3y+3-1=$	**3p**
	$=3x(y+1)+3(y+1)-1=3(x+1)(y+1)-1$, pentru orice numere reale x şi y	**2p**
b)	$f(x\circ y)=3(x\circ y)+3=3\big(3(x+1)(y+1)-1\big)+3=9(x+1)(y+1)=$	**3p**
	$=(3x+3)(3y+3)=f(x)f(y)$, pentru orice numere reale x şi y	**2p**
c)	$f\left(\underbrace{a\circ a\circ\ldots\circ a}_{\text{de 2016 ori } a}\right)=f\left(3^{2015}-1\right)\Leftrightarrow\left(f(a)\right)^{2016}=3\cdot\left(3^{2015}-1\right)+3\Leftrightarrow\left(f(a)\right)^{2016}=3^{2016}\Leftrightarrow f(a)=-3$	**3p**
	sau $f(a)=3$ $a=-2$ sau $a=0$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	Cum $x\in(1,+\infty)$, $f(x)=\ln(x+1)-\ln(x-1)\Rightarrow f'(x)=\big(\ln(x+1)-\ln(x-1)\big)'=$	**2p**
	$=\big(\ln(x+1)\big)'-\big(\ln(x-1)\big)'=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}$	**3p**
b)	$f''(x)=\dfrac{4x}{(x-1)^2(x+1)^2}$	**2p**
	Pentru orice $x\in(1,+\infty)$, $f''(x)>0$, deci funcţia f este convexă pe $(1,+\infty)$	**3p**
c)	$\lim\limits_{n\to+\infty}\big(f'(2)+f'(3)+\ldots+f'(n)\big)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{1}\right)+\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n-1}\right)\right)=$	**3p**
	$=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}\right)=-\dfrac{3}{2}$	**2p**
2.a)	$\int_1^2\sqrt{x}f(x)\,dx=\int_1^2(x+1)\,dx=\left(\dfrac{x^2}{2}+x\right)\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=4-\dfrac{3}{2}=\dfrac{5}{2}$	**2p**
b)	$\int_1^{e^2}\left(f(x)-\sqrt{x}\right)\ln x\,dx=\int_1^{e^2}\dfrac{1}{\sqrt{x}}\cdot\ln x\,dx=2\sqrt{x}\cdot\ln x\Big\vert_1^{e^2}-2\int_1^{e^2}\dfrac{1}{\sqrt{x}}\,dx=$	**3p**
	$=\left(2\sqrt{x}\cdot\ln x-4\sqrt{x}\right)\Big\vert_1^{e^2}=4e-4e+4=4$	**2p**
c)	$V=\pi\int_1^a g^2(x)\,dx=\pi\int_1^a\left(x+2+\dfrac{1}{x}\right)dx=\pi\left(\dfrac{x^2}{2}+2x+\ln x\right)\Big\vert_1^a=\pi\left(\dfrac{a^2}{2}+2a+\ln a-\dfrac{5}{2}\right)$	**3p**
	$\pi\left(\dfrac{a^2}{2}+2a+\ln a-\dfrac{5}{2}\right)=\pi\left(\ln a+\dfrac{7}{2}\right)\Leftrightarrow a^2+4a-12=0$ şi, cum $a>1$, obţinem $a=2$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2016
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$24+a=2\cdot 1020$ $a=2016$	**3p** **2p**
2.	$\Delta=16-4m$ $16-4m=0\Rightarrow m=4$	**3p** **2p**
3.	$\left(3^{-1}\right)^{2x-3}=3^3\Leftrightarrow -2x+3=3$ $x=0$	**3p** **2p**
4.	Mulțimea A are 25 de elemente, deci sunt 25 de cazuri posibile Sunt 5 numere raționale în mulțimea A, deci sunt 5 cazuri favorabile $p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{5}{25}=\dfrac{1}{5}$	**1p** **2p** **2p**
5.	$d\perp BC\Rightarrow m_d\cdot m_{BC}=-1$ și, cum $m_{BC}=1$, obținem $m_d=-1$ Deoarece $A\in d$, ecuația dreptei d este $y-y_A=m_d\left(x-x_A\right)$, adică $y=-x+1$	**2p** **3p**
6.	$\dfrac{BC}{\sin A}=2R\Rightarrow R=\dfrac{2\sqrt{2}}{2\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=$ $=2$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&-1&1\\1&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(A(0)\right)=\begin{vmatrix}1&0&0\\1&-1&1\\1&1&0\end{vmatrix}=$ $=0+0+0-0-1-0=-1$	**2p** **3p**
b)	$\det\left(A(a)\right)=\begin{vmatrix}1&a&a^2\\1&-1&1\\1&1&-a\end{vmatrix}=(3a-1)(a+1)$ Pentru orice număr real a, $a\neq -1$ și $a\neq\dfrac{1}{3}$, obţinem $\det\left(A(a)\right)\neq 0$, deci matricea $A(a)$ este inversabilă	**2p** **3p**
c)	Sistemul are soluție unică, deci $a\neq -1$ și $a\neq\dfrac{1}{3}$; pentru fiecare număr real a, $a\neq -1$ și $a\neq\dfrac{1}{3}$, obținem $x_0=\dfrac{-4a}{(3a-1)(a+1)}$ și $y_0=\dfrac{2(2-3a)}{3a-1}$ Cum $x_0=y_0\Leftrightarrow 3a^2-a-2=0$, obținem $a=-\dfrac{2}{3}$ sau $a=1$	**2p** **3p**

2.a)	$x*y=-xy+2x+2y-4+2=$	**2p**
	$=-x(y-2)+2(y-2)+2=2-(x-2)(y-2)$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
b)	$x*x=2-(x-2)^2$	**2p**
	$2-(x-2)^2=1\Leftrightarrow(x-2)^2=1\Leftrightarrow x=1$ sau $x=3$	**3p**
c)	Cum $m*n*p=2+(m-2)(n-2)(p-2)$, obținem $(m-2)(n-2)(p-2)=0$	**2p**
	$m=2$ sau $n=2$ sau $p=2$, deci produsul numerelor m, n și p este divizibil cu 2	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(e^x\right)'+(\ln x)'+1'=$	**2p**
	$=e^x+\frac{1}{x}+0=e^x+\frac{1}{x}$, $x\in(0,+\infty)$	**3p**
b)	$f(1)=e+1$, $f'(1)=e+1$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)$, adică $y=(e+1)x$	**3p**
c)	$f'(x)>0$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci f este strict crescătoare pe $(0,+\infty)$	**2p**
	Cum $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(e^x+\ln x+1\right)=-\infty$, $f(1)>0$ și f este continuă, atunci ecuația $f(x)=0$ are soluție unică în intervalul $(0,1)$	**3p**
2.a)	$I_0=\int_0^1\frac{x}{x+3}dx=\int_0^1\left(1-\frac{3}{x+3}\right)dx=\left(x-3\ln(x+3)\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=1-3\ln4+3\ln3=1+3\ln\frac{3}{4}$	**2p**
b)	$I_{n+1}+3I_n=\int_0^1\frac{x^{n+2}+3x^{n+1}}{x+3}dx=\int_0^1\frac{x^{n+1}(x+3)}{x+3}dx=\int_0^1x^{n+1}dx=$	**3p**
	$=\frac{x^{n+2}}{n+2}\Big\vert_0^1=\frac{1}{n+2}$, pentru orice număr natural n	**2p**
c)	$nI_n=n\int_0^1\frac{x^{n+1}}{x+3}dx=\int_0^1\left(x^n\right)'\frac{x^2}{x+3}dx=x^n\cdot\frac{x^2}{x+3}\Big\vert_0^1-\int_0^1x^n\cdot\frac{x^2+6x}{(x+3)^2}dx=\frac{1}{4}-\int_0^1x^n\left(1-\frac{9}{(x+3)^2}\right)dx$ pentru orice număr natural nenul n	**2p**
	Cum $0\le\int_0^1x^n\left(1-\frac{9}{(x+3)^2}\right)dx\le\int_0^1x^ndx=\frac{1}{n+1}$ pentru orice număr natural nenul n, obținem $\lim\limits_{n\to+\infty}nI_n=\frac{1}{4}$	**3p**

Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(\sqrt{2}-3\right)^2=11-6\sqrt{2}$	**2p**
	$\left(\sqrt{2}+3\right)^2=11+6\sqrt{2}\Rightarrow\left(\sqrt{2}-3\right)^2+\left(\sqrt{2}+3\right)^2=11-6\sqrt{2}+11+6\sqrt{2}=22$	**3p**
2.	$f(-1)=0$	**3p**
	$f(-1)f(0)f(1)=0$	**2p**
3.	$x^2-6x+6=1\Rightarrow x^2-6x+5=0$	**2p**
	$x=1$ sau $x=5$, care verifică ecuația dată	**3p**
4.	Cifra unităților este 8	**2p**
	Cum cifrele sunt distincte, cifra zecilor poate fi aleasă în 3 moduri și, pentru fiecare alegere a acesteia, cifra sutelor poate fi aleasă în câte 2 moduri, deci se pot forma $3\cdot2\cdot1=6$ astfel de numere	**3p**
5.	$m_{AB}=1$ și $m_d=m_{AB}\Rightarrow m_d=1$	**3p**
	Ecuația dreptei d este $y=x$	**2p**
6.	$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=\sin\left(3\pi-\frac{3\pi}{2}-x\right)=\sin\left(3\pi-\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\right)=\sin\left(\pi-\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\right)=\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$	**3p**
	$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=0$, pentru orice număr real x	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A(1)\right)=\begin{vmatrix}1&1&2\\0&1&2\\0&0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1+0+0-0-0-0=1$	**3p**
b)	$A(x)A(y)=\begin{pmatrix}1&x&x^2+x\\0&1&2x\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&y&y^2+y\\0&1&2y\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&y+x&y^2+y+2xy+x^2+x\\0&1&2y+2x\\0&0&1\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1&x+y&(x+y)^2+(x+y)\\0&1&2(x+y)\\0&0&1\end{pmatrix}=A(x+y)$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
c)	$A\left(\frac{1}{1\cdot2}\right)A\left(\frac{1}{2\cdot3}\right)\cdot\ldots\cdot A\left(\frac{1}{2016\cdot2017}\right)=A\left(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\ldots+\frac{1}{2016\cdot2017}\right)=$	**3p**
	$=A\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2016}-\frac{1}{2017}\right)=A\left(\frac{2016}{2017}\right)$	
	$A\left(\frac{2016}{2017}\right)=A\left(\frac{a}{a+1}\right)\Leftrightarrow a=2016$	**2p**

2.a)	$f(1)=0 \Leftrightarrow 1^4+m\cdot 1^2+2=0$	**2p**
	$m=-3$	**3p**
b)	$x_1+x_2+x_3+x_4=0$	**2p**
	$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_1x_4+2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4=(x_1+x_2+x_3+x_4)^2=0$, pentru orice număr real m	**3p**
c)	$f=X^4+3X^2+2=\left(X^2+1\right)\left(X^2+2\right)$	**3p**
	Polinoamele X^2+1 și X^2+2 au coeficienți reali, au gradul 2 și nu au rădăcini reale, deci sunt ireductibile în $\mathbb{R}[X]$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\dfrac{x\cdot 2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=$	**3p**
	$=\dfrac{x^2+1-x^2}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f(0)=0$, $f'(0)=1$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)$, adică $y=x$	**3p**
c)	$f'(x)>0$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$, deci f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$	**2p**
	Cum $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{-x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=-1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=1$ și funcția f este continuă, atunci pentru orice $a\in(-1,1)$, ecuația $f(x)=a$ are soluție unică	**3p**
2.a)	$\int_0^2 f(x)e^{-x}dx=\int_0^2 e^x(x-1)e^{-x}dx=\int_0^2(x-1)dx=\left(\dfrac{x^2}{2}-x\right)\Big\vert_0^2=$	**3p**
	$=\dfrac{4}{2}-2=0$	**2p**
b)	$\mathcal{A}=\int_1^2\lvert f(x)\rvert dx=\int_1^2(x-1)e^x dx=(x-2)e^x\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=0-(-1)e=e$	**2p**
c)	$\int_{-n}^1\left(f(x)+e^x\right)dx=\int_{-n}^1 xe^x dx=(x-1)e^x\Big\vert_{-n}^1=(n+1)e^{-n}$	**3p**
	$\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{-n}^1\left(f(x)+e^x\right)dx=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n+1}{e^n}=0$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2016

Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$7+x^2+2=2\cdot 3x$	**3p**
	$x^2-6x+9=0\Leftrightarrow x=3$	**2p**
2.	$\Delta=0\Leftrightarrow 4-4m=0$	**3p**
	$m=1$	**2p**
3.	$\left(2^{-1}\right)^{4x-9}=2^{5x}\Leftrightarrow -4x+9=5x$	**3p**
	$x=1$	**2p**
4.	Mulţimea A are $C_6^0+C_6^1+C_6^2+C_6^3+C_6^4+C_6^5+C_6^6=2^6=64$ de submulţimi, deci sunt 64 de cazuri posibile	**2p**
	Mulţimea A are $C_6^0+C_6^1+C_6^2=1+6+15=22$ de submulţimi cu cel mult două elemente, deci sunt 22 de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{22}{64}=\dfrac{11}{32}$	**1p**
5.	Punctul $M(1,2)$ este mijlocul laturii BC	**1p**
	$m_{AM}=\dfrac{2-0}{1-(-1)}=1$	**2p**
	Ecuaţia dreptei care trece prin punctul B şi este paralelă cu dreapta AM este $y=x-1$	**2p**
6.	$\dfrac{BC}{\sin A}=2R\Rightarrow R=\dfrac{\sqrt{2}}{2\sin\dfrac{3\pi}{4}}=$	**3p**
	$=1$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(10)=\begin{pmatrix}1&10&0\\0&1&0\\0&0&2^{10}\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(A(10)\right)=\begin{vmatrix}1&10&0\\0&1&0\\0&0&2^{10}\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=2^{10}=1024$	**3p**
b)	$A(x)\cdot A(2x)=A(3x)$	**2p**
	$A(3x)=A\left(x^2+2\right)\Leftrightarrow x^2-3x+2=0\Leftrightarrow x_1=1$ şi $x_2=2$	**3p**
c)	Deoarece $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, pentru orice numere reale x şi y, obţinem $A(n)=$ $=A(1)\cdot A(2)\cdot A(3)\cdot\ldots\cdot A(2016)=A(1+2+3+\ldots+2016)=A(2017\cdot 1008)$	**3p**
	$n=2017\cdot 1008$, deci n este număr natural divizibil cu 2017	**2p**

2.a)	$f(0)=0^3-5\cdot 0+a=$	**3p**
	$=0-0+a=a$	**2p**
b)	$x_1+x_2+x_3=0$, $x_1^3+x_2^3+x_3^3=5(x_1+x_2+x_3)-3a=-3a$	**3p**
	$-3a=2016-4a\Leftrightarrow a=2016$	**2p**
c)	Presupunem că f are cel puțin două rădăcini întregi x_1 și x_2; cum $x_1+x_2+x_3=0\Rightarrow x_3\in\mathbb{Z}$	**1p**
	Știind că $x_1^2+x_2^2+x_3^2=10$, dacă $x_1^2\geq x_2^2\geq x_3^2$, obținem $x_1^2=9$, $x_2^2=1$ și $x_3^2=0$	**2p**
	Deoarece pentru valorile pe care le obținem pentru x_1, x_2 și x_3, relația $x_1+x_2+x_3=0$ nu este verificată, polinomul f are cel mult o rădăcină întreagă	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(e^x\right)'-\left(\frac{1}{2}x^2\right)'-x'-1'=$	**2p**
	$=e^x-\frac{1}{2}\cdot 2x-1=e^x-x-1$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	Aplicând succesiv teorema lui l'Hospital, obținem $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x-x-1}{e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{e^x-x-1}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x-1}=1$	**2p**
c)	$f''(x)=e^x-1>0$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci f' strict crescătoare pe $(0,+\infty)$ și cum $f'(0)=0$, obținem $f'(x)>0$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci f strict crescătoare pe $(0,+\infty)$	**3p**
	$0<2\sqrt{3}<3\sqrt{2}\Rightarrow f\left(2\sqrt{3}\right)<f\left(3\sqrt{2}\right)$	**2p**
2.a)	$I_1=\int_0^1\left(1-x^2\right)dx=\left.\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\right\|_0^1=$	**3p**
	$=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$	**2p**
b)	$I_{n+1}-I_n=\int_0^1\left(-x^2\right)\left(1-x^2\right)^n dx$, pentru orice număr natural nenul n	**2p**
	Pentru orice număr natural nenul n și $x\in[0,1]$ avem $-x^2\leq 0$ și $\left(1-x^2\right)^n\geq 0$, deci $I_{n+1}\leq I_n$	**3p**
c)	$I_{n+1}=\int_0^1 x'\left(1-x^2\right)^{n+1}dx=x\left(1-x^2\right)^{n+1}\left\|_0^1-\int_0^1 x(n+1)\left(1-x^2\right)^n(-2x)dx=\right.$	**2p**
	$=2(n+1)\int_0^1 x^2\left(1-x^2\right)^n dx=-2(n+1)\int_0^1\left(1-x^2-1\right)\left(1-x^2\right)^n dx=-2(n+1)\left(I_{n+1}-I_n\right)$, deci $(2n+3)I_{n+1}=2(n+1)I_n$, pentru orice număr natural nenul n	**3p**

Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 01

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați al patrulea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1=1$ și $a_2=4$.

5p **2.** Determinați numărul real a, știind că punctul $A(1,a)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+4$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $9^{x-2}=3^{2-x}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie mai mic sau egal cu 30.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(0,3)$. Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul A și are panta egală cu 1.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, cu $AB=10$, $AC=10$ și $BC=12$. Arătați că $\sin B=\frac{4}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}-m & 1 & 1\\ 1 & -m & 1\\ 1 & 1 & -m\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}-mx+y+z=-1\\ x-my+z=-1\\ x+y-mz=m\end{cases}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=2$.

5p **b)** Demonstrați că matricea $A(m)$ este inversabilă, pentru orice număr real m, $m\neq -1$ și $m\neq 2$.

5p **c)** Pentru $m=2$, determinați soluția (x_0,y_0,z_0) a sistemului pentru care $x_0+2y_0+3z_0=9$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=-2xy+10x+10y-45$.

5p **a)** Arătați că $x*y=-2(x-5)(y-5)+5$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Arătați că $1*2*3*4*5*6*7*8*9*10=5$.

5p **c)** Determinați numerele naturale m și n, pentru care $m*n=27$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-8\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{2(x-2)(x+2)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

5p **c)** Demonstrați că ecuația $f(x)=0$ are două soluții reale distincte.

2. Se consideră funcția $f:(4,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x(x-4)}$.

5p **a)** Arătați că $\int_5^{10}(x-4)f(x)dx=\ln 2$.

5p **b)** Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[5,6]\to\mathbb{R}$, $g(x)=xf(x)$.

5p **c)** Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2\int_n^{n+1}f(x)dx\right)=1$.

Examenul de bacalaureat naţional 2016
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați al treilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1=2016$ și rația $r=2$.

5p **2.** Determinați numărul real m, știind că punctul $A(1,2)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+m$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{4x-6}=4^{3x-4}$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea $A=\{1,2,3,\ldots,40\}$, acesta să conţină cifra 4.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,2)$ și $B(4,5)$. Determinaţi ecuaţia dreptei AB.

5p **6.** Dacă $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\sin x=\frac{4}{5}$, arătați că $\sin 2x=\frac{24}{25}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & 1 & -1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+ay+z=1\\ ax+y-z=-1\\ x+y-2z=0\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=-2$.

5p **b)** Demonstrați că matricea $A(a)$ este inversabilă, pentru orice număr real a, $a\neq -1$ și $a\neq 1$.

5p **c)** Determinați numerele întregi a, pentru care sistemul are soluție unică (x_0,y_0,z_0), iar x_0, y_0 și z_0 sunt numere întregi.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=3xy+3x+3y+2$.

5p **a)** Arătați că $x\circ y=3(x+1)(y+1)-1$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+3$. Demonstrați că $f(x\circ y)=f(x)f(y)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale a, pentru care $\underbrace{a\circ a\circ\ldots\circ a}_{\text{de 2016 ori } a}=3^{2015}-1$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\frac{x+1}{x-1}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este convexă pe $(1,+\infty)$.

5p **c)** Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f'(2)+f'(3)+f'(4)+\ldots+f'(n)\right)=-\frac{3}{2}$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2\sqrt{x}\,f(x)\,dx=\frac{5}{2}$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^{e^2}\left(f(x)-\sqrt{x}\right)\ln x\,dx=4$.

5p **c)** Determinați numărul real a, $a>1$, știind că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,a]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$ este egal cu $\pi\left(\ln a+\frac{7}{2}\right)$.

Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați numărul real a, știind că numerele 24, 1020 și a sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **2.** Determinați numărul real m, știind că parabola asociată funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+4x+m$ este tangentă axei Ox.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3}=27$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\left\{\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},\ldots,\sqrt{25}\right\}$, acesta să fie număr rațional.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,1)$, $B(-2,-1)$ și $C(2,3)$. Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul A și este perpendiculară pe dreapta BC.

5p **6.** Calculați lungimea razei cercului circumscris unui triunghi ABC, în care $m(\sphericalangle A)=45^\circ$ și $BC=2\sqrt{2}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -a\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+ay+a^2z=0\\ x-y+z=2\\ x+y-az=-4\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=-1$.

5p **b)** Demonstrați că matricea $A(a)$ este inversabilă, pentru orice număr real a, $a\neq -1$ și $a\neq\frac{1}{3}$.

5p **c)** Determinați numerele reale a, pentru care sistemul are soluție unică (x_0,y_0,z_0), iar $x_0=y_0$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=-xy+2x+2y-2$.

5p **a)** Arătați că $x*y=2-(x-2)(y-2)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numerele reale x, pentru care $x*x=1$.

5p **c)** Demonstrați că, dacă m, n și p sunt numere întregi astfel încât $m*n*p=2$, atunci produsul numerelor m, n și p este divizibil cu 2.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+\ln x+1$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=e^x+\frac{1}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că ecuația $f(x)=0$ are soluție unică în intervalul $(0,1)$.

2. Pentru fiecare număr natural n, se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+3} dx$.

5p **a)** Arătaţi că $I_0 = 1 + 3\ln\frac{3}{4}$.

5p **b)** Demonstraţi că $I_{n+1} + 3I_n = \frac{1}{n+2}$, pentru orice număr natural n.

5p **c)** Arătaţi că $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n = \frac{1}{4}$.

Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\left(\sqrt{2}-3\right)^2+\left(\sqrt{2}+3\right)^2=22$.

5p **2.** Calculați produsul $f(-1)f(0)f(1)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+2$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3\left(x^2-6x+6\right)=\log_3 1$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale pare, de trei cifre distincte, se pot forma cu cifrele 5, 7, 8 și 9.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,0)$ și $B(1,2)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul O și este paralelă cu dreapta AB.

5p **6.** Arătați că $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=0$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x & x^2+x\\ 0 & 1 & 2x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(1)\right)=1$.

5p **b)** Demonstrați că $A(x)A(y)=A(x+y)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numărul real a, $a\neq -1$, știind că $A\left(\frac{1}{1\cdot 2}\right)A\left(\frac{1}{2\cdot 3}\right)\cdot\ldots\cdot A\left(\frac{1}{2016\cdot 2017}\right)=A\left(\frac{a}{a+1}\right)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^4+mX^2+2$, unde m este număr real.

5p **a)** Determinați numărul real m, știind că $f(1)=0$.

5p **b)** Demonstrați că $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2\left(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4\right)=0$, pentru orice număr real m, unde x_1, x_2, x_3 și x_4 sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Pentru $m=3$, descompuneți polinomul f în factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice număr real a, $a\in(-1,1)$, ecuația $f(x)=a$ are soluție unică.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x(x-1)$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^2 f(x)e^{-x}dx=0$.

5p **b)** Demonstrați că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=1$ şi $x=2$ are aria egală cu e.

5p **c)** Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty}\int\limits_{-n}^{1}\left(f(x)+e^{x}\right)dx=0$.

Examenul de bacalaureat naţional 2016

Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinaţi numărul real x, ştiind că numerele 7, $3x$ şi x^2+2 sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **2.** Determinaţi numărul real m, ştiind că parabola asociată funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x+m$ este tangentă axei Ox.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x-9}=32^x$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând o submulţime a mulţimii $A=\left\{\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4},\sqrt{5},\sqrt{6}\right\}$, aceasta să aibă cel mult două elemente.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,0)$, $B(1,0)$ şi $C(1,4)$. Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul B şi este paralelă cu mediana din A a triunghiului ABC.

5p **6.** Calculaţi lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC în care $A=\frac{3\pi}{4}$ şi $BC=\sqrt{2}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2^x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\det(A(10))=1024$.

5p **b)** Determinaţi numerele reale x, ştiind că $A(x)\cdot A(2x)=A\left(x^2+2\right)$.

5p **c)** Ştiind că $A(n)=A(1)\cdot A(2)\cdot A(3)\cdot\ldots\cdot A(2016)$, demonstraţi că n este număr natural divizibil cu 2017.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-5X+a$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $f(0)=a$.

5p **b)** Determinaţi numărul real a pentru care $x_1^3+x_2^3+x_3^3=2016-4a$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Demonstraţi că polinomul f are cel mult o rădăcină în mulţimea numerelor întregi.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=e^x-x-1$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{f(x)}$.

5p **c)** Demonstraţi că $f\left(2\sqrt{3}\right)<f\left(3\sqrt{2}\right)$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \left(1-x^2\right)^n dx$.

5p **a)** Arătați că $I_1 = \frac{2}{3}$.

5p **b)** Demonstrați că $I_{n+1} \leq I_n$, pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Demonstrați că $(2n+3)I_{n+1} = 2(n+1)I_n$, pentru orice număr natural nenul n.

Examenul de bacalaureat naţional 2017
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z+\overline{z}+z\overline{z}=2+i+2-i+(2+i)(2-i)=$	**3p**
	$=4+4-i^2=9$	**2p**
2.	$f(1)=m\Rightarrow 1+2-3=m$	**3p**
	$m=0$	**2p**
3.	$1-\log_2 x=0$ sau $2-\log_2 x=0$	**3p**
	$x=2$ sau $x=4$, care convin	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Mulțimea numerelor naturale de două cifre, care au cifra zecilor strict mai mică decât cifra unităților are 36 de elemente, deci sunt 36 de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{36}{90}=\dfrac{2}{5}$	**1p**
5.	$M(3,2)$, unde punctul M este mijlocul segmentului AB	**3p**
	$CM=3$	**2p**
6.	$\left(1+\text{tg}^2 x\right)\cos^2 x-\left(1+\text{ctg}^2 x\right)\sin^2 x=\left(1+\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)\cos^2 x-\left(1+\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)\sin^2 x=$	**3p**
	$=\cos^2 x+\sin^2 x-\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=0$, pentru orice $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(9)=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&9\\-2&-1&3\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(9))=\begin{vmatrix}1&1&2\\1&2&9\\-2&-1&3\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=6+(-2)+(-18)-(-8)-(-9)-3=0$	**3p**
b)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix}1&1&2\\1&2&a\\-2&-1&3\end{vmatrix}=9-a$	**3p**
	Sistemul are soluție unică $\Leftrightarrow \det(A(a))\neq 0$, deci $a\in\mathbb{R}\setminus\{9\}$	**2p**
c)	Sistemul are soluția (x_0,y_0,z_0), cu x_0, y_0 și z_0 numere reale nenule, deci $a=9$ și soluția sistemului este de forma $(5\alpha,-7\alpha,\alpha)$, $\alpha\in\mathbb{R}$	**3p**
	$-x_0+y_0+z_0=-5\alpha+(-7\alpha)+\alpha=-11\alpha=11(5\alpha+(-7\alpha)+\alpha)=11(x_0+y_0+z_0)$	**2p**
2.a)	$x\circ y=xy+7x+7y+49-7=$	**2p**
	$=x(y+7)+7(y+7)-7=(x+7)(y+7)-7$, pentru orice numere reale x și y	**3p**

b)	$x\circ x=(x+7)^2-7$, deci $(x+7)^2-7=x$	**2p**
	$(x+7)(x+6)=0\Leftrightarrow x=-7$ sau $x=-6$	**3p**
c)	$\left(2017^a+7\right)(-6+7)-7=1\Leftrightarrow 2017^a+7-7=1$	**3p**
	$2017^a=1\Leftrightarrow a=0$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot(1-x)-\ln x\cdot(-1)}{(1-x)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{\frac{1-x}{x}+\ln x}{(1-x)^2}=\dfrac{1-x+x\ln x}{x(1-x)^2}$, $x\in(1,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{1-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{-1}=0$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcţiei f	**2p**
c)	$g:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=x\ln x-x+1\Rightarrow g'(x)=\ln x$, deci $g'(x)>0$ pentru orice $x\in(1,+\infty)$	**3p**
	Funcția g este strict crescătoare pe $(1,+\infty)$ și, cum $\lim\limits_{x\to1}g(x)=0$, obținem $g(x)>0$, deci $x\ln x>x-1$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_0^1\left(f(x)-3x^2\right)dx=\int_0^1\left(e^x+3x^2-3x^2\right)dx=\int_0^1e^x dx=$	**2p**
	$=e^x\Big\vert_0^1=e-1$	**3p**
b)	$\int_0^1 x\,f(x)\,dx=\int_0^1\left(xe^x+3x^3\right)dx=(x-1)e^x\Big\vert_0^1+\dfrac{3x^4}{4}\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=1\cdot e^0+\dfrac{3}{4}=\dfrac{7}{4}$	**2p**
c)	$g(x)=3x^2\Rightarrow\mathcal{A}=\int_0^n\lvert g(x)\rvert dx=\int_0^n3x^2\,dx=x^3\Big\vert_0^n=n^3$	**3p**
	$n^3=n^2-n+1\Leftrightarrow(n-1)\left(n^2+1\right)=0\Leftrightarrow n=1$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2017
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(-4)+(-3)+(-2)+(-1)+0+1+2+3+4=$	**3p**
	$=0$	**2p**
2.	$f(1)=0$	**2p**
	$(f\circ f)(1)=f\left(f(1)\right)=f(0)=-1$	**3p**
3.	$x+3=x^2-6x+9\Rightarrow x^2-7x+6=0$	**3p**
	$x=1$ care nu convine, $x=6$ care convine	**2p**
4.	În mulțimea A sunt 100 de numere, deci sunt 100 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea A sunt 9 numere care sunt multipli de 11, deci sunt 9 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{9}{100}$	**1p**
5.	$P\in Ox\Rightarrow y_P=0$	**2p**
	$PM=PN\Leftrightarrow(2-x_P)^2+(2-0)^2=(4-x_P)^2+(2-0)^2\Leftrightarrow x_P=3$	**3p**
6.	$\dfrac{AB}{\sin C}=2R\Rightarrow R=\dfrac{6\sqrt{2}}{2\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=$	**3p**
	$=6$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&1&2\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A(1)\right)=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&1&2\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=4+1+4-2-4-2=1$	**3p**
b)	$\det\left(A(x)\right)=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2^x&4^x\\1&x&2x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&2^x-1&4^x-1\\0&x-1&2x-1\end{vmatrix}=\left(2^x-1\right)\begin{vmatrix}1&2^x+1\\x-1&2x-1\end{vmatrix}=$	**3p**
	$=\left(2^x-1\right)\left(2x-1-x\cdot2^x+2^x-x+1\right)=\left(2^x-1\right)\left(2^x+x-x\cdot2^x\right)$, pentru orice număr real x	**2p**
c)	$A(1)+A(2)+A(3)+\ldots+A(2017)=\begin{pmatrix}2017&2017&2017\\2017&2^1+2^2+\ldots+2^{2017}&4^1+4^2+\ldots+4^{2017}\\2017&2017\cdot1009&2017\cdot2018\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}2017&2017&2017\\2017&\dfrac{2\left(2^{2017}-1\right)}{2-1}&\dfrac{4\left(4^{2017}-1\right)}{4-1}\\2017&2017\cdot1009&2017\cdot2018\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2017&2017&2017\\2017&2\left(2^{2017}-1\right)&\dfrac{4}{3}\left(4^{2017}-1\right)\\2017&2017\cdot1009&2017\cdot2018\end{pmatrix}$	**2p**

2.a)	$x*y=7xy+7x+7y+7-1=$ $=7x(y+1)+7(y+1)-1=7(x+1)(y+1)-1$, pentru orice numere reale x și y	**2p** **3p**
b)	$x*x*x=7^2(x+1)^3-1$, deci $7^2(x+1)^3-1=x$ $(x+1)\left(7^2(x+1)^2-1\right)=0\Leftrightarrow x=-\frac{8}{7}$ sau $x=-1$ sau $x=-\frac{6}{7}$	**2p** **3p**
c)	$49(a+1)(b+1)(c+1)-1=48\Leftrightarrow(a+1)(b+1)(c+1)=1$ Cum a, b și c sunt numere naturale, obținem $a+1=b+1=c+1=1$, deci $a=b=c$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{\left(x^2-3\right)'\cdot e^x-\left(x^2-3\right)\cdot\left(e^x\right)'}{\left(e^x\right)^2}=\frac{2xe^x-\left(x^2-3\right)e^x}{\left(e^x\right)^2}=$ $=\frac{e^x\left(2x-x^2+3\right)}{\left(e^x\right)^2}=\frac{-x^2+2x+3}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$	**3p** **2p**
b)	$f(-1)=-2e$, $f'(-1)=0$ Ecuația tangentei este $y-f(-1)=f'(-1)(x+1)$, adică $y=-2e$	**2p** **3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1$ sau $x=3$ $x\in[-1,3]\Rightarrow f'(x)\geq 0$, deci f este crescătoare pe $[-1,3]$ și $x\in[3,+\infty)\Rightarrow f'(x)\leq 0$, deci f este descrescătoare pe $[3,+\infty)$ Cum $f(-1)=-2e$, $f(3)=\frac{6}{e^3}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, obținem $-2e\leq f(x)\leq\frac{6}{e^3}$, pentru orice $x\in[-1,+\infty)$	**1p** **2p** **2p**
2.a)	$\int_1^2\frac{x+1}{\sqrt{x}}f(x)dx=\int_1^2\frac{x+1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2}dx=\int_1^2\frac{1}{x+1}dx=$ $=\ln(x+1)\Big\vert_1^2=\ln 3-\ln 2=\ln\frac{3}{2}$	**2p** **3p**
b)	F este o primitivă a funcției $f\Rightarrow F'(x)=f(x)$, $x\in(0,+\infty)$ $F'(x)=\frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2}>0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci F este strict crescătoare pe $(0,+\infty)$	**2p** **3p**
c)	$g(x)=\frac{x}{x+1}\Rightarrow\mathcal{A}=\int_1^2\lvert g(x)\rvert dx=\int_1^2\frac{x}{x+1}dx=x\Big\vert_1^2-\ln(x+1)\Big\vert_1^2=1-\ln\frac{3}{2}$ $1-\ln\frac{m+1}{m}=1-\ln\frac{3}{2}\Rightarrow m=2$	**3p** **2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2017
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$25-40i+16i^2+25+40i+16i^2=$	**3p**
	$=50+32i^2=50-32=18$	**2p**
2.	$f(x)=0\Leftrightarrow x^2-6x+8=0$	**3p**
	$x=2$ şi $x=4$	**2p**
3.	$x^2-x-2=(x-2)^2\Rightarrow x^2-x-2=x^2-4x+4\Rightarrow 3x=6$	**3p**
	$x=2$, care convine	**2p**
4.	Sunt 90 de numere naturale de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Numerele naturale de două cifre care au produsul cifrelor egal cu 9 sunt 19, 33 şi 91, deci sunt 3 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{3}{90}=\dfrac{1}{30}$	**1p**
5.	$x_B=\dfrac{x_A+x_M}{2}\Rightarrow x_M=2$	**3p**
	$y_B=\dfrac{y_A+y_M}{2}\Rightarrow y_M=5$	**2p**
6.	$\mathcal{A}_{ABCD}=AB\cdot BC\cdot\sin(\sphericalangle ABC)=6\cdot 3\cdot\sin 30^\circ=$	**3p**
	$=18\cdot\dfrac{1}{2}=9$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(1))=\begin{vmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+1+0-0-0-0=1$	**3p**
b)	$A(x)A(y)A(z)=\begin{pmatrix}0&0&x\\x&0&0\\0&x&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&y\\y&0&0\\0&y&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&z\\z&0&0\\0&z&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&xy&0\\0&0&xy\\xy&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&z\\z&0&0\\0&z&0\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}xyz&0&0\\0&xyz&0\\0&0&xyz\end{pmatrix}=xyz\,I_3$, pentru orice numere reale x, y şi z	**2p**

c)	$A(n)A(n)+A(n)+I_3=\begin{pmatrix}0&n^2&0\\0&0&n^2\\n^2&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&n\\n&0&0\\0&n&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&n^2&n\\n&1&n^2\\n^2&n&1\end{pmatrix}$	**2p**
	$\det\left(A(n)A(n)+A(n)+I_3\right)=\begin{vmatrix}1&n^2&n\\n&1&n^2\\n^2&n&1\end{vmatrix}=n^6-2n^3+1=\left(n^3-1\right)^2$, care este pătratul unui număr natural	**3p**
2.a)	$f(2)=0\Leftrightarrow 2^4+a\cdot 2^2+4=0$	**3p**
	$4a+20=0\Leftrightarrow a=-5$	**2p**
b)	$f=X^4-5X^2+4$; câtul este X^2-X-2	**3p**
	Restul este 0	**2p**
c)	$1-a+4=0\Rightarrow a=5$	**2p**
	$f=\left(X^2+1\right)\left(X^2+4\right)$, de unde obținem $x_1=i$, $x_2=-i$, $x_3=2i$ și $x_4=-2i$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\cdot\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}+1\right)=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\cdot\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f(0)=0$, $f'(0)=1$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)$, adică $y=x$	**3p**
c)	$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}=0$	**3p**
	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=-\infty$	**2p**
2.a)	$\int_0^1\left(e^x+1\right)f(x)\,dx=\int_0^1 e^x dx=e^x\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=e^1-e^0=e-1$	**2p**
b)	$\int_{-1}^{1}x\left(f(x)+f(-x)\right)dx=\int_{-1}^{1}x\left(1-\dfrac{1}{e^x+1}+1-\dfrac{1}{e^{-x}+1}\right)dx=$	**2p**
	$=\int_{-1}^{1}x\left(2-\dfrac{e^x+1}{e^x+1}\right)dx=\int_{-1}^{1}x\,dx=\dfrac{x^2}{2}\Big\vert_{-1}^{1}=0$	**3p**
c)	$\mathcal{A}=\int_0^1\left\vert f(x)\right\vert dx=\int_0^1\left(1-\dfrac{1}{e^x+1}\right)dx=\int_0^1\dfrac{e^x}{e^x+1}dx=\ln\left(e^x+1\right)\Big\vert_0^1=\ln\dfrac{e+1}{2}$	**3p**
	Cum $e<3\Rightarrow\dfrac{e+1}{2}<2$, obținem $\mathcal{A}<\ln 2$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2017
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$3z_1+2z_2=3(5+2i)+2(3-3i)=15+6i+6-6i=$	**3p**
	$=15+6=21$	**2p**
2.	$x+1=x^2-x+2\Leftrightarrow x^2-2x+1=0$	**2p**
	$x=1$	**3p**
3.	$3^{x^2+3}=3^{1+3x}\Leftrightarrow x^2+3=1+3x\Leftrightarrow x^2-3x+2=0$	**3p**
	$x=1$ sau $x=2$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Mulțimea numerelor naturale de două cifre, care sunt divizibile cu 3 și cu 5, are 6 elemente, deci sunt 6 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{6}{90}=\frac{1}{15}$	**1p**
5.	Ecuația dreptei AB este $y=x+2$	**2p**
	Punctul C aparține dreptei $AB\Leftrightarrow m=-2$	**3p**
6.	$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos A=16+64-2\cdot4\cdot8\cdot\frac{1}{2}=48$	**3p**
	$BC=4\sqrt{3}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2)=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-2&0&3\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(2))=\begin{vmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-2&0&3\end{vmatrix}=$	**3p**
	$=0+0+0-(-2)-0-0=2$	**2p**
b)	$A(x)A(-x)=\begin{pmatrix}2+x^2&0&-x^2-1\\0&1&0\\2+2x^2&0&-2x^2-1\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(x)A(-x))=\begin{vmatrix}2+x^2&0&-x^2-1\\0&1&0\\2+2x^2&0&-2x^2-1\end{vmatrix}=$	**3p**
	$=(x^2+2)(-2x^2-1)-(-x^2-1)(2x^2+2)=-x^2\le0$, pentru orice număr real x	**2p**
c)	$A(m)A(n)=\begin{pmatrix}2-mn&0&mn-1\\0&1&0\\2(1-mn)&0&2mn-1\end{pmatrix}=A(mn)$	**3p**
	$A(mn)=A(2)$, deci $mn=2$ și, cum m și n sunt numere naturale, obținem $m+n=3$	**2p**
2.a)	$f(1)=0\Leftrightarrow1^3+2\cdot1^2+a\cdot1+1=0$	**2p**
	$a=-4$	**3p**

b)	$f=X^3+2X^2+2X+1$ și câtul este $X+1$	**3p**
	Restul este 0	**2p**
c)	$x_1x_2x_3=-1$ și $\lvert x_1\rvert=\lvert x_2\rvert=\lvert x_3\rvert\Rightarrow\lvert x_1\rvert=\lvert x_2\rvert=\lvert x_3\rvert=1$	**2p**
	Cum f are cel puțin o rădăcină reală, una dintre rădăcini este egală cu -1 sau cu 1	**1p**
	Dacă $x_1=-1$, obținem $f(-1)=0$, deci $a=2$, ceea ce convine, deoarece $\lvert x_2\rvert=\lvert x_3\rvert=1$	**1p**
	Dacă $x_1=1$, obținem $f(1)=0$, deci $a=-4$, ceea ce nu convine, deoarece $\lvert x_2\rvert\neq\lvert x_3\rvert$	**1p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(e^x\right)'-1'-\left(\ln(x+2)\right)'=$	**2p**
	$=e^x-0-\dfrac{(x+2)'}{x+2}=e^x-\dfrac{1}{x+2}$, $x\in(-2,+\infty)$	**3p**
b)	$f''(x)=e^x+\dfrac{1}{(x+2)^2}$, $x\in(-2,+\infty)$	**2p**
	$f''(x)\geq 0$, deci funcția f este convexă pe $(-2,+\infty)$	**3p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+2)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+2}=0$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x-1}{x}-\dfrac{\ln(x+2)}{x}\right)=+\infty$	**1p**
2.a)	$\int_1^e x\,dx=\dfrac{x^2}{2}\Big\rvert_1^e=$	**3p**
	$=\dfrac{e^2}{2}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{e^2-1}{2}$	**2p**
b)	$x\in[1,e]\Rightarrow 0\leq\ln x\leq 1\Rightarrow\ln x-1\leq 0$	**2p**
	$I_{n+1}-I_n=\int_1^e x\ln^n x(\ln x-1)\,dx\leq 0$, deci $I_{n+1}\leq I_n$, pentru orice număr natural nenul n	**3p**
c)	$I_{n+1}=\int_1^e x\ln^{n+1}x\,dx=\dfrac{x^2}{2}\ln^{n+1}x\Big\rvert_1^e-\dfrac{n+1}{2}\int_1^e x\ln^n x\,dx=$	**3p**
	$=\dfrac{e^2}{2}-\dfrac{n+1}{2}I_n$, deci $2I_{n+1}+(n+1)I_n=e^2$, pentru orice număr natural nenul n	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2017
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2z_1-3z_2=2(2+3i)-3(1+2i)=$	**2p**
	$=4+6i-3-6i=1$	**3p**
2.	$x_1+x_2=3m$, $x_1x_2=2\Rightarrow x_1+x_2+x_1x_2+1=3m+3$	**3p**
	$3m+3=0\Leftrightarrow m=-1$	**2p**
3.	$\log_4\left((x+3)(x-3)\right)=2\Rightarrow x^2-9=4^2\Rightarrow x^2-25=0$	**3p**
	$x=-5$, care nu convine, $x=5$, care convine	**2p**
4.	Sunt 90 de numere naturale de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Numerele naturale de două cifre care au produsul cifrelor egal cu 6 sunt 16, 23, 32 şi 61, deci sunt 4 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{4}{90}=\dfrac{2}{45}$	**1p**
5.	$\dfrac{a}{3}=\dfrac{2}{-3}$	**3p**
	$a=-2$	**2p**
6.	$(\sin x-\cos x)^2+\sin 2x=\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x+2\sin x\cos x=$	**3p**
	$=\sin^2 x+\cos^2 x=1$, pentru orice număr real x	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(0))=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+0+1-1-0-1=-1$	**3p**
b)	$\det(A(x))=\begin{vmatrix}x&1&1\\x+1&1&1\\1&x&1\end{vmatrix}=x-1$, $\det(A(x+1))=x\Rightarrow(x-1)x=12$	**3p**
	$x=-3$ sau $x=4$	**2p**
c)	$A(2)=\begin{pmatrix}2&1&1\\3&1&1\\1&2&1\end{pmatrix}$, $\det(A(2))=1\neq 0$, $(A(2))^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-2&1&1\\5&-3&-1\end{pmatrix}$	**3p**
	$X=(A(2))^{-1}\cdot A(0)\Rightarrow X=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-4&2&1\end{pmatrix}$	**2p**
2.a)	$f(0)=0^3-(m+2)\cdot 0^2+(m^2+2)\cdot 0-1=$	**2p**
	$=0-0+0-1=-1$, pentru orice număr real m	**3p**

b)	$x_1+x_2+x_3=m+2$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=m^2+2\Rightarrow x_1^2+x_2^2+x_3^2=-m^2+4m$	**3p**
	$(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2=2\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=$ $=2\left(-m^2+4m-m^2-2\right)=-4(m-1)^2$, pentru orice număr real m	**2p**
c)	$x_1, x_2, x_3\in\mathbb{R}\Rightarrow x_1-x_2, x_2-x_3, x_3-x_1\in\mathbb{R}\Rightarrow (x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2\geq 0$, deci $(m-1)^2\leq 0$	**2p**
	$m=1$, caz în care toate rădăcinile polinomului f sunt numere reale	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(2e^x\right)'-\left(x^2\right)'-(2x)'-(2)'=$	**2p**
	$=2e^x-2x-2=2\left(e^x-x-1\right)$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$f(0)=0$, $f'(0)=0$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)$, adică $y=0$	**3p**
c)	$f''(x)=2\left(e^x-1\right)$, $x\in\mathbb{R}$	**1p**
	$x\in(-\infty,0]\Rightarrow f''(x)\leq 0$, deci f' este descrescătoare pe $(-\infty,0]$	**1p**
	$x\in[0,+\infty)\Rightarrow f''(x)\geq 0$, deci f' este crescătoare pe $[0,+\infty)$	**1p**
	$f'(x)\geq f'(0)$ și $f'(0)=0$ implică $f'(x)\geq 0$ pentru orice număr real x, deci funcția f este crescătoare pe $\mathbb{R}$	**2p**
2.a)	$\int_{-2}^{1}(x+2)^2\,dx=\left.\frac{(x+2)^3}{3}\right\vert_{-2}^{1}=$	**3p**
	$=\frac{3^3}{3}-0=9$	**2p**
b)	$\int_{0}^{1}(x+2)e^x\,dx=\left.(x+2)e^x\right\vert_{0}^{1}-\int_{0}^{1}e^x\,dx=3e-2-\left.e^x\right\vert_{0}^{1}=$	**3p**
	$=3e-2-e+1=2e-1$	**2p**
c)	$\mathcal{A}=\int_{-1}^{1}\vert f(x)\vert\,dx=\int_{-1}^{1}(x+2)^n\,dx=\left.\frac{(x+2)^{n+1}}{n+1}\right\vert_{-1}^{1}=\frac{3^{n+1}-1}{n+1}$	**3p**
	$\frac{3^{n+1}-1}{n+1}=\frac{242}{n+1}\Leftrightarrow 3^{n+1}=243\Leftrightarrow 3^{n+1}=3^5\Leftrightarrow n=4$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numărul complex $z=2+i$. Arătați că $z+\overline{z}+z\overline{z}=9$, unde $\overline{z}$ este conjugatul lui z.

5p **2.** Determinați numărul real m, știind că punctul $A(1,m)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x-3$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $(1-\log_2 x)(2-\log_2 x)=0$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra zecilor strict mai mică decât cifra unităților.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,1)$, $B(3,3)$ și $C(0,2)$. Determinați lungimea medianei din C a triunghiului ABC.

5p **6.** Arătați că $\left(1+\text{tg}^2 x\right)\cos^2 x-\left(1+\text{ctg}^2 x\right)\sin^2 x=0$, pentru orice $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & a\\ -2 & -1 & 3\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+y+2z=0\\ x+2y+az=0\\ -2x-y+3z=0\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(9))=0$.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui a pentru care sistemul are soluție unică.

5p **c)** Demonstrați că, dacă sistemul are soluția (x_0,y_0,z_0), cu x_0, y_0 și z_0 numere reale nenule, atunci $-x_0+y_0+z_0=11(x_0+y_0+z_0)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=xy+7x+7y+42$.

5p **a)** Arătați că $x\circ y=(x+7)(y+7)-7$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numerele reale x, știind că $x\circ x=x$.

5p **c)** Determinați numărul real a, știind că $2017^a\circ(-6)=1$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{1-x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{1-x+x\ln x}{x(1-x)^2}$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $x\ln x>x-1$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+3x^2$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1\left(f(x)-3x^2\right)dx=e-1$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 x\,f(x)\,dx=\frac{7}{4}$.

5p **c)** Determinați numărul natural nenul n, pentru care suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-e^x$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=n$ are aria egală cu n^2-n+1.

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați suma numerelor întregi din intervalul $(-5, 5)$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-1$. Calculați $(f\circ f)(1)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+3}=x-3$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{1, 2, 3,\ldots, 100\}$, acesta să fie multiplu de 11.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(2,2)$ și $N(4,2)$. Determinați coordonatele punctului P, situat pe axa Ox, astfel încât $PM=PN$.

5p **6.** Calculați lungimea razei cercului circumscris unui triunghi ABC, în care $AB=6\sqrt{2}$ și $C=\frac{\pi}{4}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2^x & 4^x\\ 1 & x & 2x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=1$.

5p **b)** Demonstrați că $\det(A(x))=\left(2^x-1\right)\left(2^x+x-x\cdot 2^x\right)$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Arătați că $A(1)+A(2)+A(3)+\ldots+A(2017)=\begin{pmatrix}2017 & 2017 & 2017\\ 2017 & 2\left(2^{2017}-1\right) & \frac{4}{3}\left(4^{2017}-1\right)\\ 2017 & 2017\cdot 1009 & 2017\cdot 2018\end{pmatrix}$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=7xy+7x+7y+6$.

5p **a)** Arătați că $x*y=7(x+1)(y+1)-1$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $x*x*x=x$.

5p **c)** Demonstrați că, dacă a, b și c sunt numere naturale astfel încât $a*b*c=48$, atunci numerele a, b și c sunt egale.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-3}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{-x^2+2x+3}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=-1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $-2e\le f(x)\le\frac{6}{e^3}$, pentru orice $x\in[-1,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{(x+1)^2}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_1^2 \frac{x+1}{\sqrt{x}} f(x)\,dx=\ln\frac{3}{2}$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă a funcţiei f este strict crescătoare pe intervalul $(0,+\infty)$.

5p **c)** Determinați numărul real m, $m>0$, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\sqrt{x}(x+1)f(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=2$ are aria egală cu $1-\ln\dfrac{m+1}{m}$.

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $(5-4i)^2+(5+4i)^2=18$, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-6x+8$. Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2-x-2}=x-2$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 9.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,1)$ și $B(2,3)$. Determinați coordonatele punctului M, știind că punctul B este mijlocul segmentului AM.

5p **6.** Calculați aria paralelogramului $ABCD$, știind că $AB=6$, $BC=3$ și $m(\sphericalangle ABC)=30°$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}0&0&x\\x&0&0\\0&x&0\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=1$.

5p **b)** Demonstrați că $A(x)A(y)A(z)=xyzI_3$, pentru orice numere reale x, y și z.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice număr natural nenul n, numărul $\det(A(n)A(n)+A(n)+I_3)$ este pătratul unui număr natural.

2. Se consideră polinomul $f=X^4+aX^2+4$, unde a este număr real.

5p **a)** Determinați numărul real a, știind că $f(2)=0$.

5p **b)** Pentru $a=-5$, determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul X^2+X-2.

5p **c)** Determinați rădăcinile polinomului f, știind că $f(i)=0$, unde $i^2=-1$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f, în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-\dfrac{1}{e^x+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1\left(e^x+1\right)f(x)\,dx=e-1$.

5p **b)** Arătaţi că $\int_{-1}^{1} x\left(f(x)+f(-x)\right)dx=0$.

5p **c)** Demonstraţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=1$ are aria mai mică decât $\ln 2$.

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numerele complexe $z_1 = 5+2i$ și $z_2 = 3-3i$. Arătați că $3z_1 + 2z_2 = 21$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2-x+2$. Determinați abscisa punctului de intersecție a graficelor celor două funcții.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x^2+3}=3\cdot 3^{3x}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 3 și cu 5.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,2)$, $B(2,4)$ și $C(m,0)$, unde m este număr real. Determinați numărul real m, știind că punctele A, B și C sunt coliniare.

5p **6.** Calculați lungimea laturii BC a triunghiului ABC, știind că $AB=4$, $AC=8$ și $A=\frac{\pi}{3}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} 2-x & 0 & x-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2(1-x) & 0 & 2x-1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(2))=2$.

5p **b)** Demonstrați că $\det(A(x)A(-x))\le 0$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Arătați că, dacă numerele naturale m și n verifică relația $A(m)A(n)=A(2)$, atunci $m+n=3$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+2X^2+aX+1$, unde a este număr real.

5p **a)** Determinați numărul real a, știind că $f(1)=0$.

5p **b)** Pentru $a=2$, calculați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul X^2+X+1.

5p **c)** Determinați numerele reale a pentru care rădăcinile polinomului f au modulele egale.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-1-\ln(x+2)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=e^x-\frac{1}{x+2}$, $x\in(-2,+\infty)$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este convexă pe $(-2,+\infty)$.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_1^e x\ln^n x\,dx$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^e x\,dx=\frac{e^2-1}{2}$.

5p **b)** Demonstrați că $I_{n+1}\le I_n$, pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Demonstrați că $2I_{n+1}+(n+1)I_n=e^2$, pentru orice număr natural nenul n.

Examenul de bacalaureat naţional 2017
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numerele complexe $z_1 = 2+3i$ și $z_2 = 1+2i$. Arătați că $2z_1 - 3z_2 = 1$.

5p **2.** Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2 - 3mx + 2 = 0$, unde m este număr real. Determinați numărul real m, știind că $x_1 + x_2 + x_1x_2 + 1 = 0$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_4(x+3) + \log_4(x-3) = 2$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 6.

5p **5.** Determinați numărul real a, pentru care vectorii $\vec{u} = a\vec{i} + 2\vec{j}$ și $\vec{v} = 3\vec{i} - 3\vec{j}$ sunt coliniari.

5p **6**. Arătați că $(\sin x - \cos x)^2 + \sin 2x = 1$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ x+1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0)) = -1$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $\det(A(x)) \cdot \det(A(x+1)) = 12$.

5p **c)** Determinați matricea $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pentru care $A(2) \cdot X = A(0)$.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 - (m+2)X^2 + (m^2+2)X - 1$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(0) = -1$, pentru orice număr real m.

5p **b)** Demonstrați că $(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 = -4(m-1)^2$, pentru orice număr real m, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Determinați numărul real m pentru care toate rădăcinile polinomului f sunt numere reale.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 2e^x - x^2 - 2x - 2$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x) = 2(e^x - x - 1)$, $x \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcției f, în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcţiei f.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = (x+2)^n$, unde n este număr natural nenul.

5p **a)** Arătați că $\int_{-2}^{1} (x+2)^2\,dx = 9$.

5p **b)** Pentru $n = 1$, arătați că $\int_0^1 f(x)e^x dx = 2e - 1$.

5p **c)** Determinaţi numărul natural nenul n pentru care suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = -1$ și $x = 1$ are aria egală cu $\frac{242}{n+1}$.

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z=a+bi$, $\overline{z}=a-bi\Rightarrow 2\overline{z}-z=a-3bi$, unde a și b sunt numere reale	**3p**
	$a-3bi=1-3i\Rightarrow a=1$ și $b=1$, deci $z=1+i$	**2p**
2.	$y_V=0\Leftrightarrow\Delta=0$	**3p**
	Cum $\Delta=m^2-4$, obținem $m^2-4=0$, deci $m=-2$ sau $m=2$	**2p**
3.	$2\lg x=\lg(x+2)\Rightarrow x^2-x-2=0$	**3p**
	$x=-1$, care nu convine, $x=2$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	Mulțimea numerelor naturale de două cifre, care au cifrele distincte și impare are 20 de elemente, deci sunt 20 de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{20}{90}=\dfrac{2}{9}$	**2p**
5.	Panta dreptei d este $m_d=1\Rightarrow$ panta unei drepte perpendiculare pe dreapta d este $m=-1$	**3p**
	Ecuația dreptei care trece prin punctul A și este perpendiculară pe dreapta d este $y=-x-3$	**2p**
6.	$\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos x+\cos\frac{\pi}{4}\sin x-\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x+\sin\frac{\pi}{4}\sin x\right)=$	**2p**
	$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos x+\sin x-\cos x-\sin x)=0$, pentru orice număr real x	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$M(0)=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow\det(M(0))=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+1+1-0-0-0=2$	**3p**
b)	$\det(M(m))=\begin{vmatrix}2m&1&1\\1&2m&1\\1&1&2m\end{vmatrix}=2(m+1)(2m-1)^2$, pentru orice număr real m	**3p**
	$m=-1$ sau $m=\dfrac{1}{2}$	**2p**
c)	$a-b=\dfrac{1}{3}$, $b-c=\dfrac{1}{3}$ și $a-c=\dfrac{2}{3}$	**3p**
	Deoarece $a-b\notin\mathbb{Z}$, $b-c\notin\mathbb{Z}$ și $a-c\notin\mathbb{Z}\Rightarrow$ cel mult unul dintre numerele a, b și c este întreg	**2p**
2.a)	$x*y=4xy+3x+3y+\dfrac{9}{4}-\dfrac{3}{4}=$	**2p**
	$=4x\left(y+\frac{3}{4}\right)+3\left(y+\frac{3}{4}\right)-\frac{3}{4}=4\left(x+\frac{3}{4}\right)\left(y+\frac{3}{4}\right)-\frac{3}{4}$, pentru orice numere reale x și y	**3p**

b)	$x*x=4\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{3}{4}$, $x*x*x=16\left(x+\frac{3}{4}\right)^3-\frac{3}{4}$, pentru orice număr real x	**2p**
	$16\left(x+\frac{3}{4}\right)^3-\frac{3}{4}=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left(x+\frac{3}{4}\right)^3=\frac{1}{64}$, de unde obținem $x=-\frac{1}{2}$	**3p**
c)	$4\left(ae^x-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\right)\cdot\left(ae^y-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\right)-\frac{3}{4}=ae^{x+y}-\frac{3}{4}$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
	$4a^2=a$, deci $a=0$ sau $a=\frac{1}{4}$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=16x-\frac{1}{x}=$	**3p**
	$=\frac{16x^2-1}{x}=\frac{(4x-1)(4x+1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$f(1)=8$, $f'(1)=15$, deci ecuaţia tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y=15x-7$	**3p**
	$15\cdot\frac{2}{3}-7=3$, deci punctul $A\left(\frac{2}{3},3\right)$ aparține tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcţiei f	**2p**
c)	$x\in\left(\frac{1}{4},+\infty\right)\Rightarrow f'(x)>0$, deci f este strict crescătoare pe $\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$	**2p**
	Cum $\frac{1}{4}<\frac{1}{3}<\frac{1}{\sqrt{7}}<\frac{1}{2}$, obținem $f\left(\frac{1}{3}\right)<f\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)<f\left(\frac{1}{2}\right)$	**3p**
2.a)	$\int_0^1(x+3)f(x)dx=\int_0^1(2x+3)dx=\left(x^2+3x\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=1+3-0=4$	**2p**
b)	$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{2x+3}{x+3}dx=\int_0^1\left(2-\frac{3}{x+3}\right)dx=2x\Big\vert_0^1-3\ln(x+3)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=2-3(\ln 4-\ln 3)=2-3\ln\frac{4}{3}$	**2p**
c)	$I_n=\int_0^1 e^x(2x+3)^n\,dx=e^x(2x+3)^n\Big\vert_0^1-2n\int_0^1 e^x(2x+3)^{n-1}\,dx=$	**3p**
	$=e\cdot 5^n-3^n-2nI_{n-1}$, deci $I_n+2nI_{n-1}=e\cdot 5^n-3^n$, pentru orice număr natural n, $n\geq 1$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2018
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z^2-2z+5=(1-2i)^2-2(1-2i)+5=$	**2p**
	$=1-4i+4i^2-2+4i+5=1-4-2+5=0$	**3p**
2.	$M(2,8)\in G_f \Rightarrow f(2)=8\Rightarrow 4+a=8\Rightarrow a=4$	**3p**
	$M(2,8)\in G_g \Rightarrow g(2)=8\Rightarrow 2b+2=8\Rightarrow b=3$	**2p**
3.	$\log_3(4x+5)=\log_3 3(x+3)\Rightarrow 4x+5=3x+9$	**3p**
	$x=4$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	Numărul numerelor naturale de două cifre, care au cifrele pare este egal cu 20, deci sunt 20 de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{20}{90}=\dfrac{2}{9}$	**2p**
5.	Punctul B este mijlocul segmentului AM, deci $M(6,0)$	**3p**
	$CM=10$	**2p**
6.	$\mathcal{A}_{ABCD}=2\mathcal{A}_{\Delta ABC}=AB\cdot AC\cdot\sin(\sphericalangle BAC)=6\cdot 10\cdot\sin\dfrac{\pi}{6}=$	**3p**
	$=6\cdot 10\cdot\dfrac{1}{2}=30$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$M(-1)=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(M(-1))=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&-1&1\\1&1&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=(-1)+0+1-(-1)-0-1=0$	**3p**
b)	$\det(M(a))=\begin{vmatrix}1&1&1\\a+1&-1&1\\1&1&-a\end{vmatrix}=(a+1)(a+2)$, pentru orice număr real a	**3p**
	$a=-2$ sau $a=-1$	**2p**
c)	Sistemul are soluție unică (x_0,y_0,z_0), deci $a\in\mathbb{R}\setminus\{-2,-1\}$ și soluția sistemului este $\left(\dfrac{2a}{(a+1)(a+2)},\dfrac{2a^2+3a+2}{(a+1)(a+2)},\dfrac{1}{a+1}\right)$	**2p**
	$\dfrac{4a}{(a+1)(a+2)}+\dfrac{2a^2+3a+2}{(a+1)^2(a+2)}=0\Leftrightarrow 6a^2+7a+2=0$, deci $a=-\dfrac{2}{3}$ sau $a=-\dfrac{1}{2}$, care convin	**3p**

2.a)	$x*y=\frac{1}{10}xy-x-y+10+10=$	**2p**
	$=\frac{1}{10}x(y-10)-(y-10)+10=\frac{1}{10}(x-10)(y-10)+10$, pentru orice numere reale x şi y	**3p**
b)	$\frac{1}{10}(x-10)^2+10\le\frac{101}{10}\Leftrightarrow(x-10)^2\le 1$	**3p**
	$x\in[9,11]$	**2p**
c)	$x*10=10$ şi $10*x=10$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\log_2 1*\log_2 2*\ldots*\log_2 2018=\left(\left(\log_2 1*\ldots*\log_2 1023\right)*10\right)*\log_2 1025*\ldots*\log_2 2018=$ $=10*\left(\log_2 1025*\ldots*\log_2 2018\right)=10$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=6x^2-6x+6-\frac{6}{x+1}=$	**3p**
	$=\frac{6x^3+6x^2-6x^2-6x+6x+6-6}{x+1}=\frac{6x^3}{x+1}$, $x\in(-1,+\infty)$	**2p**
b)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$	**1p**
	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(-1,0]$, deci f este descrescătoare pe $(-1,0]$ şi $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$, deci f este crescătoare pe $[0,+\infty)$	**2p**
	$f(x)\ge f(0)$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)$ şi, cum $f(0)=0$, valoarea minimă a funcţiei f este 0	**2p**
c)	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2}{x+1}=0$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{f(x)}}{\lvert x\rvert}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{f(x)}}{x}=0$	**3p**
2.a)	$\int_0^1 f(x)e^{-x}\,dx=\int_0^1\left(x^2+x+1\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right)\Big\rvert_0^1=$	**3p**
	$=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1-0=\frac{11}{6}$	**2p**
b)	$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcţiei $f\Rightarrow F'(x)=f(x)\Rightarrow F''(x)=\left(x^2+3x+2\right)e^x$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
	$F''(-2)=0$, $F''(-1)=0$, $F''(x)>0$ pentru orice $x\in(-\infty,-2)$, $F''(x)<0$ pentru orice $x\in(-2,-1)$ şi $F''(x)>0$ pentru orice $x\in(-1,+\infty)$, deci F are exact două puncte de inflexiune	**3p**
c)	$\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t f(x)\,dx=\lim\limits_{t\to 0}\frac{F(t)-F(0)}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{F'(t)}{1}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{t\to 0}f(t)=1$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2018
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left\|1-\sqrt{2}\right\|=\sqrt{2}-1,\ \left\|2-\sqrt{2}\right\|=2-\sqrt{2}$	**2p**
	$n=\sqrt{2}-1+2-\sqrt{2}=1\in\mathbb{N}$	**3p**
2.	$11-x\geq 1-11x\Leftrightarrow 10x\geq -10$	**3p**
	$x\in\left[-1,+\infty\right)$	**2p**
3.	$\left(3\cdot 2\right)^x\cdot 2=72\Leftrightarrow 6^x=36$	**3p**
	$x=2$	**2p**
4.	Cifra sutelor se poate alege în 5 moduri și, pentru fiecare alegere a cifrei sutelor, cifra zecilor se poate alege în 4 moduri	**2p**
	Pentru fiecare alegere a primelor două cifre, cifra unităților se poate alege în 3 moduri, deci se pot forma $5\cdot 4\cdot 3=60$ de numere	**3p**
5.	$AB=4$, $BC=2$	**2p**
	ΔABC este dreptunghic în B, deci $\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{2\cdot 4}{2}=4$	**3p**
6.	$A=\pi-\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{2}$	**2p**
	$R=\frac{BC}{2}=2$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&e^0\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(A(2)\right)=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=$	**3p**
	$=1+0+0-0-0-0=1$	**2p**
b)	$A(x)A(y)=\begin{pmatrix}1&y-2+x-2&0\\0&1&0\\0&0&e^{x-2}\cdot e^{y-2}\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1&x+y-4&0\\0&1&0\\0&0&e^{x+y-4}\end{pmatrix}=A\left(x+y-2\right)$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
c)	$A\left(1+2+\ldots+10-2\cdot 9\right)=A\left(m^2+m+17\right)\Leftrightarrow m^2+m-20=0$	**3p**
	$m=-5$ sau $m=4$	**2p**
2.a)	$f(1)=a+2$	**2p**
	$f(-1)=a-10\Rightarrow f(1)-f(-1)=a+2-a+10=12$	**3p**

b)	Polinomul f este divizibil cu polinomul $X-2 \Leftrightarrow f(2)=0$	**2p**
	$f(2)=a+2$, deci $a=-2$	**3p**
c)	$x_1+x_2+x_3=4$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=5$	**2p**
	$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$ și $x_1^2+x_2^2+x_3^2=6$, deci pătratele rădăcinilor sunt 1, 1 și 4; cum $x_1+x_2+x_3=4$, obținem rădăcinile 1, 1 și 2, deci $a=-2$, care convine	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x\sqrt{x}}\cdot\ln x+\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{x}=$	**3p**
	$=-\frac{\ln x}{2x\sqrt{x}}+\frac{1}{x\sqrt{x}}=\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	Tangenta la graficul funcției f în punctul $(a, f(a))$ este perpendiculară pe axa $Oy \Leftrightarrow f'(a)=0$	**3p**
	$2-\ln a=0 \Leftrightarrow a=e^2$	**2p**
c)	$f'(x)>0$, pentru orice $x\in(0,e^2)$, deci f este strict crescătoare pe $(0,e^2)$	**2p**
	$0<2<3<e^2 \Rightarrow f(2)<f(3) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\ln 2<\frac{1}{\sqrt{3}}\ln 3 \Rightarrow \sqrt{3}\ln 2<\sqrt{2}\ln 3$, deci $2^{\sqrt{3}}<3^{\sqrt{2}}$	**3p**
2.a)	$\int_0^3\left(4x-x^2\right)dx=\left(2x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big\|_0^3=$	**3p**
	$=18-9=9$	**2p**
b)	$\int_1^2\frac{2-x}{f(x)}dx=\int_1^2\frac{2-x}{4x-x^2}dx=\frac{1}{2}\ln\left(4x-x^2\right)\Big\|_1^2=$	**3p**
	$=\frac{1}{2}\ln 4-\frac{1}{2}\ln 3=\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$	**2p**
c)	$I_{n+1}-4I_n=\int_0^4 f^{n+1}(x)dx-4\int_0^4 f^n(x)dx=\int_0^4 f^n(x)\left(4x-x^2-4\right)dx=-\int_0^4 f^n(x)(x-2)^2dx$	**3p**
	$f(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[0,4] \Rightarrow f^n(x)(x-2)^2\geq 0$, deci $I_{n+1}-4I_n\leq 0 \Rightarrow I_{n+1}\leq 4I_n$, pentru orice număr natural nenul n	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2018

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$n=\log_3\left(\left(\sqrt{7}-2\right)\left(\sqrt{7}+2\right)\right)=\log_3\left(7-4\right)=$	**3p**
	$=\log_3 3=1\in\mathbb{N}$	**2p**
2.	$f\left(x\right)=g\left(x\right)\Leftrightarrow 2x-1=x^2+6x+3\Leftrightarrow x^2+4x+4=0$	**2p**
	Coordonatele sunt $x=-2$ şi $y=f\left(-2\right)=-5$	**3p**
3.	$\left(x+2\right)^3=\left(2-x\right)^3\Leftrightarrow x+2=2-x$	**3p**
	$x=0$	**2p**
4.	Cifra zecilor poate fi aleasă în 4 moduri	**2p**
	Pentru fiecare alegere a cifrei zecilor, cifra unităţilor se poate alege în 4 moduri, deci se pot forma $4\cdot 4=16$ numere	**3p**
5.	$NP=2$	**2p**
	Punctul P aparţine segmentului MN, deci $MP=MN-NP=1$	**3p**
6.	$\sin\left(\pi-x\right)=\sin x$, $\sin\left(\pi+x\right)=-\sin x$, $\sin\left(2\pi-x\right)=-\sin x$	**3p**
	$\sin x+\sin\left(\pi-x\right)+\sin\left(\pi+x\right)+\sin\left(2\pi-x\right)=\sin x+\sin x+\left(-\sin x\right)+\left(-\sin x\right)=0$, pentru orice număr real x	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A\left(2,3\right)=\begin{pmatrix}2&3&1\\1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A\left(2,3\right)\right)=\begin{vmatrix}2&3&1\\1&2&3\\2&1&3\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=12+1+18-4-6-9=12$	**3p**
b)	$\det\left(A\left(n^2,n\right)\right)=\begin{vmatrix}n^2&n&1\\1&n^2&n\\n^2&1&n\end{vmatrix}=\left(n^2+n+1\right)\begin{vmatrix}1&n&1\\1&n^2&n\\1&1&n\end{vmatrix}=\left(n^2+n+1\right)\begin{vmatrix}1&n&1\\0&n^2-n&n-1\\0&1-n&n-1\end{vmatrix}=$	**3p**
	$=\left(n^2+n+1\right)\left(n-1\right)^2\left(n+1\right)\geq 0$, pentru orice număr natural n	**2p**
c)	$B=\begin{pmatrix}x^2+x&1&x\\2x&x^2&1\\x^2+1&x&x\end{pmatrix}\Rightarrow B\cdot A\left(x,0\right)=A\left(x,0\right)\cdot B=\begin{pmatrix}x^3+2x^2+1&2x&x^2+x\\3x^2+x&x^3+1&2x\\x^3+x^2+2x&x^2+x&x^2+1\end{pmatrix}$	**3p**
	Inversa matricei B este matricea $A\left(x,0\right)\Leftrightarrow B\cdot A\left(x,0\right)=A\left(x,0\right)\cdot B=I_3$, deci $x=0$	**2p**
2.a)	$f\left(1\right)=n\cdot 1^n+1^2-n\cdot 1-1=$	**3p**
	$=n+1-n-1=0$, pentru orice număr natural n, $n\geq 3$	**2p**

b)	Pentru n număr natural impar, $n\geq 3$, $f(-1)=n\cdot(-1)^n+(-1)^2-n\cdot(-1)-1=0$, deci polinomul f este divizibil cu $X+1$	**2p**
	$f(1)=0\Rightarrow f$ este divizibil cu $X-1$, deci polinomul f este divizibil cu X^2-1	**3p**
c)	Dacă $\alpha\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ este o rădăcină a polinomului f care are coeficienții întregi, atunci $\alpha=\frac{1}{d}$, unde $d\in\mathbb{Z}^*\setminus\{\pm 1\}$ este un divizor al lui n	**1p**
	$f(\alpha)=0\Rightarrow \frac{n}{d^n}+\frac{1}{d^2}-\frac{n}{d}-1=0\Rightarrow d^{n-2}\left(d^2+nd-1\right)=n\Rightarrow d^{n-2}\vdots n$, deci $\lvert d\rvert^{n-2}\leq n$	**2p**
	Cum $\lvert d\rvert^{n-2}\geq 2^{n-2}>n$ pentru orice număr natural n, $n\geq 5$, obținem o contradicție, deci polinomul f nu are rădăcini în mulțimea $\mathbb{Q}-\mathbb{Z}$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=(\operatorname{arctg}x)'-(x)'=\frac{1}{x^2+1}-1=$	**2p**
	$=\frac{1-x^2-1}{x^2+1}=-\frac{x^2}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\operatorname{arctg}x}{x}-1\right)=-1$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}x-x+x\right)=\frac{\pi}{2}$, deci dreapta de ecuație $y=-x+\frac{\pi}{2}$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	**3p**
c)	$f(x)+g(x)=\operatorname{arctg}x+\operatorname{arcctg}x$, $x\in\mathbb{R}\Rightarrow\left(f(x)+g(x)\right)'=\frac{1}{x^2+1}+\frac{-1}{x^2+1}=0$, pentru orice număr real x	**3p**
	Cum $f(0)+g(0)=\frac{\pi}{2}$, obținem că $f(x)+g(x)=\frac{\pi}{2}$, pentru orice număr real x	**2p**
2.a)	$\int_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)dx=\int_0^1 e^{-x}dx=-e^{-x}\Big\rvert_0^1=$	**3p**
	$=-\frac{1}{e}+1=\frac{e-1}{e}$	**2p**
b)	F este o primitivă a funcției $f\Rightarrow F'(x)=f(x)$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
	$F''(x)=-2xe^{-x^2}<0$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci funcția F este concavă pe $(0,+\infty)$	**3p**
c)	$I_{n+1}-I_n=\int_{\frac{1}{n+1}}^{1}f(x)dx-\int_{\frac{1}{n}}^{1}f(x)dx=\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}}f(x)dx\geq 0$, deci $I_{n+1}\geq I_n$, pentru orice număr natural nenul n	**1p**
	$0\leq I_n=\int_{\frac{1}{n}}^{1}e^{-x^2}dx\leq\int_{\frac{1}{n}}^{1}1dx=1-\frac{1}{n}<1$, pentru orice număr natural nenul n	**3p**
	Șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este monoton și mărginit, deci șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este convergent	**1p**

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați numărul complex z, știind că $2\overline{z}-z=1-3i$, unde $\overline{z}$ este conjugatul lui z.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx+1$, unde m este număr real. Determinați numerele reale m, știind că vârful parabolei asociate funcției f se află pe axa Ox.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\dfrac{\lg x}{\lg(x+2)}=\dfrac{1}{2}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele distincte și impare.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(-5,2)$ și dreapta d de ecuație $y=x+1$. Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul A și este perpendiculară pe dreapta d.

5p **6.** Arătați că $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)=0$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $M(m)=\begin{pmatrix}2m & 1 & 1\\ 1 & 2m & 1\\ 1 & 1 & 2m\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}2mx+y+z=-1\\ x+2my+z=0\\ x+y+2mz=1\end{cases}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(M(0))=2$.

5p **b)** Determinați numerele reale m, știind că $\det(M(m))=0$.

5p **c)** Pentru $m=-1$, demonstrați că, dacă (a,b,c) este o soluție a sistemului, cel mult unul dintre numerele a, b și c este întreg.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=4xy+3x+3y+\dfrac{3}{2}$.

5p **a)** Demonstrați că $x*y=4\left(x+\dfrac{3}{4}\right)\left(y+\dfrac{3}{4}\right)-\dfrac{3}{4}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $x*x*x=-\dfrac{1}{2}$.

5p **c)** Determinați numerele reale a, știind că $f(x)*f(y)=f(x+y)$, pentru orice numere reale x și y, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ae^x-\dfrac{3}{4}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=8x^2-\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{(4x-1)(4x+1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Demonstrați că punctul $A\left(\dfrac{2}{3},3\right)$ aparține tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $f\left(\dfrac{1}{3}\right)<f\left(\dfrac{1}{\sqrt{7}}\right)<f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

2. Se consideră funcţia $f:(-3,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+3}{x+3}$.

5p **a)** Arătaţi că $\displaystyle\int_0^1 (x+3)\,f(x)\,dx=4$.

5p **b)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=2-3\ln\frac{4}{3}$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural n, se consideră numărul $I_n=\displaystyle\int_0^1 e^x(x+3)^n\left(f(x)\right)^n dx$. Demonstraţi că $I_n+2nI_{n-1}=e\cdot 5^n-3^n$, pentru orice număr natural n, $n\geq 1$.

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numărul complex $z=1-2i$. Arătați că $z^2-2z+5=0$.

5p **2.** Determinați numerele reale a și b, pentru care graficele funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+a$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=bx+2$ se intersectează în punctul $M(2,8)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(4x+5)=1+\log_3(x+3)$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele pare.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,2)$, $B(4,1)$ și $C(0,8)$. Determinați lungimea segmentului CM, știind că M este simetricul punctului A față de punctul B.

5p **6.** Calculați aria paralelogramului $ABCD$, știind că $AB=6$, $AC=10$ și $m(\sphericalangle BAC)=\frac{\pi}{6}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $M(a)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ a+1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -a\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+y+z=2\\ (a+1)x-y+z=0\\ x+y-az=1\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(M(-1))=0$.

5p **b)** Determinați numerele reale a pentru care $\det(M(a))=0$.

5p **c)** Determinați numerele reale a, știind că sistemul are soluție unică (x_0,y_0,z_0) și $2x_0+y_0z_0=0$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\frac{1}{10}xy-(x+y)+20$.

5p **a)** Demonstrați că $x*y=\frac{1}{10}(x-10)(y-10)+10$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui x pentru care $x*x\le\frac{101}{10}$.

5p **c)** Calculați $\log_2 1*\log_2 2*\log_2 3*\ldots*\log_2 2018$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^3-3x^2+6x-6\ln(x+1)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{6x^3}{x+1}$, $x\in(-1,+\infty)$.

5p **b)** Demonstrați că valoarea minimă a funcției f este 0.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{f(x)}}{x}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(x^2+x+1\right)e^x$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 f(x)e^{-x}\,dx=\frac{11}{6}$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f are exact două puncte de inflexiune.

5p **c)** Arătați că $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t f(x)\,dx=1$.

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că numărul $n=\left|1-\sqrt{2}\right|+\left|2-\sqrt{2}\right|$ este natural.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=11-x$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=1-11x$. Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $f(x)\geq g(x)$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^x\cdot 2^{x+1}=72$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma folosind doar cifre impare.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-3,3)$, $B(1,3)$ și $C(1,5)$. Calculați aria triunghiului ABC.

5p **6.** Calculați lungimea razei cercului circumscris ΔABC, știind că $BC=4$, $B=\frac{\pi}{3}$ și $C=\frac{\pi}{6}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x-2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & e^{x-2}\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(2))=1$.

5p **b)** Demonstrați că $A(x)A(y)=A(x+y-2)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale m pentru care $A(1)A(2)A(3)\cdot\ldots\cdot A(10)=A\left(m^2+m+17\right)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-4X^2+5X+a$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(1)-f(-1)=12$.

5p **b)** Determinați numărul real a, știind că polinomul f este divizibil cu polinomul $X-2$.

5p **c)** Determinați numărul real a, știind că toate rădăcinile polinomului f sunt numere întregi.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați abscisa punctului situat pe graficul funcției f, în care tangenta la graficul funcţiei f este perpendiculară pe axa Oy.

5p **c)** Demonstrați că $2^{\sqrt{3}}<3^{\sqrt{2}}$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x-x^2$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^3 f(x)\,dx=9$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^2 \frac{2-x}{f(x)}dx = \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n = \int_0^4 f^n(x)dx$. Demonstrați că $I_{n+1} \leq 4I_n$, pentru orice număr natural nenul n.

Examenul de bacalaureat naţional 2018
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătaţi că numărul $n=\log_3\left(\sqrt{7}-2\right)+\log_3\left(\sqrt{7}+2\right)$ este natural.

5p **2.** Determinaţi coordonatele punctului de intersecţie a graficelor funcţiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2+6x+3$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $(x+2)^3=(2-x)^3$.

5p **4.** Calculaţi câte numere naturale de două cifre distincte se pot forma cu elemente ale mulţimii $\{0,2,4,6,8\}$.

5p **5.** Punctele M, N şi P verifică relaţia $2\overrightarrow{MN}+3\overrightarrow{NP}=\vec{0}$. Calculaţi lungimea segmentului MP, ştiind că $MN=3$.

5p **6.** Arătaţi că $\sin x+\sin(\pi-x)+\sin(\pi+x)+\sin(2\pi-x)=0$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x,y)=\begin{pmatrix} x & y & 1\\ 1 & x & y\\ x & 1 & y\end{pmatrix}$, unde x şi y sunt numere reale.

5p **a)** Arătaţi că $\det(A(2,3))=12$.

5p **b)** Demonstraţi că $\det\left(A\left(n^2,n\right)\right)\geq 0$, pentru orice număr natural n.

5p **c)** Determinaţi numărul real x pentru care inversa matricei $B=A(x,0)\cdot A(x,0)$ este matricea $A(x,0)$.

2. Se consideră polinomul $f=nX^n+X^2-nX-1$, unde n este număr natural, $n\geq 3$.

5p **a)** Arătaţi că $f(1)=0$, pentru orice număr natural n, $n\geq 3$.

5p **b)** Arătaţi că, dacă n este număr natural impar, $n\geq 3$, atunci polinomul f este divizibil cu X^2-1.

5p **c)** Arătaţi că, pentru orice număr natural n, $n\geq 5$, polinomul f **nu** are rădăcini în mulţimea $\mathbb{Q}-\mathbb{Z}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg}x-x$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=-\dfrac{x^2}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

5p **c)** Demonstraţi că $f(x)+g(x)=\dfrac{\pi}{2}$, pentru orice număr real x, unde $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\operatorname{arcctg}x+x$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{-x^2}$.

5p **a)** Arătaţi că $\displaystyle\int_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)dx=\frac{e-1}{e}$.

5p **b)** Arătaţi că orice primitivă a funcţiei f este concavă pe $(0,+\infty)$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)dx$. Demonstraţi că şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

Examenul de bacalaureat naţional 2019
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$q=3\Rightarrow b_3=9$	**3p**
	$b_1+b_2+b_3=1+3+9=13$	**2p**
2.	$x_1+x_2=-m$, $x_1x_2=7$	**2p**
	$-2m+21=1$, deci $m=10$	**3p**
3.	$(x-2)(x+2)=2^5\Rightarrow x^2-36=0$	**3p**
	$x=-6$, care nu convine, $x=6$, care convine	**2p**
4.	Prima cifră se poate alege în 5 moduri	**1p**
	Pentru fiecare alegere a primei cifre, a doua cifră se poate alege în câte 4 moduri	**1p**
	Pentru fiecare alegere a primelor două cifre, a treia cifră se poate alege în câte 3 moduri, deci se pot forma $5\cdot4\cdot3=60$ de numere	**3p**
5.	Punctul M este mijlocul segmentului AB	**3p**
	$x_M=4$, $y_M=4$	**2p**
6.	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\dfrac{AB\cdot AC\cdot\sin\frac{2\pi}{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}\cdot4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=$	**3p**
	$=\dfrac{12\cdot3}{4}=9$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&-1\\1&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(0))=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&-1\\1&1&0\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+1+(-1)-0-0-0=0$	**3p**
b)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix}a&1&1\\1&-a&-1\\1&1&a\end{vmatrix}=-a^3+a=$	**3p**
	$=a(1-a^2)=a(1-a)(1+a)$, pentru orice număr real a	**2p**
c)	Pentru $a=0$, sistemul este compatibil nedeterminat și soluțiile sistemului sunt de forma $(1+\alpha,1-\alpha,\alpha)$, unde $\alpha\in\mathbb{R}$	**3p**
	Pentru orice α număr întreg, numerele $x_0=1+\alpha$, $y_0=1-\alpha$ și $z_0=\alpha$ sunt întregi	**2p**
2.a)	$x*2019=(x-2019)(2019-2019)+2019=$	**3p**
	$=0+2019=2019$, pentru orice număr real x	**2p**

b)	$x*x=(x-2019)^2+2019$, $(x*x)*x=(x-2019)^3+2019$	**2p**
	$(x-2019)^3+2019=x\Leftrightarrow(x-2019)\left((x-2019)^2-1\right)=0$, deci $x=2018$ sau $x=2019$ sau $x=2020$	**3p**
c)	$(m-2019)(n-2019)+2019=2020\Leftrightarrow(m-2019)(n-2019)=1$	**2p**
	Cum m şi n sunt numere întregi, obţinem $m=2018$, $n=2018$ sau $m=2020$, $n=2020$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=$	**3p**
	$=\frac{\sqrt{x}}{2x}-\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{x}-2}{2x}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$f(1)=1$, $f'(1)=-\frac{1}{2}$	**2p**
	Ecuaţia tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)$, adică $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$	**3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=4$	**1p**
	$x\in(0,4]\Rightarrow f'(x)\le 0$, deci f descrescătoare pe $(0,4]$ şi $x\in[4,+\infty)\Rightarrow f'(x)\ge 0$, deci f este crescătoare pe $[4,+\infty)$	**2p**
	Cum $f(4)=2-\ln 4$, obţinem $f(x)\ge 2-\ln 4$, deci $\sqrt{x}-\ln\frac{x}{4}\ge 2$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_0^1\left(x^2+9\right)f(x)\,dx=\int_0^1 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=\frac{1}{3}-0=\frac{1}{3}$	**2p**
b)	$F'(x)=f(x)=\frac{x^2}{x^2+9}$, $F''(x)=f'(x)=\frac{18x}{\left(x^2+9\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$, unde funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o primitivă a lui f	**2p**
	$F''(x)=0\Leftrightarrow x=0$	**1p**
	$x\in(-\infty,0)\Rightarrow F''(x)<0$ şi $x\in(0,+\infty)\Rightarrow F''(x)>0$, deci F are un singur punct de inflexiune	**2p**
c)	$x\in[0,1]\Rightarrow x^{2n}\ge 0$ şi, cum $0\le f(x)\le 1$, obţinem $0\le x^{2n}f(x)\le x^{2n}$	**2p**
	$0\le I_n=\int_0^1 x^{2n}f(x)\,dx\le\int_0^1 x^{2n}dx=\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\Big\vert_0^1=\frac{1}{2n+1}$ şi $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2n+1}=0$, deci $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$	**3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2019
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$n=3^2-\left(i\sqrt{2}\right)^2=$	**2p**
	$=9-2i^2=11\in\mathbb{Z}$	**3p**
2.	$f(a)=3\Rightarrow 2a+a=3$	**3p**
	$a=1$	**2p**
3.	$2019^x+2019^{-x}-2=0\Leftrightarrow\left(2019^x-1\right)^2=0$	**3p**
	$2019^x=1$, deci $x=0$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Mulțimea numerelor naturale de două cifre care au cifra unităților impară are 45 de elemente, deci sunt 45 de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{45}{90}=\dfrac{1}{2}$	**1p**
5.	$m_{AB}=-1\Rightarrow m_d=1$	**2p**
	Ecuația dreptei d este $y-y_A=m_d\left(x-x_A\right)$, deci $y=x-6$	**3p**
6.	$\sin(a-b)\sin(a+b)=\sin^2 a\cdot\cos^2 b-\sin^2 b\cdot\cos^2 a=$	**2p**
	$=\sin^2 a\left(1-\sin^2 b\right)-\sin^2 b\left(1-\sin^2 a\right)=\sin^2 a-\sin^2 b=(\sin a-\sin b)(\sin a+\sin b)$, pentru orice numere reale a și b	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix} a & 0 & -a \\ 0 & 2 & 0 \\ -a & 0 & a \end{vmatrix}=$	**2p**
	$=2a^2+0+0-2a^2-0-0=0$, pentru orice număr real a	**3p**
b)	$A(a)A(b)=\begin{pmatrix} 2ab & 0 & -2ab \\ 0 & 4 & 0 \\ -2ab & 0 & 2ab \end{pmatrix}=$	**3p**
	$=2\begin{pmatrix} ab & 0 & -ab \\ 0 & 2 & 0 \\ -ab & 0 & ab \end{pmatrix}=2A(ab)$, pentru orice numere reale a și b	**2p**
c)	$B=2^{13}A\left(\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\ldots\cdot\log_{15}16\right)=2^{13}A\left(\log_2 16\right)=$	**3p**
	$=2^{13}A(4)$, care are toate elementele numere întregi	**2p**

2.a)	$f(-1)=-m+n$, $f(0)=n$	**2p**
	$f(1)=2+m+n \Rightarrow f(-1)-2f(0)+f(1)=-m+n-2n+2+m+n=2$, pentru orice numere reale m şi n	**3p**
b)	f este divizibil cu $X^2-1 \Leftrightarrow f(-1)=0$ şi $f(1)=0$	**3p**
	$m=-1$, $n=-1$	**2p**
c)	$x_1+x_2+x_3=-1$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=m$, $x_1x_2x_3=-n$, $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-1+3m-3n$	**3p**
	$3(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+x_1x_2x_3)-(x_1^3+x_2^3+x_3^3)=3(m-n)-(-1+3m-3n)=1$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=$	**3p**
	$=(2x-x^2)e^{-x}=x(2-x)e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ sau $x=2$	**2p**
	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(-\infty,0]$, deci f este descrescătoare pe $(-\infty,0]$, $f'(x)\ge 0$ pentru orice $x\in[0,2]$, deci f este crescătoare pe $[0,2]$ şi $f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in[2,+\infty)$, deci f este descrescătoare pe $[2,+\infty)$	**3p**
c)	$f(0)=0<a$, $f(2)=4e^{-2}>a$ şi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0<a$, pentru orice $a\in(0,4e^{-2})$	**3p**
	Cum $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, f este continuă pe $\mathbb{R}$ şi f este strict monotonă pe $(-\infty,0)$, pe $(0,2)$ şi pe $(2,+\infty)$, ecuaţia $f(x)=a$ are exact trei soluţii reale	**2p**
2.a)	$\int_1^2 (f(x)-\ln x)\,dx=\int_1^2 x^2\,dx=\frac{x^3}{3}\Big\|_1^2=$	**3p**
	$=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$	**2p**
b)	$g(x)=2x+\ln x \Rightarrow \mathcal{A}=\int_1^e \lvert g(x)\rvert\,dx=\int_1^e (2x+\ln x)\,dx=x^2\Big\|_1^e+x\ln x\Big\|_1^e-\int_1^e x\cdot\frac{1}{x}dx=$	**3p**
	$=e^2-1+e-0-(e-1)=e^2$	**2p**
c)	$\int_{e^{-1}}^1 x^n\left(f(x)-x^2\right)dx=\int_{e^{-1}}^1 x^n\ln x\,dx=\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x-\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right)\Big\|_{e^{-1}}^1=\frac{1}{(n+1)e^{n+1}}-\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^2e^{n+1}}$	**3p**
	$\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{e^{-1}}^1 x^n\left(f(x)-x^2\right)dx=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{(n+1)e^{n+1}}-\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^2e^{n+1}}\right)=0$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2019
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$n\leq 5\Rightarrow A=\{0,1,2,3,4,5\}$	**3p**
	Suma elementelor mulțimii A este $0+1+2+3+4+5=15$	**2p**
2.	$\Delta=4-4m$	**2p**
	$\frac{4m-4}{4}=2$, de unde obținem $m=3$	**3p**
3.	$x+3=9-x\Rightarrow 2x=6$	**3p**
	$x=3$, care convine	**2p**
4.	O mulțime cu 10 elemente are $C_{10}^{8}+C_{10}^{9}+C_{10}^{10}$ submulțimi cu cel puțin 8 elemente	**3p**
	$C_{10}^{8}+C_{10}^{9}+C_{10}^{10}=45+10+1=56$	**2p**
5.	$D(2,2)$	**2p**
	$CD=10$	**3p**
6.	$\cos 2k\pi=1$ și $\cos(2k+1)\pi=-1$, unde $k\in\mathbb{Z}$	**2p**
	$1+\cos\pi+\cos 2\pi+\cos 3\pi+\ldots+\cos 2019\pi=1+(-1)+1+(-1)+1+\ldots+(-1)+1+(-1)=0$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}2&0&0\\1&1&1\\0&0&2\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=4+0+0-0-0-0=4$	**3p**
b)	$A(a)A(b)=\begin{pmatrix}ab+a+b+1&0&0\\a+b+1&ab&a+b+1\\0&0&ab+a+b+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ab&0&0\\0&ab&0\\0&0&ab\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a+b+1&0&0\\a+b+1&0&a+b+1\\0&0&a+b+1\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=ab\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+(a+b+1)\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}=ab\,I_3+(a+b+1)A(0)$, pentru orice numere reale a și b	**2p**
c)	$A(0)A(a)=(a+1)A(0)$, pentru orice număr real a	**2p**
	$A(0)A(1)A(2)\ldots A(2019)=2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2020A(0)$, de unde obținem $n=2020$	**3p**
2.a)	$f(1)=6-2m$	**3p**
	$6-2m=0\Rightarrow m=3$	**2p**
b)	$f=X^3-3X^2+2X=X\left(X^2-3X+2\right)$	**2p**
	Rădăcinile sunt $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$	**3p**

c)	$x_1+x_2+x_3=m$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=2$, deci $x_1^3+x_2^3+x_3^3=m^3-3m-9$	**3p**
	$m^3-3m-9=m^3-12$, de unde obținem $m=1$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=-2\left(-\frac{1}{(x+1)^2}\right)-\frac{x+1}{x}\cdot\frac{x+1-x}{(x+1)^2}=$	**2p**
	$=\frac{2}{(x+1)^2}-\frac{1}{x(x+1)}=\frac{2x-(x+1)}{x(x+1)^2}=\frac{x-1}{x(x+1)^2}$, $x\in(0,+\infty)$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{x+1}-\ln\frac{x}{x+1}\right)=1-0-0=1$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(0,1]$, deci f este descrescătoare pe $(0,1]$ și $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[1,+\infty)$, deci f este crescătoare pe $[1,+\infty)\Rightarrow f(x)\ge f(1)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**3p**
	$f(1)=\ln 2>0$, deci $f(x)>0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$ și, cum $g(x)=h(x)\Leftrightarrow f(x)=0$, ecuația $g(x)=h(x)$ nu are soluție în $(0,+\infty)$, deci graficele funcțiilor g și h nu au niciun punct comun	**2p**
2.a)	$\int_0^1 f^2(x)\,dx=\int_0^1\left(x^2+4\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+4x\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=\frac{1}{3}+4-0=\frac{13}{3}$	**2p**
b)	$g(x)=x\sqrt{x^2+4}\Rightarrow\mathcal{A}=\int_{-1}^1\lvert g(x)\rvert\,dx=-\int_{-1}^0 x\sqrt{x^2+4}\,dx+\int_0^1 x\sqrt{x^2+4}\,dx=$	**2p**
	$=-\frac{1}{3}\left(x^2+4\right)^{\frac{3}{2}}\Big\vert_{-1}^0+\frac{1}{3}\left(x^2+4\right)^{\frac{3}{2}}\Big\vert_0^1=-\frac{1}{3}\left(8-5\sqrt{5}\right)+\frac{1}{3}\left(5\sqrt{5}-8\right)=\frac{10\sqrt{5}-16}{3}$	**3p**
c)	Din teorema lui l'Hospital, $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^4}\int_0^x t^3f(t)\,dt=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^3f(x)}{4x^3}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+4}}{4}=\frac{1}{2}$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2019
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$3z_1 - z_2 = 3(3-i) - (8-3i) =$	**2p**
	$= 9 - 3i - 8 + 3i = 1$	**3p**
2.	$a - 5 + (a+1) - 5 = 35$	**2p**
	$2a - 9 = 35 \Rightarrow a = 22$	**3p**
3.	$4^x(2-4) + 32 = 0 \Leftrightarrow 4^x = 16$	**3p**
	$x = 2$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de o cifră are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile	**2p**
	Numerele naturale de o cifră care verifică relația sunt 6, 7, 8 și 9, deci sunt 4 cazuri favorabile	**2p**
	$p = \dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$	**1p**
5.	$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$, deci punctul C este mijlocul segmentului AB	**2p**
	$m = 4$	**3p**
6.	$\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \dfrac{AB \cdot AC}{2} \Rightarrow 24 = \dfrac{6 \cdot AC}{2} \Rightarrow AC = 8$	**3p**
	$BC = 10$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ln 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ln 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$	**2p**
	$= 2 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 2$	**3p**
b)	$A(a)A(b) = \begin{pmatrix} (a+1)(b+1) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ln((a+1)(b+1)) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$	**3p**
	$= \begin{pmatrix} (ab+a+b)+1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ln((ab+a+b)+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A(ab+a+b)$, pentru orice numere reale a și b, $a > 0$, $b > 0$	**2p**
c)	$A(a)A(a) = A\left((a+1)^2 - 1\right)$, $A(a)A(a)A(a) = A\left((a+1)^3 - 1\right)$, pentru a număr real, $a > 0$	**2p**
	$(a+1)^3 - 1 = 7 \Leftrightarrow (a+1)^3 = 8$, deci $a = 1$	**3p**
2.a)	$f(-2) = 6m - 6$, pentru m număr real	**3p**
	$6m - 6 = 0 \Rightarrow m = 1$	**2p**

b)	$f=X^3+X^2-X+2=(X+2)\left(X^2-X+1\right)$	**2p**
	$x_1=-2,\ x_2=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2},\ x_3=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$	**3p**
c)	$x_1+x_2+x_3=-m,\ x_1x_2x_3=-2$	**2p**
	$a=\dfrac{x_1^3+mx_1^2}{x_1x_2x_3}+\dfrac{x_2^3+mx_2^2}{x_1x_2x_3}+\dfrac{x_3^3+mx_3^2}{x_1x_2x_3}=\dfrac{mx_1-2}{x_1x_2x_3}+\dfrac{mx_2-2}{x_1x_2x_3}+\dfrac{mx_3-2}{x_1x_2x_3}=\dfrac{m(x_1+x_2+x_3)-6}{x_1x_2x_3}=$ $=\dfrac{m^2+6}{2}\geq 3$, deci $a\in[3,+\infty)$, pentru orice număr real m	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=e^x\left(x^2+4x+1\right)+e^x(2x+4)=$	**3p**
	$=e^x\left(x^2+6x+5\right)=e^x(x+5)(x+1),\ x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	Tangenta la graficul funcției f în $(x_0,f(x_0))$ este paralelă cu axa $Ox\Leftrightarrow f'(x_0)=0$	**2p**
	$e^{x_0}(x_0+5)(x_0+1)=0\Leftrightarrow x_0=-5$ sau $x_0=-1$	**3p**
c)	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0,\ f(-5)=\dfrac{6}{e^5},\ f(-1)=-\dfrac{2}{e}$ și $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$	**2p**
	Cum f este continuă pe $\mathbb{R}$ și f este strict monotonă pe $(-\infty,-5)$, pe $(-5,-1)$ și pe $(-1,+\infty)$, ecuaţia $f(x)=a$ are exact trei soluţii reale $\Leftrightarrow a\in\left(0,\dfrac{6}{e^5}\right)$	**3p**
2.a)	F este o primitivă a funcției $f\Rightarrow F'(x)=f(x)=\dfrac{1}{\ln x},\ x\in(1,+\infty)$	**2p**
	$F'(x)>0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$, deci F este strict crescătoare pe intervalul $(1,+\infty)$	**3p**
b)	$\displaystyle\int_e^{e^2}\frac{1}{x}f(x)\,dx=\int_e^{e^2}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln x}dx=\ln(\ln x)\Big|_e^{e^2}=$	**3p**
	$=\ln 2-\ln 1=\ln 2$	**2p**
c)	$g(x)=\ln x\Rightarrow\mathcal{A}=\displaystyle\int_e^a\left|g(x)\right|dx=\int_e^a\ln x\,dx=x\ln x\Big|_e^a-\int_e^a x\cdot\frac{1}{x}dx=a\ln a-a$	**3p**
	$a\ln a-a=2a$ și, cum $a>e$, obținem $a=e^3$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2019
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\frac{3}{x+1}\in\mathbb{N}\Rightarrow x+1=1$ sau $x+1=3$	**3p**
	Elementele mulțimii M sunt 0 și 2	**2p**
2.	$x_1^2-1=mx_1$, $x_2^2-1=mx_2$, pentru orice număr real m	**2p**
	$\frac{mx_1}{x_1}+\frac{mx_2}{x_2}=2$, deci $m=1$	**3p**
3.	$\sqrt{2-x}=x\Rightarrow 2-x=x^2\Rightarrow x^2+x-2=0$	**3p**
	$x=-2$, care nu convine sau $x=1$, care convine	**2p**
4.	În mulțimea A sunt 20 de numere, deci sunt 20 de cazuri posibile	**1p**
	Pentru $n\le 20$, obținem $\log_2 n\in\mathbb{N}\Leftrightarrow n\in\{1,2,4,8,16\}$, deci sunt 5 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$	**2p**
5.	$m_{MP}=-1$, deci panta mediatoarei segmentului MP este $m=1$	**2p**
	$Q\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ este mijlocul lui MP, deci ecuația mediatoarei este $y-\frac{3}{2}=x-\frac{1}{2}\Leftrightarrow y=x+1$	**3p**
6.	$\frac{AB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin A}\Leftrightarrow\frac{5\sqrt{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{BC}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$	**3p**
	$BC=10$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$M(0)=\begin{pmatrix}1&2&4\\-1&0&-1\\0&1&3\end{pmatrix}\Rightarrow\det(M(0))=\begin{vmatrix}1&2&4\\-1&0&-1\\0&1&3\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+(-4)+0-0-(-6)-(-1)=3$	**3p**
b)	$\det(M(m))=\begin{vmatrix}1&2&4\\-1&m&-1\\m&1&3\end{vmatrix}=-4m^2+m+3$, pentru orice număr real m	**2p**
	$\det(M(m))=0\Leftrightarrow m=-\frac{3}{4}$ sau $m=1$, deci sistemul are soluție unică pentru $m\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{3}{4},1\right\}$	**3p**
c)	Pentru $m=1$, sistemul este compatibil nedeterminat și soluțiile sistemului sunt $(3-2\alpha,1-\alpha,\alpha)$, unde $\alpha\in\mathbb{C}$	**3p**
	$4(1-\alpha)^2=(3-\alpha)^2\Leftrightarrow\alpha=-1$ sau $\alpha=\frac{5}{3}$, deci soluțiile sunt $(5,2,-1)$ sau $\left(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{5}{3}\right)$	**2p**

2.a)	$x*y=\frac{1}{3}xy-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y+\frac{3}{4}+\frac{6}{4}=$	**2p**
	$=\frac{1}{3}x\left(y-\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(y-\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{2}=\frac{1}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(y-\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{2}$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
b)	$x*x=\frac{1}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{2}$, $x*x*x=\frac{1}{9}\left(x-\frac{3}{2}\right)^3+\frac{3}{2}$	**2p**
	$\frac{1}{9}\left(x-\frac{3}{2}\right)^3+\frac{3}{2}=x\Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}$ sau $x=\frac{3}{2}$ sau $x=\frac{9}{2}$	**3p**
c)	$x*\frac{9}{2}=\frac{9}{2}*x=x$, pentru orice număr real x, deci $e=\frac{9}{2}$ este elementul neutru al legii „$*$”	**2p**
	$n*n'=n'*n=\frac{9}{2}\Leftrightarrow 4nn'-6n-6n'=27$, unde n' este simetricul lui n și, cum pentru $n, n'\in\mathbb{N}$, numărul $4nn'-6n-6n'$ este par, obținem că nu există niciun număr natural n al cărui simetric în raport cu legea de compoziție „$*$” să fie număr natural	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=1-\frac{2x+1}{x^2+x+1}=$	**3p**
	$=\frac{x^2-x}{x^2+x+1}=\frac{x(x-1)}{x^2+x+1}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	Tangenta la graficul funcției f în punctul $(a,f(a))$ este paralelă cu dreapta de ecuație $y=-\frac{1}{7}x+2\Leftrightarrow f'(a)=-\frac{1}{7}$	**2p**
	$\frac{a(a-1)}{a^2+a+1}=-\frac{1}{7}\Leftrightarrow 8a^2-6a+1=0\Leftrightarrow a=\frac{1}{4}$ sau $a=\frac{1}{2}$	**3p**
c)	f continuă pe $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $f(0)=0$, $f(1)=1-\ln 3\in(-1,0)$	**3p**
	f este strict descrescătoare pe $(0,1)$ și f este strict crescătoare pe $(1,+\infty)$, deci, pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$, ecuația $f(x)+n=0$ nu are nicio soluție în $[0,+\infty)$	**1p**
	f este strict crescătoare pe $(-\infty,0)\Rightarrow$ pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$, ecuația $f(x)+n=0$ are soluție unică în $(-\infty,0)$, deci pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$, ecuația $f(x)+n=0$ are soluție unică	**1p**
2.a)	$\int_0^2 e^x f(x)\,dx=\int_0^2 e^x\cdot\frac{x}{e^x}\,dx=\int_0^2 x\,dx=\frac{x^2}{2}\Big\vert_0^2=$	**3p**
	$=2-0=2$	**2p**
b)	$\mathcal{A}=\int_{-1}^1\left\vert f(x)\right\vert dx=\int_{-1}^0 -xe^{-x}dx+\int_0^1 xe^{-x}dx=(x+1)e^{-x}\Big\vert_{-1}^0-(x+1)e^{-x}\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=1-\frac{2}{e}+1=2-\frac{2}{e}$	**2p**
c)	$(n+2)I_n=(n+2)\int_0^1 x^n f(x)\,dx=(n+2)\int_0^1 x^{n+1}e^{-x}dx=\int_0^1\left(x^{n+2}\right)'e^{-x}dx=\frac{1}{e}+\int_0^1 x^{n+2}e^{-x}dx$	**2p**
	$0\le x\le 1\Rightarrow\frac{1}{e}\le e^{-x}\le 1\Rightarrow\frac{1}{e}\cdot x^{n+2}\le x^{n+2}e^{-x}\le x^{n+2}\Rightarrow\frac{1}{e}\int_0^1 x^{n+2}dx\le\int_0^1 x^{n+2}e^{-x}dx\le\int_0^1 x^{n+2}dx$	**1p**
	Cum $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 x^{n+2}dx=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+3}=0$, obținem $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 x^{n+2}e^{-x}dx=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}(n+2)I_n=\frac{1}{e}$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2019

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Determinați suma primilor trei termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_1=1$ și $b_2=3$.
5p	**2.** Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2+mx+7=0$, unde m este număr real. Determinați numărul real m pentru care $2x_1+2x_2+3x_1x_2=1$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x-2)+\log_2(x+2)=5$.
5p	**4.** Determinați câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $\{1,2,3,4,5\}$.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,6)$ și $B(6,2)$. Determinați coordonatele punctului M, știind că $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$.
5p	**6.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB=3\sqrt{3}$, $AC=4$ și $A=\frac{2\pi}{3}$. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu 9.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -a & -1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x-ay-z=1 \\ x+y+az=2 \end{cases}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(0))=0$.
5p	**b)** Demonstrați că $\det(A(a))=a(1-a)(1+a)$, pentru orice număr real a.
5p	**c)** Pentru $a=0$, demonstrați că sistemul de ecuații are o infinitate de soluții de forma (x_0,y_0,z_0) cu x_0, y_0 și z_0 numere întregi.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=(x-2019)(y-2019)+2019$.
5p	**a)** Arătați că $x*2019=2019$, pentru orice număr real x.
5p	**b)** Determinați numerele reale x, știind că $(x*x)*x=x$.
5p	**c)** Determinați perechile de numere întregi m și n pentru care $m*n=2020$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}-\ln x$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\frac{\sqrt{x}-2}{2x}$, $x\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f, în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că $\sqrt{x}-\ln\frac{x}{4}\geq 2$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+9}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1\left(x^2+9\right)f(x)\,dx=\frac{1}{3}$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f are un singur punct de inflexiune.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră $I_n=\displaystyle\int_0^1 x^{2n}f(x)\,dx$. Arătați că $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$.

Examenul de bacalaureat naţional 2019
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că numărul $n=\left(3-i\sqrt{2}\right)\left(3+i\sqrt{2}\right)$ este întreg, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Determinați numărul real a, știind că punctul $A(a,3)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+a$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2019^x+2019^{-x}=2$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra unităților impară.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,-3)$ și $B(2,-2)$. Determinaţi ecuaţia dreptei d care trece prin A și este perpendiculară pe AB.

5p **6.** Arătați că $\sin(a-b)\sin(a+b)=(\sin a-\sin b)(\sin a+\sin b)$, pentru orice numere reale a și b.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 0 & -a \\ 0 & 2 & 0 \\ -a & 0 & a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(a))=0$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Demonstrați că $A(a)A(b)=2A(ab)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Demonstrați că matricea $B=A(\log_2 3)\cdot A(\log_3 4)\cdot A(\log_4 5)\cdot\ldots\cdot A(\log_{15}16)$ are toate elementele numere întregi.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+X^2+mX+n$, unde m și n sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $f(-1)-2f(0)+f(1)=2$, pentru orice numere reale m și n.

5p **b)** Determinaţi numerele reale m și n, știind că polinomul f este divizibil cu polinomul X^2-1.

5p **c)** Demonstrați că $3(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+x_1x_2x_3)-\left(x_1^3+x_2^3+x_3^3\right)=1$, pentru orice numere reale m și n, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2e^{-x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=x(2-x)e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi intervalele de monotonie a funcţiei f.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice $a\in\left(0,4e^{-2}\right)$, ecuația $f(x)=a$ are exact trei soluții reale.

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+\ln x$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2\left(f(x)-\ln x\right)dx=\frac{7}{3}$.

5p **b)** Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x-x^2+f(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=e$ are aria egală cu e^2.

5p **c)** Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty}\int\limits_{e^{-1}}^{1}x^n\left(f(x)-x^2\right)dx=0$.

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că suma elementelor mulțimii $A=\{n\in\mathbb{N}\mid n-1\leq 4\}$ este egală cu 15.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x+m$, unde m este număr real. Determinați numărul real m, știind că vârful parabolei asociate funcției f are ordonata egală cu 2.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+3}=\sqrt{9-x}$.

5p **4.** Determinați numărul submulțimilor cu cel puțin 8 elemente ale unei mulțimi cu exact 10 elemente.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,1)$, $B(-1,3)$ și $C(8,10)$. Determinați lungimea segmentului CD, unde punctul D este mijlocul segmentului AB.

5p **6.** Arătați că $1+\cos\pi+\cos 2\pi+\cos 3\pi+\ldots+\cos 2019\pi=0$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}a+1&0&0\\1&a&1\\0&0&a+1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=4$.

5p **b)** Demonstrați că $A(a)A(b)=abI_3+(a+b+1)A(0)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Determinați numărul natural n pentru care $A(0)A(1)A(2)\ldots A(2019)=n!A(0)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-mX^2+2X+3-m$, unde m este număr real.

5p **a)** Determinați numărul real m, știind că $f(1)=0$.

5p **b)** Pentru $m=3$, determinați rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Determinați numărul real m pentru care $x_1^3+x_2^3+x_3^3=(x_1+x_2+x_3)^3-12$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-\dfrac{2}{x+1}-\ln\dfrac{x}{x+1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{x-1}{x(x+1)^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Se consideră funcțiile $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ și $h:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $h(x)=\ln\dfrac{x}{x+1}$. Demonstrați că graficele funcțiilor g și h **nu** au niciun punct comun.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+4}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1 f^2(x)\,dx=\frac{13}{3}$.

5p **b)** Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=xf(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=-1$ și $x=1$, are aria egală cu $\dfrac{10\sqrt{5}-16}{3}$.

5p **c)** Calculați $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\int_0^x t^3 f(t)\,dt$.

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numerele complexe $z_1 = 3 - i$ și $z_2 = 8 - 3i$. Arătați că $3z_1 - z_2 = 1$.

5p **2.** Determinați numărul real a pentru care $f(a) + f(a+1) = 35$, unde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 5$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2 \cdot 4^x - 4^{x+1} + 32 = 0$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să verifice relația $n(n+1) \geq 42$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(8,4)$, $B(0,6)$ și $C(m,5)$. Determinați numărul real m, știind că $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.

5p **6.** Calculați lungimea ipotenuzei BC a triunghiului dreptunghic ABC, știind că $AB = 6$ și aria triunghiului ABC este egală cu 24.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a+1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ln(a+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real, $a > 0$.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1)) = 2$.

5p **b)** Demonstrați că $A(a)A(b) = A(ab + a + b)$, pentru orice numere reale a și b, $a > 0$, $b > 0$.

5p **c)** Determinați numărul real a, $a > 0$, știind că $A(a)A(a)A(a) = A(7)$.

2. Se consideră x_1, x_2, x_3 rădăcinile polinomului $f = X^3 + mX^2 - mX + 2$, unde m este număr real.

5p **a)** Determinați numărul real m, știind că $f(-2) = 0$.

5p **b)** Pentru $m = 1$, determinați rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Se consideră $a = \frac{x_1^2 + mx_1}{x_2 x_3} + \frac{x_2^2 + mx_2}{x_1 x_3} + \frac{x_3^2 + mx_3}{x_1 x_2}$. Demonstrați că $a \in [3, +\infty)$, pentru orice număr real m.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x \left(x^2 + 4x + 1 \right)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x) = e^x (x+5)(x+1)$, $x \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați abscisele punctelor situate pe graficul funcției f, în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu axa Ox.

5p **c)** Determinați valorile reale ale lui a pentru care ecuația $f(x) = a$ are exact trei soluții reale.

2. Se consideră funcția $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\ln x}$.

5p **a)** Arătați că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare pe intervalul $(1, +\infty)$.

5p **b)** Calculați $\int_e^{e^2} \frac{1}{x} f(x)\, dx$.

5p **c)** Determinați numărul real a, $a > e$, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{f(x)}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = e$ și $x = a$ are aria egală cu $2a$.

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. (30 de puncte)

5p **1.** Determinați elementele mulțimii $M=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,\frac{3}{x+1}\in\mathbb{N}\right\}$.

5p **2.** Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2-mx-1=0$, unde m este număr real. Determinați numărul real m, știind că $\frac{x_1^2-1}{x_1}+\frac{x_2^2-1}{x_2}=2$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2-x}-x=0$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\left\{\log_2 n\,\middle|\,n\in\mathbb{N}^*,\ n\le 20\right\}$, acesta să fie număr natural.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(0,2)$ și $P(1,1)$. Determinați ecuația mediatoarei segmentului MP.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB=5\sqrt{2}$, $m(\sphericalangle A)=45^\circ$ și $m(\sphericalangle C)=30^\circ$. Determinați lungimea laturii BC.

SUBIECTUL al II-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $M(m)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ -1 & m & -1\\ m & 1 & 3\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+2y+4z=5\\ -x+my-z=-2\\ mx+y+3z=4\end{cases}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(M(0))=3$.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui m pentru care sistemul are soluție unică.

5p **c)** Pentru $m=1$, determinați soluțiile (x_0,y_0,z_0) ale sistemului pentru care $4y_0^2=(x_0+z_0)^2$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă, cu element neutru, $x*y=\frac{1}{3}xy-\frac{1}{2}(x+y)+\frac{9}{4}$.

5p **a)** Demonstrați că $x*y=\frac{1}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(y-\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{2}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $x*x*x=x$.

5p **c)** Demonstrați că **nu** există niciun număr natural n al cărui simetric în raport cu legea de compoziție „$*$” să fie număr natural.

SUBIECTUL al III-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln\left(x^2+x+1\right)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x(x-1)}{x^2+x+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați abscisele punctelor situate pe graficul funcției f în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu dreapta de ecuație $y=-\frac{1}{7}x+2$.

5p **c)** Demonstrați că pentru fiecare număr natural nenul n, ecuația $f(x)+n=0$ are soluție unică.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^2 e^x f(x)\,dx=2$.

5p **b)** Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=-1$ și $x=1$ are aria egală cu $2-\frac{2}{e}$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră $I_n=\int_0^1 x^n f(x)\,dx$. Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+2)I_n=\frac{1}{e}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a=3+2\sqrt{2}+\dfrac{3-2\sqrt{2}}{9-8}=$	**3p**
	$=3+2\sqrt{2}+3-2\sqrt{2}=6$, care este număr natural	**2p**
2.	$(f\circ f)(1)=f\left(f(1)\right)=f(3)=7$	**3p**
	$f(2)=5$, deci $(f\circ f)(1)=f(2)+2$	**2p**
3.	$3^{2x^2}=3^{x+1}\Leftrightarrow 2x^2=x+1$	**2p**
	$2x^2-x-1=0$, de unde obţinem $x=-\dfrac{1}{2}$ sau $x=1$	**3p**
4.	Numărul submulţimilor cu două elemente ale mulţimii A este C_n^2	**2p**
	$\dfrac{n!}{2!(n-2)!}=10\Leftrightarrow n^2-n-20=0$ şi, cum n este număr natural, obţinem $n=5$	**3p**
5.	$AM=AN$, deci $a=4$	**3p**
	$A(4,3)$, deci $AO=\sqrt{3^2+4^2}=5$	**2p**
6.	$3\cos x-2=4\cos^2 x-2\Leftrightarrow 4\cos^2 x-3\cos x=0\Leftrightarrow \cos x(4\cos x-3)=0$	**3p**
	Cum $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, obţinem $\cos x=\dfrac{3}{4}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&1\\0&-5&-2\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(A(0)\right)=\begin{vmatrix}1&2&0\\0&1&1\\0&-5&-2\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=(-2)+0+0-0-(-5)-0=3$	**3p**
b)	$\det\left(A(a)\right)=\begin{vmatrix}1&2-a&a\\a-1&a-1&1-a\\a&2a-5&a-2\end{vmatrix}=(a-1)\begin{vmatrix}1&2-a&a\\1&1&-1\\a&2a-5&a-2\end{vmatrix}=(a-1)\begin{vmatrix}1&1-a&a+1\\1&0&0\\a&a-5&2a-2\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=-(a-1)\begin{vmatrix}1-a&a+1\\a-5&2a-2\end{vmatrix}=(a-1)\left(3a^2-8a-3\right)=(a-1)(a-3)(3a+1)$, pentru orice număr real a	**3p**
c)	Sistemul are soluţie unică $(x_0,y_0,z_0)\Leftrightarrow \det\left(A(a)\right)\neq 0$, deci, pentru $a\in\mathbb{N}$, obţinem $a\in\mathbb{N}\setminus\{1,3\}$ şi, cum x_0, y_0, $z_0\in\mathbb{N}$ şi $ax_0+y_0+z_0=2-a$, obţinem $2-a\in\mathbb{N}$	**3p**
	$a=2$, care nu convine, $a=0$ care convine	**2p**
2.a)	$0*0=\log_2\left(2^0+2^0\right)=\log_2(1+1)=$	**3p**
	$=\log_2 2=1$	**2p**

b)	$x*y=\log_2\left(2^x+2^y\right)=\log_2\left(2^y+2^x\right)=$	**3p**
	$=y*x$, pentru orice numere reale x și y, deci legea de compoziție „$*$” este comutativă	**2p**
c)	$(x*x)*x=\log_2\left(2^x+2^x\right)*x=\log_2\left(2^{x+1}\right)*x=(x+1)*x=\log_2\left(2^{x+1}+2^x\right)=\log_2\left(2^x\cdot 3\right)$, unde x este număr real	**3p**
	$\log_2\left(2^x\cdot 3\right)=3+\log_2 3$, de unde obținem $x=3$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{4x^3-2x}{2\sqrt{x^4-x^2+1}}=$	**3p**
	$=\dfrac{2x\left(2x^2-1\right)}{2\sqrt{x^4-x^2+1}}=\dfrac{x\left(2x^2-1\right)}{\sqrt{x^4-x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f(1)=1$, $f'(1)=1$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)$, adică $y=x$	**3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $x=0$ sau $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ și $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$, f este continuă pe $\mathbb{R}$, f este strict descrescătoare pe $\left(-\infty,-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ și pe $\left(0,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, f este strict crescătoare pe $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ și pe $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},+\infty\right)$ și $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$	**3p**
	Cum $f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}<m$, $f(0)=1>m$ și $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}<m$, obținem că, pentru orice $m\in\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},1\right)$, ecuația $f(x)=m$ are exact patru soluţii reale	**2p**
2.a)	$\displaystyle\int_1^2 x\cdot\frac{x^2+2x+5}{x}dx=\int_1^2\left(x^2+2x+5\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+x^2+5x\right)\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=\dfrac{8}{3}+4+10-\dfrac{1}{3}-1-5=\dfrac{7}{3}+8=\dfrac{31}{3}$	**2p**
b)	$\displaystyle\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1\frac{x+1}{x^2+2x+5}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\left(x^2+2x+5\right)'}{x^2+2x+5}dx=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+5\right)\Big\vert_0^1=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{8}{5}$	**2p**
c)	$x^{2n}\geq 0$ și $x^2+2x+5\geq 4\Rightarrow 0\leq\dfrac{x^{2n}}{x^2+2x+5}\leq\dfrac{x^{2n}}{4}$, pentru orice $x\in[-1,1]$ și orice $n\in\mathbb{N}^*$	**2p**
	$0\leq\displaystyle\int_{-1}^1 x^{2n-1}f(x)dx\leq\int_{-1}^1\frac{x^{2n}}{4}dx$ și, cum $\displaystyle\int_{-1}^1\frac{x^{2n}}{4}dx=\frac{1}{2(2n+1)}$ și $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2(2n+1)}=0$, obținem $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$	**3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(3-i)^2-6(3-i)+10=$	**2p**
	$=9-6i+i^2-18+6i+10=0$	**3p**
2.	$f(a)=a^2+6$, $f(a-2)=(a-2)^2+6$	**2p**
	$a^2+6=(a-2)^2+6$, de unde obținem $a=1$	**3p**
3.	$x^2+4x+5=2x+4\Rightarrow x^2+2x+1=0$	**3p**
	$x=-1$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Mulțimea numerelor naturale de două cifre, care au produsul cifrelor egal cu 16, are 3 elemente, deci sunt 3 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{3}{90}=\dfrac{1}{30}$	**1p**
5.	$ABCD$ este paralelogram, deci segmentele AC și BD au același mijloc	**1p**
	$x_A+x_C=x_B+x_D\Rightarrow x_D=4$	**2p**
	$y_A+y_C=y_B+y_D\Rightarrow y_D=5$	**2p**
6.	$E\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}-\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{4}+\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{2}+2\sin\dfrac{5\pi}{6}=$	**2p**
	$=1-1+0+2\cdot\dfrac{1}{2}=1$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&1&0\\2&-2&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(1))=\begin{vmatrix}1&-2&0\\0&1&0\\2&-2&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1+0+0-0-0-0=1$	**3p**
b)	$A(a)A(b)=\begin{pmatrix}1&-2a&0\\0&1&0\\2a&-2a^2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2b&0\\0&1&0\\2b&-2b^2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2b-2a&0\\0&1&0\\2a+2b&-4ab-2a^2-2b^2&1\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1&-2(a+b)&0\\0&1&0\\2(a+b)&-2(a+b)^2&1\end{pmatrix}=A(a+b)$, pentru orice numere reale a și b	**2p**

c)	$A(n)=A(1)A(2)A(3)\cdot\ldots\cdot A(2020)=A(1+2+3+\ldots+2020)=A\left(\frac{2020\cdot 2021}{2}\right)=$	**3p**
	$=A(1010\cdot 2021)$, deci $n=1010\cdot 2021$, care este multiplu de 2021	**2p**
2.a)	$\sqrt{3}*0=\sqrt{3}\cdot 0-\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+0\right)+3+\sqrt{3}=$	**3p**
	$=-3+3+\sqrt{3}=\sqrt{3}$	**2p**
b)	$x*y=xy-\sqrt{3}x-\sqrt{3}y+3+\sqrt{3}=$	**2p**
	$=x\left(y-\sqrt{3}\right)-\sqrt{3}\left(y-\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}=\left(x-\sqrt{3}\right)\left(y-\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
c)	$x*\sqrt{3}=\sqrt{3}$ și $\sqrt{3}*y=\sqrt{3}$, unde x și y sunt numere reale	**2p**
	$\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{1}}*\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}\right)*\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}*\ldots*\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{96}}=\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{1}}*\sqrt{3}\right)*\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}*\ldots*\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{96}}=\sqrt{3}*\left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}*\ldots*\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{96}}\right)=\sqrt{3}$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{(2x+4)e^x-\left(x^2+4x+4\right)e^x}{\left(e^x\right)^2}=$	**3p**
	$=\frac{e^x\left(-x^2-2x\right)}{\left(e^x\right)^2}=\frac{-x(x+2)}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+4x+4}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+4}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcţiei f	**2p**
c)	$g(x)=\frac{1}{e^x}$, deci $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(g(1)+g(2)+\ldots+g(n)\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{e^1}+\frac{1}{e^2}+\ldots+\frac{1}{e^n}\right)=$	**2p**
	$=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{e}\cdot\frac{\left(\frac{1}{e}\right)^n-1}{\frac{1}{e}-1}=\frac{1}{e-1}$	**3p**
2.a)	$\int_0^1(x+1)f(x)dx=\int_0^1(2x+1)dx=\left(x^2+x\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=1+1=2$	**2p**
b)	$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{2x+1}{x+1}dx=\int_0^1\left(2-\frac{1}{x+1}\right)dx=2x\Big\vert_0^1-\ln(x+1)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=2-\ln 2+\ln 1=2-\ln 2$	**2p**
c)	$I_n=\int_0^1 e^x(2x+1)^n dx=e^x(2x+1)^n\Big\vert_0^1-2n\int_0^1 e^x(2x+1)^{n-1}dx=$	**3p**
	$=e\cdot 3^n-1-2nI_{n-1}$, deci $I_n+2nI_{n-1}=3^n e-1$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z^2-4z+5=(2+i)^2-4(2+i)+5=4+4i+i^2-8-4i+5=$	**3p**
	$=i^2+1=-1+1=0$	**2p**
2.	$M(0,2)\in G_f \Leftrightarrow f(0)=2$	**3p**
	$a=2$	**2p**
3.	$x^3=x^3+2x\Leftrightarrow 2x=0$	**3p**
	$x=0$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de cinci cifre distincte, formate cu cifre din mulțimea $\{1,2,3,4,5\}$ are $5!=120$ de elemente, deci sunt 120 de cazuri posibile	**2p**
	Numerele naturale de cinci cifre distincte, formate cu cifre din mulțimea $\{1,2,3,4,5\}$, care au cifra zecilor egală cu 2 și cifra unităților egală cu 3, sunt 6, deci sunt 6 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{6}{120}=\dfrac{1}{20}$	**1p**
5.	$CA=CB\Leftrightarrow\sqrt{(4-0)^2+(a-1)^2}=\sqrt{(4-2)^2+(a-3)^2}$	**3p**
	$16+a^2-2a+1=4+a^2-6a+9\Leftrightarrow a=-1$	**2p**
6.	$A+B+C=\pi$, $2B=A+C$	**3p**
	$3B=\pi\Rightarrow B=\dfrac{\pi}{3}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=$	**3p**
	$=1+0+0-0-0-0=1$	**2p**
b)	$A(x)A(y)=\begin{pmatrix}1&0&2+\ln(xy)\\0&xy&0\\0&0&1\end{pmatrix}=$	**2p**
	$=\begin{pmatrix}1&0&2+\ln(yx)\\0&yx&0\\0&0&1\end{pmatrix}=A(y)A(x)$, pentru orice $x,y\in(0,+\infty)$	**3p**
c)	$A\left(\frac{1}{3}\right)A(3)=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $A\left(\frac{1}{2}\right)A(2)=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	**2p**
	$A\left(\frac{1}{3}\right)\cdot A\left(\frac{1}{2}\right)\cdot A(1)\cdot A(2)\cdot A(3)=A\left(\frac{1}{3}\right)\cdot A(3)\cdot A\left(\frac{1}{2}\right)\cdot A(2)\cdot A(1)=\begin{pmatrix}1&0&5\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow n=5$	**3p**

2.a)	$1*2=1\cdot 2-4(1+2)+10=$ $=2-12+10=0$	**3p** **2p**
b)	$x*5=x\cdot 5-4(x+5)+20=5x-4x-20+20=x$, pentru orice număr real x $5*x=5x-4(5+x)+20=5x-20-4x+20=x$, pentru orice număr real x, deci $e=5$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**2p** **3p**
c)	$x*y=(x-4)(y-4)+a-16$, pentru orice numere reale x și y $x,y\in H\Rightarrow x-4\geq 0$ și $y-4\geq 0$ și, cum $a\geq 20$, obținem $x*y\geq 4\Rightarrow x*y\in H$, deci H este parte stabilă a mulțimii numerelor reale în raport cu legea de compoziție „$*$”	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=6^x\ln 6-3^x\ln 3+2^x\ln 2$, $x\in\mathbb{R}$ $f'(0)=\ln 6-\ln 3+\ln 2=\ln 4$	**3p** **2p**
b)	Ecuația tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)$ și, cum $f(0)=1$, obținem $y=x\ln 4+1$ $\ln(16e)=a\ln 4+1\Rightarrow 1+\ln 16=\ln\left(4^a\right)+1$, deci $a=2$	**3p** **2p**
c)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(f(x))}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{f'(0)}{f(0)}=$ $=\dfrac{\ln 4}{1}=\ln 4$	**3p** **2p**
2.a)	$\int_1^2\left(x^2+3\right)f(x)\,dx=\int_1^2\left(x^2+3-2x-2\right)dx=\int_1^2\left(x^2-2x+1\right)dx=\dfrac{(x-1)^3}{3}\Big\vert_1^2=$ $=\dfrac{1}{3}-0=\dfrac{1}{3}$	**3p** **2p**
b)	$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\left(1-\dfrac{2x}{x^2+3}-\dfrac{2}{x^2+3}\right)dx=\left(x-\ln\left(x^2+3\right)-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{3}}\right)\Big\vert_0^1=$ $=1-\ln 4-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\pi}{6}+\ln 3=1-\ln\dfrac{4}{3}-\dfrac{\pi\sqrt{3}}{9}$	**3p** **2p**
c)	Pentru orice $x\in[0,1]$, $f'(x)=\dfrac{2(x-1)(x+3)}{\left(x^2+3\right)^2}\leq 0\Rightarrow f(1)\leq f(x)\leq f(0)\Rightarrow 0\leq f(x)\leq\dfrac{1}{3}$ $0\leq I_n\leq\int_0^1\left(\dfrac{1}{3}\right)^n dx$, deci $0\leq I_n\leq\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ și, cum $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n=0$, obținem că $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$	**2p** **3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2z-z^2=2(1+i)-(1+i)^2=$	**2p**
	$=2+2i-\left(1+2i+i^2\right)=2+2i-2i=2$	**3p**
2.	$\Delta=m^2-8m$	**2p**
	$f(x)>0$ pentru orice număr real x, deci $\Delta<0$, de unde obţinem $m\in(0,8)$	**3p**
3.	$\log_5\left(\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)\right)=2\Rightarrow\left(\sqrt{x}\right)^2-1=5^2$	**3p**
	$x=26$, care convine	**2p**
4.	O mulțime cu n elemente are 2^n submulțimi	**2p**
	$2^n=32$, deci $n=5$	**3p**
5.	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}\Rightarrow ABDC$ paralelogram, deci segmentele AD și BC au același mijloc	**3p**
	Coordonatele punctului D sunt $x=8$ și $y=5$	**2p**
6.	$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$	**2p**
	$\cos x-\sin x=\sin x-\cos x\Leftrightarrow\cos x=\sin x$ și, cum $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, obţinem $x=\frac{\pi}{4}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2)=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(2))=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{vmatrix}=$	**3p**
	$=8+0+0-0-0-0=8$	**2p**
b)	$A(a)A(b)=\begin{pmatrix}4-2a-2b+2ab&0&2a+2b-2ab\\0&4&0\\2a+2b-2ab&0&4-2a-2b+2ab\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=2\begin{pmatrix}ab-a-b+2&0&2-(ab-a-b+2)\\0&2&0\\2-(ab-a-b+2)&0&ab-a-b+2\end{pmatrix}=2A(ab-a-b+2)$, pentru orice numere reale a și b	**2p**
c)	$A(pq-p-q+2)=2I_3\Leftrightarrow A(pq-p-q+2)=A(2)\Leftrightarrow pq-p-q=0$	**2p**
	Cum p și q sunt numere întregi, din $(p-1)(q-1)=1$, obţinem $p=0$, $q=0$ sau $p=2$, $q=2$	**3p**

2.a)	$x*y=-\frac{3}{5}xy+\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{3}x+y=-\frac{3}{5}x\left(y-\frac{5}{3}\right)+y-\frac{5}{3}+\frac{5}{3}=$	**3p**
	$=\left(y-\frac{5}{3}\right)\left(-\frac{3}{5}x+1\right)+\frac{5}{3}=-\frac{3}{5}\left(x-\frac{5}{3}\right)\left(y-\frac{5}{3}\right)+\frac{5}{3}$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
b)	$\frac{5x}{3}*\frac{5}{3x}=-\frac{3}{5}\left(\frac{5x}{3}-\frac{5}{3}\right)\left(\frac{5}{3x}-\frac{5}{3}\right)+\frac{5}{3}=\frac{5}{3}\frac{(x-1)^2}{x}+\frac{5}{3}$, $x\in(0,+\infty)$	**3p**
	$x>0\Rightarrow\frac{5(x-1)^2}{3x}\geq 0$, deci $\frac{5x}{3}*\frac{5}{3x}\geq\frac{5}{3}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p**
c)	$x*\frac{5}{3}=\frac{5}{3}$ și $\frac{5}{3}*y=\frac{5}{3}$, unde x și y sunt numere reale	**3p**
	$\frac{1}{3}*\frac{2}{3}*\frac{3}{3}*\ldots*\frac{2020}{3}=\left(\left(\frac{1}{3}*\ldots*\frac{4}{3}\right)*\frac{5}{3}\right)*\left(\frac{6}{3}*\ldots*\frac{2020}{3}\right)=\frac{5}{3}*\left(\frac{6}{3}*\ldots*\frac{2020}{3}\right)=\frac{5}{3}$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=4-\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x=$	**3p**
	$=\frac{4x^2+4-2x}{x^2+1}=\frac{2\left(2x^2-x+2\right)}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x+1)-f(x)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4-\ln\frac{x^2+2x+2}{x^2+1}\right)=$	**2p**
	$=4-\ln 1=4$	**3p**
c)	$f'(x)>0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$, deci f este injectivă	**2p**
	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ și f este continuă pe $\mathbb{R}\Rightarrow f$ este surjectivă, deci f este bijectivă	**3p**
2.a)	$\int_0^1 f^2(x)\,dx=\int_0^1\left(25-x^2\right)dx=\left(25x-\frac{x^3}{3}\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=25-\frac{1}{3}=\frac{74}{3}$	**2p**
b)	$\int_{-3}^{3}\left\vert x\,f(x)\right\vert dx=-\int_{-3}^{0}x\sqrt{25-x^2}\,dx+\int_0^3 x\sqrt{25-x^2}\,dx=$	**2p**
	$=\frac{1}{3}\left(25-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big\vert_{-3}^{0}-\frac{1}{3}\left(25-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big\vert_0^3=\frac{125}{3}-\frac{64}{3}-\frac{64}{3}+\frac{125}{3}=\frac{122}{3}$	**3p**
c)	$I_{n+1}-I_n=\int_0^1\frac{1}{f^{n+1}(x)}dx-\int_0^1\frac{1}{f^n(x)}dx=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{\left(25-x^2\right)^n}}\left(\frac{1}{\sqrt{25-x^2}}-1\right)dx$	**2p**
	$\frac{1}{\sqrt{\left(25-x^2\right)^n}}>0$ și $\frac{1}{\sqrt{25-x^2}}-1<0$, pentru orice $x\in[0,1]\Rightarrow I_{n+1}-I_n\leq 0$, pentru orice număr natural nenul n, deci șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este descrescător	**3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$n<3\Rightarrow M=\{0,1,2\}$	**3p**
	Suma pătratelor elementelor mulțimii M este $0^2+1^2+2^2=5$	**2p**
2.	Abscisa vârfului parabolei asociate funcției f este $-\frac{b}{2a}=\frac{m}{2}$	**2p**
	$\frac{m}{2}=3$, deci $m=6$	**3p**
3.	$x+2=8-x\Rightarrow 2x=6$	**3p**
	$x=3$, care convine	**2p**
4.	O mulțime cu 12 elemente are C_{12}^{10} submulțimi cu 10 elemente	**3p**
	$C_{12}^{10}=\frac{12\cdot 11}{2}=66$	**2p**
5.	$D(2,2)$, deci $M(5,6)$, unde M este mijlocul segmentului CD	**2p**
	$m_{AC}=3$, deci ecuația dreptei paralele cu dreapta AC și care trece prin punctul M este $y-6=3(x-5)$, deci $y=3x-9$	**3p**
6.	$\cos 2k\pi=1$ și $\cos(2k+1)\pi=-1$, unde $k\in\mathbb{Z}$	**2p**
	$S=(-1)+1+(-1)+1+\ldots+(-1)+1=0$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&0&1\\-1&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}1&1&-1\\1&0&1\\-1&1&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+(-1)+(-1)-0-1-1=-4$	**3p**
b)	$A(x)A(y)=\begin{pmatrix}1+2xy&0&1-2xy\\0&2&0\\1-2xy&0&1+2xy\end{pmatrix}$, $A(2xy)=\begin{pmatrix}2xy&1&-2xy\\1&0&1\\-2xy&1&2xy\end{pmatrix}$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
	$\det(A(x)A(y)-A(2xy))=\begin{vmatrix}1&-1&1\\-1&2&-1\\1&-1&1\end{vmatrix}=0$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
c)	$A(x)A\left(\frac{1}{2x}\right)=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=2I_3$, pentru orice număr real nenul x	**2p**
	$A(1)A\left(\frac{1}{2}\right)+A(2)A\left(\frac{1}{4}\right)+\ldots+A(1010)A\left(\frac{1}{2020}\right)=1010\cdot 2I_3$, deci $n=2020$	**3p**

2.a)	$2^5 * 3^5 = \left(\sqrt[5]{2^5} + \sqrt[5]{3^5}\right)^5 =$	**3p**
	$= (2+3)^5 = 5^5$	**2p**
b)	$2^5 * x^5 * \left(243x^5\right) = \left(\sqrt[5]{2^5} + \sqrt[5]{x^5} + \sqrt[5]{243x^5}\right)^5 = (2+x+3x)^5 = (2+4x)^5$, unde x este număr real	**3p**
	$(2+4x)^5 = 10^5$, deci $x = 2$	**2p**
c)	$1^5 * 2^5 = \left(\sqrt[5]{1^5} + \sqrt[5]{2^5}\right)^5 = (1+2)^5$, $1^5 * 2^5 * 3^5 = \left(\sqrt[5]{1^5} + \sqrt[5]{2^5} + \sqrt[5]{3^5}\right)^5 = (1+2+3)^5$	**2p**
	$M = 1^5 * 2^5 * 3^5 * ... * 10^5 = \left(\sqrt[5]{1^5} + \sqrt[5]{2^5} + \sqrt[5]{3^5} + ... + \sqrt[5]{10^5}\right)^5 = (1+2+3+...+10)^5 = 5^5 \cdot 11^5 = N$, de unde obținem $M - N = 0$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = \frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} =$	**2p**
	$= \frac{2x + x(x+1) - (x+1)^2}{x(x+1)^2} = \frac{x-1}{x(x+1)^2}$, $x \in (0,+\infty)$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+1} + \ln\frac{x+1}{x}\right) = 1 + \ln 1 = 1$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y = 1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	$f'(x) \le 0$, pentru orice $x \in (0,1]$, deci f este descrescătoare pe $(0,1]$ și $f'(x) \ge 0$, pentru orice $x \in [1,+\infty)$, deci f este crescătoare pe $[1,+\infty) \Rightarrow f(x) \ge f(1)$, pentru orice $x \in (0,+\infty)$	**3p**
	$f(1) = \ln 2 > 0 \Rightarrow f(x) > 0$, pentru orice $x \in (0,+\infty)$, de unde obținem că graficul funcției f **nu** intersectează axa Ox	**2p**
2.a)	$\int_0^1 f^2(x)\,dx = \int_0^1 \left(x^2+1\right)dx = \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Big|_0^1 =$	**3p**
	$= \frac{1}{3} + 1 - 0 = \frac{4}{3}$	**2p**
b)	$\int_{-1}^1 \left|xf(x)\right|dx = -\int_{-1}^0 x\sqrt{x^2+1}\,dx + \int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,dx =$	**2p**
	$= -\frac{1}{3}\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^0 + \frac{1}{3}\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = -\frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3} = \frac{4\sqrt{2}-2}{3}$	**3p**
c)	Din regula lui l'Hospital, $\lim\limits_{x\to0} \frac{\int_0^x t\cdot f(t)\,dt}{x^2} = \lim\limits_{x\to0} \frac{x\,f(x)}{2x} =$	**3p**
	$= \lim\limits_{x\to0} \frac{\sqrt{x^2+1}}{2} = \frac{1}{2}$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2z_1 - z_2 = 2(3-3i) - (5-6i) =$	**2p**
	$= 6 - 6i - 5 + 6i = 1$	**3p**
2.	$m + 15 + (m+1) + 15 = 35$	**2p**
	$2m + 31 = 35 \Rightarrow m = 2$	**3p**
3.	$3^x(2-3) + 27 = 0 \Leftrightarrow 3^x = 27$	**3p**
	$x = 3$	**2p**
4.	Sunt 900 de numere naturale de trei cifre, deci sunt 900 de cazuri posibile	**2p**
	Numerele naturale de trei cifre care sunt multipli de 25 sunt $25\cdot 4$, $25\cdot 5, \ldots, 25\cdot 39$, deci sunt 36 de cazuri favorabile	**2p**
	$p = \dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \dfrac{36}{900} = \dfrac{1}{25}$	**1p**
5.	$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$, deci punctul C este mijlocul segmentului AB	**3p**
	$a = 2$, $b = 5$	**2p**
6.	$\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \dfrac{AB \cdot AC}{2} \Rightarrow 6 = \dfrac{4 \cdot AC}{2} \Rightarrow AC = 3$	**3p**
	$BC = 5$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & a+1 & a \\ a & 6 & 4 \end{vmatrix} = 8a + 8 + 12 + 2a^2 - a^2 - a - 12a - 16 =$	**3p**
	$= a^2 - 5a + 4 = (a-1)(a-4)$, pentru orice număr real a	**2p**
b)	$A(4) - A(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $(A(4) - A(1))A(a) = 3\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a+2 & a+7 & a+4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real	**3p**
	$A(a)(A(4) - A(1)) = 3\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ a & a+1 & a+1 \\ 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}$, deci $A(a)(A(4) - A(1)) \neq (A(4) - A(1))A(a)$, pentru orice număr real a	**2p**
c)	Sistemul are soluția unică (x_0, y_0, z_0), deci $a \in \mathbb{Z} \setminus \{1, 4\}$ și soluția sistemului de ecuații este $\left(\dfrac{a-3}{a-4}, \dfrac{a-6}{a-4}, -\dfrac{a-6}{a-4}\right)$	**3p**
	Cum x_0, y_0, z_0 și a sunt numere întregi, obținem $a = 3$ sau $a = 5$, care convin	**2p**

2.a)	$3*0=\dfrac{100(3+0)}{3\cdot 0+100}=$	**3p**
	$=\dfrac{300}{100}=3$	**2p**
b)	$f(x*y)=\dfrac{10-\dfrac{100(x+y)}{xy+100}}{10+\dfrac{100(x+y)}{xy+100}}=\dfrac{10xy-100x-100y+1000}{10xy+100x+100y+1000}=\dfrac{xy-10x-10y+100}{xy+10x+10y+100}=$	**3p**
	$=\dfrac{(x-10)(y-10)}{(x+10)(y+10)}=\dfrac{10-x}{10+x}\cdot\dfrac{10-y}{10+y}=f(x)f(y)$, pentru orice $x,\ y\in M$	**2p**
c)	$f\left(\underbrace{x*x*\ldots*x}_{\text{de 11 ori } x}\right)=f(0)$, deci $\underbrace{f(x)f(x)\ldots f(x)}_{\text{de 11 ori } f(x)}=f(0)\Leftrightarrow (f(x))^{11}=1$	**3p**
	$f(x)=1\Leftrightarrow 10-x=10+x$, deci $x=0$, care convine	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=e^x\left(x^2-4x+1\right)+e^x(2x-4)=$	**3p**
	$=e^x\left(x^2-2x-3\right)=e^x(x-3)(x+1),\ x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	Tangenta la graficul funcției f în $(x_0,f(x_0))$ este paralelă cu dreapta de ecuație $y=2020\Leftrightarrow f'(x_0)=0$	**2p**
	$e^{x_0}(x_0-3)(x_0+1)=0\Leftrightarrow x_0=-1$ sau $x_0=3$	**3p**
c)	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$, $f(-1)=\dfrac{6}{e}$, $f(3)=-2e^3$ și $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$	**2p**
	Cum f este continuă pe $\mathbb{R}$ și f este strict monotonă pe $(-\infty,-1)$, pe $(-1,3)$ și pe $(3,+\infty)$, graficul funcției f intersectează dreapta de ecuație $y=a$ în exact trei puncte $\Leftrightarrow f(x)=a$ are exact trei soluţii reale $\Leftrightarrow a\in\left(0,\dfrac{6}{e}\right)\cap\left(-2e^3,\dfrac{6}{e}\right)\cap\left(-2e^3,+\infty\right)=\left(0,\dfrac{6}{e}\right)$	**3p**
2.a)	$F:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcției $f\Rightarrow F'(x)=f(x)=\ln x+\dfrac{1}{\ln x}$, $x\in(1,+\infty)$	**2p**
	$F'(x)>0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$, deci F este strict crescătoare pe intervalul $(1,+\infty)$	**3p**
b)	$\int\limits_e^{e^2}\dfrac{1}{x}\left(f(x)-\ln x\right)dx=\int\limits_e^{e^2}\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{\ln x}dx=\ln(\ln x)\Big\vert_e^{e^2}=$	**3p**
	$=\ln 2-\ln 1=\ln 2$	**2p**
c)	$\int\limits_e^a\ln x\,dx=x\ln x\Big\vert_e^a-\int\limits_e^a x\cdot\dfrac{1}{x}dx=a\ln a-e-(a-e)=a\ln a-a$	**3p**
	$a\ln a-a=2a\Leftrightarrow a(\ln a-3)=0$ și, cum $a>e$, obținem $a=e^3$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z=1+2i\sqrt{3}+3i^2-\left(1-2i\sqrt{3}+3i^2\right)=4i\sqrt{3}$	**3p**
	Partea reală a lui z este 0	**2p**
2.	$f(3)<0$, $f(4)<0$, $f(5)<0$	**2p**
	$f(0)>0$, $f(1)>0$ și $f(2)>0$, deci $f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot f(4)\cdot f(5)<0$	**3p**
3.	$\left(\log_2 x-1\right)^2=0\Rightarrow \log_2 x=1$	**3p**
	$x=2$, care convine	**2p**
4.	Numărul de submulțimi cu 3 elemente ale lui A, care conțin exact 2 numere impare este egal cu $C_5^2\cdot C_5^1=$	**3p**
	$=\frac{5\cdot 4}{2}\cdot 5=50$	**2p**
5.	$\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{CA}=$	**3p**
	$=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+2\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$	**2p**
6.	$1-2\sin^2 x=\frac{1}{3}\Leftrightarrow \sin^2 x=\frac{1}{3}$	**3p**
	Cum $x\in(\pi,2\pi)$, obținem $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}2&1&2\\3&1&2\\2&1&5\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(A(1)\right)=\begin{vmatrix}2&1&2\\3&1&2\\2&1&5\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=10+6+4-4-4-15=-3$	**3p**
b)	Sistemul de ecuații devine $\begin{cases}2x-y+2z=4\\3x-y+2z=1\\2x-y+5z=-2\end{cases}$ și, cum $\det\left(A(-1)\right)=3\neq 0$, sistemul de ecuații este compatibil determinat	**2p**
	$x=-3$, $y=-14$, $z=-2$	**3p**
c)	$\det\left(A(a)\right)=\begin{vmatrix}2&a&2\\3&a&2\\2&a&5\end{vmatrix}=a\begin{vmatrix}2&1&2\\3&1&2\\2&1&5\end{vmatrix}=-3a$, pentru orice număr real a și, cum $\det\left(A(a)\right)=0$, obținem $a=0$	**2p**
	$\begin{vmatrix}2&2\\3&2\end{vmatrix}=-2\neq 0$ și $\begin{vmatrix}2&2&4\\3&2&1\\2&5&b\end{vmatrix}=0$, deci $38-2b=0$, de unde obținem $b=19$	**3p**

2.a)	$x*y=\sqrt{x^2y^2-x^2-y^2+1+1}=$	**3p**
	$=\sqrt{x^2\left(y^2-1\right)-\left(y^2-1\right)+1}=\sqrt{\left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)+1}$, pentru orice $x, y\in G$	**2p**
b)	$x*e=x\Leftrightarrow\sqrt{\left(x^2-1\right)\left(e^2-1\right)+1}=x\Leftrightarrow\left(x^2-1\right)\left(e^2-1\right)=x^2-1$, pentru orice $x\in G$, deci $e^2-1=1$ și, cum $e\in G$, obținem $e=\sqrt{2}$	**3p**
	Cum $\sqrt{2}*x=\sqrt{(2-1)\left(x^2-1\right)+1}=\sqrt{x^2}=x$, pentru orice $x\in G$, obținem că $e=\sqrt{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**2p**
c)	$f(x)*f(y)=\sqrt{\left(f^2(x)-1\right)\left(f^2(y)-1\right)+1}=\sqrt{(x+1-1)(y+1-1)+1}=\sqrt{xy+1}=f(xy)$, pentru orice $x, y\in M$, deci f este un morfism de la grupul $(M,\cdot)$ la grupul $(G,*)$	**3p**
	f este continuă, f este strict crescătoare pe $(0,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$ și $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, deci f este bijectivă $\Rightarrow f$ este un izomorfism de la grupul $(M,\cdot)$ la grupul $(G,*)$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=1\cdot e^{-x}+(x+1)e^{-x}\cdot(-1)=$	**3p**
	$=\left(1-(x+1)\right)e^{-x}=-xe^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\dfrac{\left(f(n)\right)^n}{e^n\left(f(n+1)\right)^n}=\left(\dfrac{(n+1)e^{-n}}{e(n+2)e^{-(n+1)}}\right)^n=\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^n$, pentru orice număr natural n	**2p**
	$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\left(f(n)\right)^n}{e^n\left(f(n+1)\right)^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(1+\dfrac{-1}{n+2}\right)^{\frac{n+2}{-1}}\right)^{\frac{-n}{n+2}}=e^{-1}=\dfrac{1}{e}$	**3p**
c)	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left((x+1)e^{-x}\right)=-\infty$ și $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{e^x}=0$	**2p**
	Cum f este continuă pe $\mathbb{R}$, f este strict crescătoare pe $(-\infty,0)$, $f(0)=1$ și f este strict descrescătoare pe $(0,+\infty)$, ecuația $f(x)=m$ are două soluții reale distincte $\Leftrightarrow m\in(0,1)$	**3p**
2.a)	$\int_0^1\left(f(x)-x\right)dx=\int_0^1\dfrac{2}{x+1}dx=2\ln(x+1)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=2\ln 2-2\ln 1=2\ln 2$	**2p**
b)	$\int_1^e\left(f(x)-\dfrac{2}{x+1}\right)\ln x\,dx=\int_1^e x\ln x\,dx=\dfrac{x^2}{2}\ln x\Big\vert_1^e-\int_1^e\dfrac{x^2}{2}\cdot\dfrac{1}{x}dx=$	**3p**
	$=\dfrac{e^2}{2}-\dfrac{x^2}{4}\Big\vert_1^e=\dfrac{e^2+1}{4}$	**2p**
c)	F este primitivă a lui f și $F(0)=0$, deci $F:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+2\ln(x+1)$	**1p**
	$\int_0^1 2f(x)F(x)dx=\int_0^1 2F(x)F'(x)dx=F^2(x)\Big\vert_0^1=\dfrac{1}{4}+2\ln 2+4\ln^2 2$	**2p**
	$\dfrac{1}{4}+2\ln 2+4\ln^2 2=\dfrac{1}{4}+\ln 4+\ln^2 a\Leftrightarrow 4\ln^2 2=\ln^2 a$, deci $\ln a=-2\ln 2$ sau $\ln a=2\ln 2$, de unde obținem $a=\dfrac{1}{4}$ sau $a=4$, care convin	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z=1-\left(i\sqrt{2}\right)^2=1-2i^2=1-2(-1)=$	**3p**
	$=1+2=3$, care este număr natural	**2p**
2.	$f(x)+f(1-x)=3x+a+3(1-x)+a=2a+3$, pentru orice număr real x	**3p**
	$2a+3=7\Rightarrow a=2$	**2p**
3.	$5^x+5^{-x}-2=0\Leftrightarrow\left(5^x-1\right)^2=0$	**3p**
	$5^x=1$, deci $x=0$	**2p**
4.	Numărul submulțimilor cu trei elemente ale lui A, care îl conțin pe 1, este egal cu numărul submulțimilor cu două elemente ale mulţimii $\{2,3,4,5\}$, deci este egal cu $C_4^2=$	**3p**
	$=\frac{4!}{2!(4-2)!}=6$	**2p**
5.	$m_{OM}=-1$ și, cum $m_{OM}\cdot m_d=-1$, obținem $m_d=1$	**2p**
	Ecuația dreptei d este $y-y_M=m_d(x-x_M)$, deci $y=x+8$	**3p**
6.	$\sin B=\frac{AC}{BC}$	**2p**
	$\cos B=\frac{AB}{BC}\Rightarrow AB=AC$, deci triunghiul ABC este isoscel	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&2&3\\1&2&4\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(0))=\begin{vmatrix}0&1&2\\1&2&3\\1&2&4\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+4+3-4-0-4=-1$	**3p**
b)	$\det(A(a))=-\left(a^2-a+1\right)$, pentru orice număr real a	**3p**
	$a^2-a+1\neq 0$, pentru orice număr real $a\Rightarrow\det(A(a))\neq 0$, deci matricea $A(a)$ este inversabilă, pentru orice număr real a	**2p**
c)	Cum $a\in\mathbb{Z}$, inversa matricei $A(a)$ are toate elementele numere întregi dacă $\det(A(a))$ este divizor al lui 1 și, cum $\det(A(a))<0$, pentru orice număr real a, obținem că $\det(A(a))=-1$	**3p**
	$a=0$ sau $a=1$, care convin	**2p**
2.a)	$1*2020=\frac{1}{2}\sqrt[3]{1^3\cdot 2020^3-1^3-2020^3+9}=$	**3p**
	$=\frac{1}{2}\sqrt[3]{-1+9}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{8}=1$	**2p**

b)	$x*y=\frac{1}{2}\sqrt[3]{x^3y^3-x^3-y^3+1+8}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{x^3\left(y^3-1\right)-\left(y^3-1\right)+8}=$	**3p**
	$=\sqrt[3]{\frac{1}{8}\left(x^3-1\right)\left(y^3-1\right)+\frac{1}{8}\cdot 8}=\sqrt[3]{\frac{1}{8}\left(x^3-1\right)\left(y^3-1\right)+1}$, pentru orice $x,y\in A$	**2p**
c)	$x*x=\sqrt[3]{\frac{1}{8}\left(x^3-1\right)^2+1}$, pentru orice $x\in A$, deci $\frac{1}{8}\left(x^3-1\right)^2+1=x^3$	**2p**
	$\left(x^3-1\right)^2=8\left(x^3-1\right)$, deci $x^3-1=0$ sau $x^3-1=8$, de unde $x=1$ sau $x=\sqrt[3]{9}$, care convin	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{-1}{(x-2)^2}+\frac{x}{x-1}\cdot\frac{x-(x-1)}{x^2}=\frac{-x(x-1)+(x-2)^2}{x(x-1)(x-2)^2}=$	**3p**
	$=\frac{-x^2+x+x^2-4x+4}{x(x-1)(x-2)^2}=\frac{-3x+4}{x(x-1)(x-2)^2}$, $x\in(2,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x-2}+\ln\frac{x-1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x-2}+\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)=0$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	$x\in(2,+\infty)\Rightarrow f'(x)<0$, deci f strict descrescătoare pe $(2,+\infty)$ și, cum $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, obținem că $f(x)>0$, pentru orice $x\in(2,+\infty)$	**3p**
	$\frac{1}{x-2}+\ln\frac{x-1}{x}>0$, deci $\frac{1}{x-2}>-\ln\frac{x-1}{x}$, de unde obținem că $\frac{1}{x-2}>\ln\frac{x}{x-1}$, pentru orice $x\in(2,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_0^1\left(x^3+1\right)f^2(x)\,dx=\int_0^1\left(x^3+1\right)\left(\frac{x}{\sqrt{x^3+1}}\right)^2dx=\int_0^1x^2dx=$	**3p**
	$=\frac{x^3}{3}\Big\vert_0^1=\frac{1}{3}$	**2p**
b)	$\int_0^1f^2(x)\,dx=\int_0^1\frac{x^2}{x^3+1}dx=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{\left(x^3+1\right)'}{x^3+1}dx=$	**3p**
	$=\frac{1}{3}\ln\left(x^3+1\right)\Big\vert_0^1=\frac{1}{3}\ln 2$	**2p**
c)	$I_n=\int_0^1f\left(x^n\right)dx=\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{x^{3n}+1}}dx$ și, cum $0\le\frac{x^n}{\sqrt{x^{3n}+1}}\le x^n$, pentru $x\in[0,1]$ și, pentru fiecare număr natural nenul n, obținem că $0\le I_n\le\int_0^1x^ndx$	**3p**
	$0\le I_n\le\frac{1}{n+1}$, pentru fiecare număr natural nenul n și, cum $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$, obținem $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$0<\sqrt{2}-1<1\Rightarrow 0<\left(\sqrt{2}-1\right)^2<1$	**3p**
	Partea întreagă a numărului real x este 0	**2p**
2.	$f(x)=y\Leftrightarrow x^2-2x=2x-3\Leftrightarrow x^2-4x+3=0$	**3p**
	$x=1$ sau $x=3$	**2p**
3.	$4^{x-2}=4^{2x-7}\Leftrightarrow x-2=2x-7$	**3p**
	$x=5$	**2p**
4.	Numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii A este egal cu $C_{10}^3=$	**3p**
	$=\dfrac{10!}{3!(10-3)!}=120$	**2p**
5.	$\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow B$ este mijlocul segmentului AC, deci $2=\dfrac{1+x_C}{2}$ și $5=\dfrac{3+y_C}{2}$	**3p**
	$x_C=3$ și $y_C=7$	**2p**
6.	$\cos(\sphericalangle BAC)=\dfrac{1}{2}$ și $BC^2=AB^2+AC^2-2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos(\sphericalangle BAC)$, deci $BC=\sqrt{7}$	**3p**
	$P_{\Delta ABC}=AB+BC+AC=5+\sqrt{7}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2)=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&2\\1&-2&0\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(2))=\begin{vmatrix}1&0&3\\0&1&2\\1&-2&0\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+0+0-3-(-4)-0=1$	**3p**
b)	$\det(A(a))=a^2-3$, pentru orice număr real a	**2p**
	Pentru orice număr rațional q, $\det(A(q))\neq 0$, deci matricea $A(q)$ este inversabilă	**3p**
c)	Pentru orice număr rațional p, $B(p)=2\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&p\\-1&-p&0\end{pmatrix}$, $B(p)B(p)=-4\begin{pmatrix}1&p&0\\p&p^2&0\\0&0&1+p^2\end{pmatrix}$	**3p**
	și $B(p)B(p)B(p)=-4\left(p^2+1\right)B(p)$ $\left(1-4p^2\right)B(p)=O_3\Leftrightarrow p=-\dfrac{1}{2}$ sau $p=\dfrac{1}{2}$, care convin	**2p**
2.a)	$\dfrac{1}{3}*\dfrac{1}{3}=\dfrac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}}{2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+1}=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{9}\cdot\dfrac{9}{5}=\dfrac{1}{5}$	**2p**

b)	$x*\frac{1}{2}=\frac{x\cdot\frac{1}{2}}{2\cdot x\cdot\frac{1}{2}-x-\frac{1}{2}+1}=\frac{x\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=x$, pentru orice $x\in G$	**2p**
	$\frac{1}{2}*x=\frac{\frac{1}{2}\cdot x}{2\cdot\frac{1}{2}\cdot x-\frac{1}{2}-x+1}=\frac{x\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=x=x*\frac{1}{2}$, pentru orice $x\in G$ și, cum $\frac{1}{2}\in G$, obținem că $e=\frac{1}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**3p**
c)	$f(x*y)=\frac{2xy-x-y+1}{xy}-1=\frac{xy-x-y+1}{xy}=\frac{(x-1)(y-1)}{xy}=\frac{x-1}{x}\cdot\frac{y-1}{y}=f(x)f(y)$, pentru orice $x,y\in G$, deci f este un morfism de la grupul $(G,*)$ la grupul $(M,\cdot)$	**3p**
	f este continuă, f este strict descrescătoare pe $(0,1)$, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=+\infty$ și $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0$, deci f este bijectivă $\Rightarrow f$ este un izomorfism de la grupul $(G,*)$ la grupul $(M,\cdot)$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=x'\cdot\ln x+x\cdot(\ln x)'=$	**2p**
	$=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=1+\ln x$, $x\in(0,+\infty)$	**3p**
b)	Tangenta la graficul funcției f în $M(m,f(m))$ este paralelă cu dreapta de ecuație $y=2x\Leftrightarrow f'(m)=2$	**2p**
	$1+\ln m=2\Rightarrow m=e$, care convine	**3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$, $f'(x)<0$, pentru orice $x\in\left(0,\frac{1}{e}\right)\Rightarrow f$ strict descrescătoare pe $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ și $f'(x)>0$, pentru orice $x\in\left(\frac{1}{e},+\infty\right)\Rightarrow f$ strict crescătoare pe $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$, deci $f(x)\geq f\left(\frac{1}{e}\right)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**3p**
	$x\ln x\geq-\frac{1}{e}$, deci $x\ln x+\frac{1}{e}\geq 0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,f(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x\,dx=\frac{1}{2}\sin^2 x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=$	**3p**
	$=\frac{1}{2}(1-0)=\frac{1}{2}$	**2p**
b)	$\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^x\cos t\,dt=\sin t\Big|_0^x=\sin x$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\sin x=0$	**3p**
c)	$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $0\leq\cos x\leq 1\Rightarrow 0\leq\cos^n x\leq 1\Rightarrow I_{n+1}-I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x(\cos x-1)dx\leq 0\Rightarrow I_{n+1}\leq I_n$, pentru orice număr natural nenul n, deci șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ e descrescător	**2p**
	$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow\cos^n x\geq 0\Rightarrow I_n\geq 0$, pentru orice număr natural nenul n, deci șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este mărginit inferior, de unde obținem că șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este convergent	**3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$A=\{0,1,2\}$	**3p**
	Suma elementelor mulțimii A este egală cu $0+1+2=3$	**2p**
2.	$f(1)=m+n$ și $f(2)=2m+n$, deci $m+n=2$ și $2m+n=1$	**2p**
	$m=-1,\ n=3$	**3p**
3.	$\left(4^x+4\right)\left(4^x-2\right)=0$	**2p**
	$2^{2x}=2$, deci $x=\frac{1}{2}$	**3p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de trei cifre are 900 de elemente, deci sunt 900 de cazuri posibile	**2p**
	Mulțimea numerelor naturale de trei cifre care au cifra sutelor un număr prim are $4\cdot10\cdot10=400$ de elemente, deci sunt 400 de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{400}{900}=\frac{4}{9}$	**1p**
5.	O este punctul de intersecție a diagonalelor paralelogramului $ABCD\Rightarrow\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OA}$	**3p**
	$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$	**2p**
6.	$\sin^2 x=1-\cos^2 x=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25}$	**3p**
	Cum $x\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$, obținem $\sin x=-\frac{3}{5}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}2&0&1\\-3&0&1\\3&-1&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A(0)\right)=\begin{vmatrix}2&0&1\\-3&0&1\\3&-1&1\end{vmatrix}=$	**3p**
	$=0+3+0-0-(-2)+0=5$	**2p**
b)	$\det\left(A(a)\right)=a^2-6a+5$, pentru orice număr real a	**2p**
	Sistemul de ecuații este compatibil determinat $\Leftrightarrow\det\left(A(a)\right)\neq0$, deci $a\in\mathbb{R}\setminus\{1,5\}$	**3p**
c)	Sistemul are soluție unică (x_0,y_0,z_0), deci $a\in\mathbb{R}\setminus\{1,5\}$ și soluția sistemului este $\left(\frac{2(a-1)}{a-5},-\frac{2}{a-5},-\frac{a+1}{a-5}\right)$	**3p**
	$2\cdot\left(-\frac{2}{a-5}\right)=\frac{2(a-1)}{a-5}+\left(-\frac{a+1}{a-5}\right)$, deci $a=-1$, care convine	**2p**

2.a)	$1*3=1+3-\frac{1\cdot 3}{3}=$	**3p**
	$=1+3-1=3$	**2p**
b)	$x*x=-\frac{1}{3}(x-3)^2+3$, $x*x*x=\frac{1}{3^2}(x-3)^3+3$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\frac{1}{9}(x-3)^3+3=\frac{26}{9}\Leftrightarrow(x-3)^3=-1\Leftrightarrow x-3=-1$, de unde obținem $x=2$	**3p**
c)	$x*0=0*x=x$, pentru orice număr real x, deci $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**1p**
	$n*n'=0\Leftrightarrow n'(n-3)=3n$, deci $n'=\frac{3n}{n-3}$, pentru orice număr natural n, $n\neq 3$	**2p**
	Cum n și n' sunt numere naturale, obținem $n=0$, $n=4$, $n=6$ sau $n=12$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=4x^3-\frac{4}{x}=$	**3p**
	$=\frac{4(x^4-1)}{x}=\frac{4(x^2-1)(x^2+1)}{x}=\frac{4(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x^4-4\ln x)=+\infty$	**3p**
	Dreapta de ecuație $x=0$ este asimptotă verticală la graficul funcției f	**2p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$, $f'(x)<0$, pentru orice $x\in(0,1)\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(0,1)$ și $f'(x)>0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(1,+\infty)$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$, $f(1)=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ și f este continuă pe $(0,+\infty)$, deci pentru fiecare număr natural n, $n\geq 2$, ecuația $f(x)-n=0$ are două soluții reale distincte, $x_1\in(0,1)$ și $x_2\in(1,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\int_0^2 f(x)e^{-x}dx=\int_0^2 x^3dx=\frac{x^4}{4}\Big\vert_0^2=$	**3p**
	$=4-0=4$	**2p**
b)	$\int_1^e \frac{1}{x^2} f(\ln x)dx=\int_1^e \frac{1}{x}\ln^3 x dx=\frac{\ln^4 x}{4}\Big\vert_1^e=$	**3p**
	$=\frac{\ln^4 e}{4}-\frac{\ln^4 1}{4}=\frac{1}{4}$	**2p**
c)	$F(x)=(x^3-3x^2+6x-6)e^x+c$, $c\in\mathbb{R}$ și, cum $F(0)=0\Rightarrow F(x)=(x^3-3x^2+6x-6)e^x+6$	**2p**
	$\int_0^1 f(x)F(x)dx=\int_0^1 F'(x)F(x)dx=\frac{1}{2}F^2(x)\Big\vert_0^1=\frac{1}{2}(F^2(1)-F^2(0))=2(e-3)^2$	**3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^7}+\frac{1}{2^8}=1\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^9}{1-\frac{1}{2}}=$	**3p**
	$=2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^9\right)<2$	**2p**
2.	$f(x)=0\Leftrightarrow x^2+4x-5=0$	**2p**
	Cum $\Delta>0$, produsul absciselor punctelor de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox este egal cu -5	**3p**
3.	$3^{x-2}\left(3^2+1+3^4\right)=91\Leftrightarrow 3^{x-2}=1$	**3p**
	$x=2$	**2p**
4.	$T_{k+1}=C_9^k\left(\sqrt{x}\right)^{9-k}\left(\frac{1}{x}\right)^k=C_9^k x^{\frac{9-k}{2}+(-k)}=C_9^k x^{\frac{9-3k}{2}}$, unde $k\in\{0,1,2,\ldots,9\}$	**3p**
	$\frac{9-3k}{2}=0\Leftrightarrow k=3$, deci $T_4=C_9^3=84$ nu îl conține pe x	**2p**
5.	$G\left(\frac{-1+1+3}{3},\frac{1+3+2}{3}\right)$, deci $G(1,2)$ este centrul de greutate al triunghiului ABC	**3p**
	Ecuația dreptei OG este $y-0=\frac{2-0}{1-0}(x-0)$, deci $y=2x$	**2p**
6.	$\cos C=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}$	**3p**
	$2R=\frac{AB}{\sin C}\Rightarrow 2R=\frac{4}{\sqrt{2}}$, deci raza cercului circumscris triunghiului ABC este $R=\sqrt{2}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&1&1\\3&0&2\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A(1)\right)=\begin{vmatrix}1&2&-1\\1&1&1\\3&0&2\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=2+0+6-(-3)-4-0=7$	**3p**
b)	$\det\left(A(a)\right)=11-4a$, pentru orice număr întreg a	**2p**
	Cum $\det\left(A(a)\right)=0\Leftrightarrow a=\frac{11}{4}\notin\mathbb{Z}$, obținem $\det\left(A(a)\right)\neq 0$, pentru orice număr întreg a, deci rangul matricei $A(a)$ este egal cu 3, pentru orice număr întreg a	**3p**
c)	Pentru orice număr întreg m, $A(m)$ este inversabilă și $A^{-1}(m)$ are toate elementele numere întregi $\Leftrightarrow\det\left(A(m)\right)=-1$ sau $\det\left(A(m)\right)=1$	**3p**
	Cum m este număr întreg, obținem $m=3$	**2p**

2.a)	$2\circ 2=\dfrac{2\cdot 2}{2+2}=$	**3p**
	$=\dfrac{4}{4}=1$	**2p**
b)	$x\circ y\circ z=\left(\dfrac{xy}{x+y}\right)\circ z=\dfrac{\dfrac{xy}{x+y}\cdot z}{\dfrac{xy}{x+y}+z}=\dfrac{xyz}{xy+xz+yz}=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{\dfrac{xy}{xyz}+\dfrac{xz}{xyz}+\dfrac{yz}{xyz}}=\dfrac{1}{z^{-1}+y^{-1}+x^{-1}}=\left(x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}\right)^{-1}$, pentru orice $x,y,z\in M$	**2p**
c)	$\dfrac{1}{2}\circ\dfrac{1}{3}\circ\dfrac{1}{4}\circ\ldots\circ\dfrac{1}{10}=\left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}+\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}+\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-1}+\ldots+\left(\dfrac{1}{10}\right)^{-1}\right)^{-1}=\left(2+3+4+\ldots+10\right)^{-1}=$	**3p**
	$=\left(\dfrac{10\cdot 11}{2}-1\right)^{-1}=54^{-1}=\dfrac{1}{54}$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}=$	**3p**
	$=\dfrac{x-1-(x+1)}{(x-1)(x+1)}=-\dfrac{2}{x^2-1}$, $x\in(1,+\infty)$	**2p**
b)	$f'(x)<0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(1,+\infty)$, deci f este injectivă	**2p**
	f este continuă pe $(1,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=+\infty$ și $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0\Rightarrow f$ este surjectivă, deci f este bijectivă	**3p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\,f(x)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\ln\dfrac{x+1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right)^{\frac{2x}{x-1}}=\ln e^2=2$	**2p**
2.a)	$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\left(x^2-3x+2\right)dx=\left(\dfrac{x^3}{3}-3\cdot\dfrac{x^2}{2}+2x\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{3}-\dfrac{3}{2}+2=\dfrac{5}{6}$	**2p**
b)	$\int_1^e\dfrac{f(x)}{x}\ln x\,dx=\int_1^e(x-3)\ln x\,dx+\int_1^e\dfrac{2}{x}\ln x\,dx=\left(\dfrac{x^2}{2}-3x\right)\ln x\Big\vert_1^e-\int_1^e\left(\dfrac{x}{2}-3\right)dx+2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\ln^2 x\Big\vert_1^e=$	**2p**
	$=\dfrac{e^2}{2}-3e-\left(\dfrac{x^2}{4}-3x\right)\Big\vert_1^e+\ln^2 e-\ln^2 1=\dfrac{e^2}{2}-3e-\left(\dfrac{e^2}{4}-3e-\dfrac{1}{4}+3\right)+1=\dfrac{e^2-7}{4}$	**3p**
c)	$\int_1^a f(x)e^x dx=\left(x^2-3x+2\right)e^x\Big\vert_1^a-\int_1^a(2x-3)e^x dx=\left(x^2-5x+7\right)e^x\Big\vert_1^a=\left(a^2-5a+7\right)e^a-3e$	**3p**
	$\left(a^2-5a+7\right)e^a-3e=e^a-3e\Leftrightarrow a^2-5a+6=0$, deci $a=2$ sau $a=3$, care convin	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z=(3+2i)(3-2i)-(4-i)=3^2-(2i)^2-4+i=9+i$	**2p**
	Partea reală a numărului complex z este egală cu 9	**3p**
2.	$g(2)=1$	**2p**
	$(f\circ g)(2)=f(g(2))=3\cdot 1+2=5$	**3p**
3.	$2^{\frac{6x}{3}}=2^4\Leftrightarrow 2x=4$	**3p**
	$x=2$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de trei cifre are 900 de elemente, deci sunt 900 de cazuri posibile	**2p**
	Mulțimea numerelor naturale de trei cifre care au produsul cifrelor un număr impar are $5\cdot 5\cdot 5=125$ de elemente, deci sunt 125 de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{125}{900}=\dfrac{5}{36}$	**1p**
5.	$ABCD$ este paralelogram, deci $\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$	**2p**
	$AC^2=AD^2+DC^2-2\cdot AD\cdot DC\cdot\cos(\sphericalangle ADC)\Rightarrow AC=2\sqrt{19}$	**3p**
6.	$BC^2=AB^2+AC^2\Rightarrow \Delta ABC$ este dreptunghic în A	**2p**
	$AD=\dfrac{AB\cdot AC}{BC}=48$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}3&1&-2\\0&-1&1\\2&-2&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}3&1&-2\\0&-1&1\\2&-2&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=-3+0+2-4-(-6)-0=1$	**3p**
b)	$\det(A(a))=3a-2$, pentru orice număr real a	**2p**
	Matricea $A(a)$ **nu** este inversabilă $\Leftrightarrow \det(A(a))=0$, deci $a=\dfrac{2}{3}$	**3p**
c)	Dacă $a=\dfrac{2}{3}$, sistemul de ecuații este incompatibil	**1p**
	Dacă $a\neq\dfrac{2}{3}$, atunci $\det(A(a))\neq 0$, deci sistemul de ecuații este compatibil determinat și, cum există y_0 și z_0 astfel încât $(2,y_0,z_0)$ este soluție a sistemului de ecuații, obținem $\dfrac{2(2a+1)}{3a-2}=2$	**3p**
	$a=3$, care convine	**1p**

2.a)	$2*64=\sqrt[3]{2^{\log_2 64}}=$	**3p**
	$=\sqrt[3]{2^6}=2^2=4$	**2p**
b)	$x*y=\sqrt[3]{x^{\log_2 y}}=x^{\frac{1}{3}\log_2 y}=\left(2^{\log_2 x}\right)^{\frac{1}{3}\log_2 y}=2^{\frac{1}{3}\log_2 x\log_2 y}=$	**2p**
	$=2^{\frac{1}{3}\log_2 y\log_2 x}=\left(2^{\log_2 y}\right)^{\frac{1}{3}\log_2 x}=y^{\frac{1}{3}\log_2 x}=y*x$, pentru orice $x,y\in G$, deci legea de compoziție „$*$” este comutativă	**3p**
c)	$x*8=8*x=x$, pentru orice $x\in G\Rightarrow e=8$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**1p**
	$x*x=8\Leftrightarrow x^{\log_2 x}=8^3\Leftrightarrow \log_2 x^{\log_2 x}=\log_2\left(8^3\right)\Leftrightarrow\left(\log_2 x\right)^2=9$	**2p**
	$\log_2 x=-3$ sau $\log_2 x=3$, deci $x=\frac{1}{8}$ sau $x=8$, care convin	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=(x-4)(x-3)(x-2)+(x-5)\left((x-4)(x-3)(x-2)\right)'$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
	$f'(5)=(5-4)(5-3)(5-2)+0=6$	**2p**
b)	$\frac{f(n+1)-1}{f(n)-1}=\frac{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)}{(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)}=\frac{n-1}{n-5}$, unde $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 6$	**2p**
	$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{f(n+1)-1}{f(n)-1}\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{4}{n-5}\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{4}{n-5}\right)^{\frac{n-5}{4}}\right)^{\frac{4n}{n-5}}=e^4$	**3p**
c)	$f(2)=f(3)=f(4)=f(5)=1$	**2p**
	f este derivabilă, deci, conform teoremei lui Rolle pe $[2,3]$, $[3,4]$ și $[4,5]$, ecuația $f'(x)=0$ are o soluție reală în fiecare dintre intervalele $(2,3)$, $(3,4)$ și $(4,5)$	**3p**
2.a)	$g(x)=\left(1+e^x\right)f(x)=1-e^x\Rightarrow\int g(x)dx=x-e^x+\mathcal{C}\Rightarrow G(x)=x-e^x+c$, unde $c\in\mathbb{R}$	**3p**
	$G(0)=0$, deci $c=1$, de unde obținem $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $G(x)=x-e^x+1$	**2p**
b)	$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{1-e^x}{1+e^x}dx=\int_0^1\left(1-\frac{2e^x}{1+e^x}\right)dx=\left(x-2\ln\left(1+e^x\right)\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=1-2\ln(1+e)+2\ln 2=1+2\ln\frac{2}{e+1}$	**2p**
c)	$\int_{-1}^1 f(x)\cos x dx=\int_1^{-1} f(-x)\cos(-x)\cdot(-1)dx=\int_{-1}^1 f(-x)\cos x dx=\int_{-1}^1\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}\cos x dx=$	**3p**
	$=\int_{-1}^1\frac{e^x-1}{e^x+1}\cos x dx=-\int_{-1}^1\frac{1-e^x}{e^x+1}\cos x dx=-\int_{-1}^1 f(x)\cos x dx$	
	$2\int_{-1}^1 f(x)\cos x dx=0$, deci $\int_{-1}^1 f(x)\cos x dx=0$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 11

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\sqrt{7}\left(\sqrt{6}+1\right)-\sqrt{6}\left(\sqrt{7}+1\right)=\sqrt{42}+\sqrt{7}-\sqrt{42}-\sqrt{6}=\sqrt{7}-\sqrt{6}$	**2p**
	Cum $\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{6}}{\sqrt{7}^2-\sqrt{6}^2}=\sqrt{7}-\sqrt{6}$, obţinem că $\sqrt{7}\left(\sqrt{6}+1\right)-\sqrt{6}\left(\sqrt{7}+1\right)=\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}$	**3p**
2.	$f\left(x+1\right)-f\left(x\right)=\left(x+1\right)^2+\left(x+1\right)+1-\left(x^2+x+1\right)=$	**2p**
	$=x^2+2x+1+x+1+1-x^2-x-1=2x+2=g\left(x\right)$, pentru orice număr real x	**3p**
3.	$x-1=x^2-2x-1\Rightarrow x^2-3x=0$	**3p**
	$x=0$, care nu convine, sau $x=3$, care convine	**2p**
4.	Numărul de submulțimi ale lui M, cu cel puțin trei elemente, este egal cu $C_5^3+C_5^4+C_5^5=$	**3p**
	$=10+5+1=16$	**2p**
5.	$M\left(-1,2\right)$, unde M este mijlocul segmentului AD, $m_{AB}=1$	**3p**
	Cum MN este paralelă cu AB, ecuația dreptei MN este $y-2=x+1$, deci $y=x+3$	**2p**
6.	$4\sin^2 x+4\sin x\cos x+\cos^2 x=2+3\sin^2 x\Leftrightarrow 4\sin x\cos x=2-\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)$	**3p**
	$2\sin 2x=2-1$, deci $\sin 2x=\frac{1}{2}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A\left(0\right)=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&i&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(A\left(0\right)\right)=\begin{vmatrix}1&0&2\\0&i&0\\-1&0&-1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=-i+0+0-\left(-2i\right)-0-0=i$	**3p**
b)	$\det\left(A\left(a\right)\right)=\begin{vmatrix}1&a&2\\a&i&a\\-1&a&-1\end{vmatrix}=a^2+i$, pentru orice număr real a	**2p**
	Cum, pentru orice număr real a, $a^2+i\neq 0$, obţinem că $\det\left(A\left(a\right)\right)\neq 0$, deci, pentru orice număr real a, matricea $A\left(a\right)$ este inversabilă	**3p**
c)	$A\left(0\right)\cdot A\left(0\right)=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&i^2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=-I_3$	**2p**
	$\underbrace{A\left(0\right)\cdot A\left(0\right)\cdot A\left(0\right)\cdot\ldots\cdot A\left(0\right)}_{\text{de 2020 ori } A(0)}=\underbrace{\left(-I_3\right)\cdot\left(-I_3\right)\cdot\left(-I_3\right)\cdot\ldots\cdot\left(-I_3\right)}_{\text{de 1010 ori } (-I_3)}=I_3$	**3p**

2.a)	$x*1=3^{x+1}-3^{x+1}-3^{1+1}+12=$	**3p**
	$=-9+12=3$, pentru orice număr real x	**2p**
b)	$0*x=3^{0+x}-3^{0+1}-3^{x+1}+12=3^x-3^{x+1}+9$, deci $3^{x+1}-3^x=18$	**3p**
	$3^x(3-1)=18\Leftrightarrow 3^x=9$, deci $x=2$	**2p**
c)	$x*y=3\Leftrightarrow 3^{x+y}-3^{x+1}-3^{y+1}+9=0\Leftrightarrow 3^x\left(3^y-3\right)-3\left(3^y-3\right)=0\Leftrightarrow \left(3^x-3\right)\left(3^y-3\right)=0$	**3p**
	$3^x-3=0$ sau $3^y-3=0$, deci $x=1$ sau $y=1$, de unde obţinem $(x-1)(y-1)=0$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=2x-\dfrac{2x}{x^2+1}=$	**3p**
	$=\dfrac{2x^3+2x-2x}{x^2+1}=\dfrac{2x^3}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în $A(a,f(a))$ este $y-f(a)=f'(a)(x-a)$, deci axa Ox, de ecuaţie $y=0$, este tangentă la graficul funcţiei f dacă şi numai dacă există numărul real a astfel încât $f'(a)=0$ şi $f(a)=0$	**3p**
	Cum $f'(0)=0$ şi $f(0)=0$, obţinem că axa Ox este tangentă graficului funcţiei f	**2p**
c)	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ şi $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$	**2p**
	f este continuă pe $\mathbb{R}$, $f'(x)<0$, pentru orice $x\in(-\infty,0)\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(-\infty,0)$, $f(0)=0$ şi $f'(x)>0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(0,+\infty)$, deci, pentru orice număr natural nenul n, ecuaţia $f(x)=n$ are două soluţii reale distincte	**3p**
2.a)	$\displaystyle\int_1^e\frac{f(x)}{e^x}dx=\int_1^e\frac{1}{x}dx=\ln x\Big\vert_1^e=$	**3p**
	$=\ln e-\ln 1=1$	**2p**
b)	$\displaystyle\int_1^2x^3f\left(x^2\right)dx=\int_1^2xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}e^{x^2}\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=\dfrac{e^4-e}{2}=\dfrac{e(e-1)\left(e^2+e+1\right)}{2}$	**2p**
c)	$\displaystyle\int_1^e\frac{e^x}{x}dx+\int_1^ee^x\ln x\,dx=\int_1^e(\ln x)'e^x\,dx+\int_1^ee^x\ln x\,dx=e^x\ln x\Big\vert_1^e-\int_1^ee^x\ln x\,dx+\int_1^ee^x\ln x\,dx=$	**3p**
	$=e^e\ln e-e^1\ln 1=e^e$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 12

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$N=5+2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{13}+13+5-2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{13}+13=$	**3p**
	$=36=6^2$	**2p**
2.	$f\left(f\left(1\right)\right)+f\left(1\right)=1\Leftrightarrow f\left(1\right)+a+1+a=1\Leftrightarrow 3a+2=1$	**3p**
	$a=-\dfrac{1}{3}$	**2p**
3.	$4^x+\dfrac{4}{4^x}=4\Leftrightarrow 4^{2x}-4\cdot 4^x+4=0\Leftrightarrow\left(4^x-2\right)^2=0$	**3p**
	$2^{2x}=2$, deci $x=\dfrac{1}{2}$	**2p**
4.	Cifra sutelor se poate alege în 2 moduri și pentru fiecare alegere a cifrei sutelor, cifra zecilor se poate alege în 2 moduri	**2p**
	Pentru fiecare alegere a cifrei sutelor și a cifrei zecilor, cifra unităților se poate alege într-un singur mod, deci se pot forma $2\cdot 2\cdot 1=4$ numere cu proprietatea cerută	**3p**
5.	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}$, unde D este mijlocul segmentului BC	**2p**
	G este centrul de greutate al triunghiului ABC, deci $\overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ și, cum $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AG}$, obținem $6\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$	**3p**
6.	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\dfrac{AB\cdot AC\cdot\sin A}{2}$, deci $\sin A=\dfrac{1}{2}$	**3p**
	Cum ΔABC este ascuțitunghic, obținem $m\left(\sphericalangle A\right)=30^\circ$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}3&2&-1\\2&-2&1\\4&3&0\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A(0)\right)=\begin{vmatrix}3&2&-1\\2&-2&1\\4&3&0\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+(-6)+8-8-9-0=-15$	**3p**
b)	$\det\left(A(a)\right)=\begin{vmatrix}3&2&-1\\2&-2&1\\a+4&a+3&a\end{vmatrix}=-15(a+1)$, pentru orice număr real a	**2p**
	Rangul matricei $A(a)$ nu este egal cu $3\Leftrightarrow\det\left(A(a)\right)=0$, deci $a=-1$	**3p**
c)	$A(-1)A(-1)=\begin{pmatrix}3&2&-1\\2&-2&1\\3&2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2&-1\\2&-2&1\\3&2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&0&0\\5&10&-5\\10&0&0\end{pmatrix}=5B$, unde $B=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&2&-1\\2&0&0\end{pmatrix}$	**3p**
	$M=5^2B\cdot B$ și, cum matricea $B\cdot B$ are toate elementele numere întregi, obținem că matricea M are toate elementele numere întregi, divizibile cu 25	**2p**

2.a)	$x*(-x)=\sqrt[3]{x^3+(-x)^3+2020}=$	**3p**
	$=\sqrt[3]{x^3-x^3+2020}=\sqrt[3]{2020}$, pentru orice număr real x	**2p**
b)	$(x+1)*(-x)=\sqrt[3]{(x+1)^3-x^3+2020}=\sqrt[3]{3x^2+3x+2021}$, deci $3x^2+3x+2021=2021$	**3p**
	$3x(x+1)=0$, deci $x=-1$ sau $x=0$	**2p**
c)	$\sqrt[3]{3x^3+4040}=a \Leftrightarrow 3x^3+4040=a^3 \Leftrightarrow x^3=\dfrac{a^3-4040}{3}$	**3p**
	Pentru orice număr real a, ecuația $x^3=\dfrac{a^3-4040}{3}$ are o singură soluție reală $x=\sqrt[3]{\dfrac{a^3-4040}{3}}$, deci există un unic număr real x pentru care $x*x*x=a$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=3x^2-12x+9=$	**3p**
	$=3\left(x^2-4x+3\right)=3(x-1)(x-3)$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$ sau $x=3$	**2p**
	$f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in(-\infty,1] \Rightarrow f$ este crescătoare pe $(-\infty,1]$, $f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in[1,3] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[1,3]$ și $f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[3,+\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[3,+\infty)$	**3p**
c)	$f''(x)=6x-12$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
	Cum $f''(x)\leq 0$, pentru orice $x\in(-\infty,2]$, obținem că funcția f este concavă pe $(-\infty,2]$	**2p**
2.a)	$\int_0^1 f(x)\cdot\sqrt{x^2+3x+5}\,dx=\int_0^1(2x+3)\,dx=\left(x^2+3x\right)\Big\|_0^1=$	**3p**
	$=1+3-0=4$	**2p**
b)	$\int_{-4}^{1} f(x)\,dx=\int_{-4}^{1}\dfrac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+5}}\,dx=\int_{-4}^{1}\dfrac{\left(x^2+3x+5\right)'}{\sqrt{x^2+3x+5}}\,dx=2\sqrt{x^2+3x+5}\Big\|_{-4}^{1}=$	**3p**
	$=2\sqrt{9}-2\sqrt{9}=0$	**2p**
c)	Dacă F este o primitivă a lui f, atunci $\left(F(\sin x)\right)'=F'(\sin x)\cdot(\sin x)'=f(\sin x)\cdot\cos x$, pentru orice număr real x	**3p**
	$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\, f(\sin x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(F(\sin x)\right)'dx=F(\sin x)\Big\|_0^{\frac{\pi}{2}}=F(1)-F(0)=2\sqrt{1^2+3\cdot 1+5}-2\sqrt{5}=6-2\sqrt{5}$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 13

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$b_2 = b_1 q = 2q$ și $b_3 = b_1 q^2 = 2q^2$, unde q este rația progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$	**2p**
	$q^2 - 4q + 4 = 0$, deci $q = 2$	**3p**
2.	$A(f(1),1)$ aparține graficului funcției $f \Leftrightarrow f(f(1)) = 1$	**2p**
	$f(1) + m = 1 \Leftrightarrow 2m + 1 = 1$, deci $m = 0$	**3p**
3.	$x^2 - 1 = \sqrt{x^2 - 1} \Rightarrow x^2 - 1 = 0$ sau $x^2 - 1 = 1$	**2p**
	$x = -\sqrt{2}$, care nu convine, sau $x = -1$, care nu convine, sau $x = 1$, care nu convine, sau $x = \sqrt{2}$, care convine	**3p**
4.	$b^2 = c - a$, unde $\overline{abc}$ sunt numerele cu proprietatea dată și, cum $c \leq 9$ și $a \geq 1$, obținem $b^2 \leq 8$, deci $b \in \{0,1,2\}$	**2p**
	Pentru $b = 0$, obținem $c = a$, deci sunt 9 numere, pentru $b = 1$, obținem $c = a + 1$, deci sunt 8 numere, iar pentru $b = 2$, obținem $c = a + 4$, deci sunt 5 numere; în total sunt 22 de numere cu proprietatea cerută	**3p**
5.	Panta dreptei AH este $m_{AH} = \frac{1}{3}$	**2p**
	H este ortocentrul ΔABC, deci $AH \perp BC \Rightarrow m_{AH} \cdot m_{BC} = -1$, de unde obținem $m_{BC} = -3$	**3p**
6.	$\sin x - \cos x = \sqrt{2} \Rightarrow (\sin x - \cos x)^2 = 2 \Rightarrow \sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x = 2$	**2p**
	$2\sin x \cos x = -1$, deci $\sin 2x = -1$ și, cum $x \in (0,\pi)$, obținem $2x = \frac{3\pi}{2}$, deci $x = \frac{3\pi}{4}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$	**2p**
	$= 0 + 0 + 1 - 0 - 1 - 0 = 0$	**3p**
b)	$\det(A(m)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & 1 \\ m+1 & (m+1)^2 & 1 \end{vmatrix} = m(m-1)$, pentru orice număr real m	**2p**
	Matricea $A(m)$ este inversabilă $\Leftrightarrow \det(A(m)) \neq 0$, deci $m \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$	**3p**
c)	$\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\lvert\Delta\rvert$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & 1 \\ m+1 & (m+1)^2 & 1 \end{vmatrix} = m(m-1)$	**2p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABC} = 1 \Leftrightarrow \lvert m(m-1)\rvert = 2$, deci $m^2 - m = -2$, care nu convine, sau $m^2 - m = 2$, de unde obținem $m = -1$ sau $m = 2$, care convin	**3p**

2.a)	$x*1=2^{\ln x\cdot\ln 1}=$	**3p**
	$=2^{\ln x\cdot 0}=2^0=1$, pentru orice $x\in G$	**2p**
b)	$x*f=x\Leftrightarrow 2^{\ln x\cdot\ln f}=x\Leftrightarrow \ln x\cdot\ln f\cdot\ln 2=\ln x$, pentru orice $x\in G$, deci $\ln f\cdot\ln 2=1$, de unde obținem $\ln f=\frac{1}{\ln 2}$, deci $f=e^{\frac{1}{\ln 2}}\in G$	**3p**
	$e^{\frac{1}{\ln 2}}*x=2^{\ln e^{\frac{1}{\ln 2}}\cdot\ln x}=2^{\frac{1}{\ln 2}\cdot\ln x}=x$, pentru orice $x\in G$, deci $f=e^{\frac{1}{\ln 2}}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**2p**
c)	$x*\frac{1}{x}=2^{\ln x\cdot\ln\frac{1}{x}}=2^{-\ln^2 x}$, pentru orice $x\in G$	**2p**
	$2^{-\ln^2 x}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\ln^2 x=1$, de unde obținem $\ln x=-1$ sau $\ln x=1\Rightarrow x=\frac{1}{e}$ sau $x=e$, care convin	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=1-\frac{e^x+1}{e^x+x-1}=$	**3p**
	$=\frac{e^x+x-1-e^x-1}{e^x+x-1}=\frac{x-2}{e^x+x-1}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln e^x-\ln\left(e^x+x-1\right)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\frac{e^x}{e^x+x-1}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\frac{1}{1+\frac{x-1}{e^x}}=\ln 1=0$, deci dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=2$, $f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(0,2]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(0,2]$ și $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[2,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[2,+\infty)$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=+\infty$, $f(2)=2-\ln\left(e^2+1\right)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ și f este continuă pe $(0,+\infty)$, deci imaginea funcției f este $\left[2-\ln\left(e^2+1\right),+\infty\right)$	**3p**
2.a)	$\int\limits_0^1 f(x)dx=\int\limits_0^1\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx=\left(x+\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=1+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\ln 1=1+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$	**2p**
b)	$\int\limits_{-1}^1\left\vert x\,f(x)\right\vert dx=\int\limits_{-1}^0-x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx+\int\limits_0^1 x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx=\left(-\frac{x^2}{2}-\sqrt{x^2+1}\right)\Big\vert_{-1}^0+\left(\frac{x^2}{2}+\sqrt{x^2+1}\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=0-1+\frac{1}{2}+\sqrt{2}+\frac{1}{2}+\sqrt{2}-1=2\sqrt{2}-1$	**2p**
c)	Din regula lui l'Hospital, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int\limits_0^x f(t)dt}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{1}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)=2$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 14

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\log_3 5\cdot\log_5 9=\log_3 5\cdot\left(2\log_5 3\right)=2=$	**3p**
	$=\sqrt{2}^2$, deci numerele $\log_3 5$, $\sqrt{2}$ și $\log_5 9$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice	**2p**
2.	$g(-x)=f(-x)-f\left(-(-x)\right)=f(-x)-f(x)=$	**2p**
	$=-\left(f(x)-f(-x)\right)=-g(x)$, deci funcția g este impară	**3p**
3.	$3^x+\dfrac{\sqrt{3}}{3^x}=1+\sqrt{3}\Leftrightarrow 3^{2x}-\left(1+\sqrt{3}\right)\cdot 3^x+\sqrt{3}=0$	**2p**
	$\left(3^x-1\right)\left(3^x-\sqrt{3}\right)=0$, de unde obținem $x=0$ sau $x=\dfrac{1}{2}$	**3p**
4.	$T_{k+1}=C_{20}^k\left(x^3\right)^{20-k}\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^k=C_{20}^k x^{3(20-k)+\frac{-k}{3}}=C_{20}^k x^{60-\frac{10k}{3}}$, unde $k\in\{0,1,2,\ldots,20\}$	**3p**
	$60-\dfrac{10k}{3}=10\Leftrightarrow k=15$, deci $T_{16}=C_{20}^{15}x^{10}$ îl conține pe x^{10}	**2p**
5.	$3\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GC}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$	**2p**
	$\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=\vec{0}$, deci G este centrul de greutate al ΔABC	**3p**
6.	$\sin x\left(2\cos x-3\right)-\left(2\cos x-3\right)=0\Leftrightarrow\left(\sin x-1\right)\left(2\cos x-3\right)=0$	**2p**
	Cum $2\cos x-3\neq 0$ și $x\in(0,\pi)$, obținem $x=\dfrac{\pi}{2}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}3&-1&-1\\-1&1&0\\-1&0&1\end{vmatrix}=3+0+0-1-0-1=$	**3p**
	$=3-2=1$	**2p**
b)	$\det\left(M(m)\right)=(m-1)^2$, pentru orice număr real m	**2p**
	Dacă $m=1$, matricea $M(1)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ are rangul 1, iar dacă $m\neq 1$, atunci $\det\left(M(m)\right)\neq 0$ și matricea $M(m)$ are rangul 3, deci, pentru orice număr real m, rangul matricei $M(m)$ este diferit de 2	**3p**
c)	$M(m)\cdot A=I_3\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\2-m&m-1&0\\2-m&0&m-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	**3p**
	Obținem $m=2$, care convine	**2p**

2.a)	$(1+i)\circ(2-i)=1+i+2-i+(1+i)(2-i)=$	**3p**
	$=3+2-i+2i-i^2=6+i$	**2p**
b)	Dacă $z=a+ib$, unde a și b sunt numere reale, atunci $z\circ\overline{z}=a+ib+a-ib+(a+ib)(a-ib)=$	**3p**
	$=2a+a^2+b^2$, care este număr real, pentru orice număr complex z	**2p**
c)	$2z+z^2=-2\Leftrightarrow z^2+2z+2=0$	**2p**
	$\Delta=-4$, deci $z=-1-i$ sau $z=-1+i$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\cdot\dfrac{(2x-1)(x^2+x+1)-(2x+1)(x^2-x+1)}{(x^2+x+1)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{2x^2-2}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}=\dfrac{2(x-1)(x+1)}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\dfrac{x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\dfrac{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\ln1=0$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ la graficul funcţiei f	**2p**
c)	$f(1)+f(2)+\ldots+f(n)+2\ln n=\ln\dfrac{1}{3}+\ln\dfrac{3}{7}+\ln\dfrac{7}{13}+\ldots+\ln\dfrac{n^2-n+1}{n^2+n+1}+2\ln n=$	**3p**
	$=\ln\left(\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3}{7}\cdot\dfrac{7}{13}\cdot\ldots\cdot\dfrac{n^2-n+1}{n^2+n+1}\right)+\ln\left(n^2\right)=\ln\dfrac{1}{n^2+n+1}+\ln\left(n^2\right)=\ln\dfrac{n^2}{n^2+n+1}$, pentru orice număr natural nenul n	
	$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f(1)+f(2)+\ldots+f(n)+2\ln n\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\dfrac{n^2}{n^2+n+1}=\ln1=0$	**2p**
2.a)	$\int_0^1 e^x f(x)\,dx=\int_0^1\left(x^2+1\right)dx=\left(\dfrac{x^3}{3}+x\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{3}+1-0=\dfrac{4}{3}$	**2p**
b)	$\int_0^1 f(-x)\,dx=\int_0^1\left(x^2+1\right)e^x dx=\left(x^2+1\right)e^x\Big\vert_0^1-\int_0^1 2xe^x dx=2e-1-2(x-1)e^x\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=2e-1-0+(-2)=2e-3$	**2p**
c)	F este primitivă a lui $f\Rightarrow F'(x)=f(x)\Rightarrow -e^{-x}\left(-x^2+ax+b\right)+e^{-x}(-2x+a)=e^{-x}\left(x^2+1\right)$, pentru orice număr real x	**2p**
	$x^2-(a+2)x+a-b=x^2+1$, pentru orice număr real $x\Leftrightarrow a=-2$ și $b=-3$	**3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 15

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a+ib=3(a-ib)\Leftrightarrow 2a-4ib=0$, unde $z=a+ib$, $a,b\in\mathbb{R}$	**3p**
	$a=0$ și $b=0$, deci $z=0$	**2p**
2.	$f^2(2)=f(0)f(1)\Leftrightarrow (4+a)^2=a(2+a)\Leftrightarrow a^2+8a+16=a^2+2a$	**2p**
	$6a=-16$, deci $a=-\frac{8}{3}$	**3p**
3.	$-x=x^2-2x-2\Rightarrow x^2-x-2=0$	**2p**
	$x=-1$, care convine, sau $x=2$, care nu convine	**3p**
4.	Mulțimea $A=\{0,1,2,\ldots,9\}$ are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile	**2p**
	Numerele din mulțimea A al căror pătrat aparține mulțimii A sunt 0, 1, 2 și 3, deci sunt 4 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$	**1p**
5.	$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}=$	**2p**
	$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$	**3p**
6.	$\frac{BC}{\sin A}=2R\Leftrightarrow \sin A=\frac{BC}{2R}$	**2p**
	$BC=R\Rightarrow \sin A=\frac{1}{2}$ și, cum ΔABC este ascuțitunghic , obținem $m(\sphericalangle A)=30^\circ$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix}1 & a & 0\\ 0 & 1 & a\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1+0+0-0-0-0=$	**3p**
	$=1-0=1$, pentru orice număr real a	**2p**
b)	$B(a)=\begin{pmatrix}0 & a & 0\\ 0 & 0 & a\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow B(a)\cdot B(a)=\begin{pmatrix}0 & 0 & a^2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, pentru orice număr real a	**3p**
	$B(a)\cdot B(a)\cdot B(a)=\begin{pmatrix}0 & 0 & a^2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & a & 0\\ 0 & 0 & a\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=O_3$, pentru orice număr real a	**2p**

c)	$A(1)+A(2)+\ldots+A(n)=\begin{pmatrix} n & \frac{n(n+1)}{2} & 0 \\ 0 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix}$, pentru orice număr natural nenul n și, cum $\det A(2)\neq 0$, $(A(2))^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, obținem că $X=\begin{pmatrix} n & \frac{n(n+1)}{2}-2n & 4n-n(n+1) \\ 0 & n & \frac{n(n+1)}{2}-2n \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix}$	**3p**
	Suma elementelor matricei X este egală cu $3n$, deci $3n=21\Leftrightarrow n=7$, care convine	**2p**
2.a)	$1*2=1^2+4\cdot 1\cdot 2+2^2=$ $=1+8+4=13$	**3p** **2p**
b)	$x*x=x^2+4x\cdot x+x^2=6x^2$, $(x*x)*x^2=\left(6x^2\right)*x^2=36x^4+24x^4+x^4=61x^4$	**3p**
	$61x^4=61\Leftrightarrow x=-1$ sau $x=1$	**2p**
c)	$x*1=x^2+4x+1=x^2+4x+4-3=(x+2)^2-3$, pentru orice număr real x	**2p**
	De exemplu, pentru $a=\sqrt{p}-2$, unde p este număr prim, $p\geq 3$, obținem că $a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ și $a*1=p-3\in\mathbb{N}$, deci există o infinitate de numere iraționale a pentru care numărul $a*1$ este natural	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{1\cdot\sqrt{x^2+3}-(x-3)\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}}{x^2+3}=$	**3p**
	$=\dfrac{x^2+3-x^2+3x}{\left(x^2+3\right)\sqrt{x^2+3}}=\dfrac{3(x+1)}{\left(x^2+3\right)\sqrt{x^2+3}}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-3}{\sqrt{x^2+3}}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-6x+9}{x^2+3}\right)^{\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{6-6x}{x^2+3}\right)^{\frac{x}{2}}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(1+\dfrac{6-6x}{x^2+3}\right)^{\frac{x^2+3}{6-6x}}\right)^{\frac{x(6-6x)}{2\left(x^2+3\right)}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(1+\dfrac{6-6x}{x^2+3}\right)^{\frac{x^2+3}{6-6x}}\right)^{\frac{x^2\left(\frac{6}{x}-6\right)}{2x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}}=e^{-3}$	**2p**
c)	$f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in(-\infty,-1]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty,-1]$ și $f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[-1,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[-1,+\infty)$ și, cum $f(-1)=-2$, obținem că $f(x)\geq -2$, pentru orice număr real x	**3p**
	$x-3\geq -2\sqrt{x^2+3}\Leftrightarrow x+2\sqrt{x^2+3}\geq 3$, pentru orice număr real x, deci $x^5+2\sqrt{x^{10}+3}\geq 3$, pentru orice număr real x	**2p**
2.a)	$\int_1^3\left(f(x)-\ln x\right)dx=\int_1^3 x^2dx=\dfrac{x^3}{3}\Big\vert_1^3=$	**3p**
	$=\dfrac{27}{3}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{26}{3}$	**2p**

b)	$\int_1^2 \left(f(x) - x^2 \right) dx = \int_1^2 \ln x \, dx = x \ln x \Big\|_1^2 - \int_1^2 x \cdot \frac{1}{x} dx =$	**3p**
	$= 2\ln 2 - x \Big\|_1^2 = 2\ln 2 - 2 + 1 = 2\ln 2 - 1$	**2p**
c)	$\int_1^2 \frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right) dx = \int_1^2 \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x^2} + \ln\frac{1}{x}\right) dx = \int_1^2 \left(x^{-3} - \frac{1}{x}\ln x \right) dx = \left(\frac{x^{-2}}{-2} - \frac{1}{2}\ln^2 x \right) \Big\|_1^2 =$	**3p**
	$= -\frac{1}{8} - \frac{1}{2}\ln^2 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln^2 1 = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\ln^2 2 = \frac{3 - 4\ln^2 2}{8}$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 16

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$-3<-\sqrt{5}<-2$ și $2<\sqrt{7}<3$, deci $A=\{-2,-1,0,1,2\}$	**3p**
	Mulțimea A are 5 elemente	**2p**
2.	Parabolele asociate celor două funcții au același vârf, deci $\frac{2}{2}=\frac{-2b}{-2}$ și $\frac{4a-4}{4}=\frac{4b^2+4}{4}$	**3p**
	$b=1$, deci $a=3$	**2p**
3.	$1+x+1-x+3\cdot\sqrt[3]{1+x}\cdot\sqrt[3]{1-x}\left(\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}\right)=8$ și, cum $\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}=2$, obținem $2+6\cdot\sqrt[3]{1+x}\cdot\sqrt[3]{1-x}=8$	**3p**
	$\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}=1$, deci $x=0$, care convine	**2p**
4.	Numărul de submulțimi cu 2 elemente ale unei mulțimi cu n elemente, $n\geq 2$, este egal cu $C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$	**2p**
	$\frac{n(n-1)}{2}=12\Leftrightarrow n^2-n-24=0$, care nu are nicio soluție număr natural	**3p**
5.	$m_{AH}=3$ și $m_{BC}=-\frac{1}{3}\Rightarrow m_{AH}\cdot m_{BC}=-1$, deci $AH\perp BC$	**2p**
	$m_{BH}=\frac{1}{2}$ și $m_{AC}=-2\Rightarrow m_{BH}\cdot m_{AC}=-1$, deci $BH\perp AC$ și, cum $AH\cap BH=\{H\}$, obținem că H este ortocentrul triunghiului ABC	**3p**
6.	$2\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)=-1$, deci $2\left(2\cos^2 x-1\right)=-1$	**3p**
	$\cos^2 x=\frac{1}{4}$ și, cum $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, obținem $\cos x=\frac{1}{2}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}3&2&1\\6&4&2\\9&6&3\end{vmatrix}=36+36+36-36-36-36=$	**3p**
	$=108-108=0$	**2p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}30&20&10\\60&40&20\\90&60&30\end{pmatrix}=10A\Rightarrow\left(I_3-\frac{1}{11}A\right)\cdot B=I_3+A-\frac{1}{11}A-\frac{1}{11}A\cdot A=I_3+\frac{10}{11}A-\frac{10}{11}A=I_3$	**3p**
	$B\cdot\left(I_3-\frac{1}{11}A\right)=I_3-\frac{1}{11}A+A-\frac{1}{11}A\cdot A=I_3+\frac{10}{11}A-\frac{10}{11}A=I_3$, deci matricea $I_3-\frac{1}{11}A$ este inversa matricei B	**2p**

c)	Considerăm $U=\begin{pmatrix}4&2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $V=\begin{pmatrix}0&0&0\\6&5&2\\0&0&0\end{pmatrix}$ și $T=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\9&6&4\end{pmatrix}$, pentru care $\operatorname{rang}U=1$, $\operatorname{rang}V=1$ și $\operatorname{rang}T=1$	**3p**
	Cum $U+V+T=\begin{pmatrix}4&2&1\\6&5&2\\9&6&4\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}4&2&1\\6&5&2\\9&6&4\end{pmatrix}$, obținem că matricele $U,V,T\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ au rangul 1 și $U+V+T=B$	**2p**
2.a)	$(-1)*1=(-1)\cdot1-3\cdot(-1)-3\cdot1+a=a-1$	**3p**
	$a-1=0\Leftrightarrow a=1$	**2p**
b)	Există $e\in\mathbb{R}$ astfel încât $x*e=e*x=x$, pentru orice număr real $x\Leftrightarrow xe-3x-3e+a=x$, pentru orice număr real x	**2p**
	$x(e-4)-3e+a=0$, pentru orice număr real $x\Leftrightarrow e=4$ și $a=12$	**3p**
c)	$x*y=xy-3x-3y+9+a-9=(x-3)(y-3)+a-9$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
	Pentru orice $x,y\in[3,+\infty)$, $x-3\geq0$ și $y-3\geq0$ și, cum $a\in[12,+\infty)$, obținem $x*y\geq3$, deci mulțimea $[3,+\infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziție „$*$”	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(\sqrt{x+1}\right)'-\left(\sqrt{x}\right)'=$	**2p**
	$=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$, $x\in(0,+\infty)$	**3p**
b)	$f'(1)+f'(2)+\ldots+f'(n)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+1}}-\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2+1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}-1\right)$, pentru orice număr natural nenul n	**2p**
	$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{2}+f'(1)+f'(2)+\ldots+f'(n)\right)^{\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2\sqrt{n+1}}-\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{n+1}}\right)^{\sqrt{n}}=$ $=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{2\sqrt{n+1}}\right)^{2\sqrt{n+1}}\right)^{\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n+1}}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$	**3p**
c)	Pentru orice $x\in(0,+\infty)$, $\sqrt{x+1}>\sqrt{x}>0$, deci $\frac{1}{\sqrt{x+1}}-\frac{1}{\sqrt{x}}<0\Rightarrow f'(x)<0\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(0,+\infty)$, deci f este injectivă	**2p**
	$\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, f monotonă și continuă pe $(0,+\infty)$, deci $\operatorname{Im}f=(0,1)\Rightarrow f$ este surjectivă, de unde obținem că f este bijectivă	**3p**
2.a)	$\int_0^1\left(x^4+1\right)f(x)dx=\int_0^1x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=\frac{1}{3}-0=\frac{1}{3}$	**2p**
b)	$x\in[0,1]\Rightarrow x^2\leq x$, deci $\int_0^1f(x)dx=\int_0^1\frac{x^2}{x^4+1}dx\leq\int_0^1\frac{x}{x^4+1}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\left(x^2\right)'}{\left(x^2\right)^2+1}dx=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(x^2\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}1-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}0=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{8}$	**2p**

c)	$\int_0^1 F(x)dx = \int_0^1 x'F(x)dx = xF(x)\Big\|_0^1 - \int_0^1 x\,f(x)dx = F(1) - \int_0^1 \frac{x^3}{x^4+1}dx =$	**3p**
	$= -\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{\left(x^4+1\right)'}{x^4+1}dx = -\frac{1}{4}\ln\left(x^4+1\right)\Big\|_0^1 = -\frac{1}{4}\ln 2$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 17

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z^2+z+2=0 \Rightarrow z\neq 0$ și $z+\frac{2}{z}=-1$	**2p**
	$\left(z+\frac{2}{z}\right)^2=1$, deci $z^2+4+\frac{4}{z^2}=1$, de unde obținem $z^2+\frac{4}{z^2}=-3$	**3p**
2.	$f\left(x+\frac{1}{2}\right)=\left\{2\left(x+\frac{1}{2}\right)\right\}=\{2x+1\}=$	**2p**
	$=\{2x\}=f(x)$, pentru orice număr real x	**3p**
3.	$3^x(3-1)=2^{x+1}(2-1)\Leftrightarrow 2\cdot 3^x=2^{x+1}\Leftrightarrow 3^x=2^x$	**3p**
	$x=0$	**2p**
4.	Mulțimea A are 23 de elemente, deci sunt 23 de cazuri posibile	**2p**
	Numerele a din mulțimea A astfel încât 3, 4 și a să fie lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic sunt $\sqrt{7}$ (dacă a este lungimea unei catete) și $\sqrt{25}$ (dacă a este lungimea ipotenuzei), deci sunt 2 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{2}{23}$	**1p**
5.	$\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{DA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DA}+\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AD}\right)$	**2p**
	$\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{DA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AD}\right)=\frac{4}{3}\overrightarrow{DM}$, deci $\overrightarrow{DM}$ și $\overrightarrow{DN}$ sunt coliniari, de unde obținem că punctele D, M și N sunt coliniare	**3p**
6.	$\frac{AB}{AC}+\frac{AC}{AB}=\frac{AB^2+AC^2}{AB\cdot AC}$	**2p**
	Cum $\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}<\frac{AB^2+AC^2}{2AB\cdot AC}$, obținem $\cos A<\frac{1}{2}\left(\frac{AB}{AC}+\frac{AC}{AB}\right)$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(m))=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & m & 1\\ 1 & -3 & 2\end{vmatrix}=2m+(-6)+2-m-(-3)-8=$	**3p**
	$=m+5-14=m-9$, pentru orice număr real m	**2p**
b)	Sistemul de ecuații este omogen, deci admite soluții diferite de $(0,0,0)\Leftrightarrow \det(A(m))=0$	**3p**
	$m=9$	**2p**

c)	$A(9)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 9 & 1\\ 1 & -3 & 2\end{pmatrix}$, $\det(A(9))=0$ și $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 9\end{vmatrix}\neq 0\Rightarrow \operatorname{rang}(A(9))=2$, deci soluțiile nenule ale sistemului de ecuații sunt de forma $\left(-\frac{7}{5}\alpha,\frac{1}{5}\alpha,\alpha\right)$, unde $\alpha\in\mathbb{R}^*$	**3p**
	$\frac{x_0^2+y_0^2-z_0^2}{x_0^2+y_0^2+z_0^2}=\frac{\frac{49\alpha^2}{25}+\frac{\alpha^2}{25}-\alpha^2}{\frac{49\alpha^2}{25}+\frac{\alpha^2}{25}+\alpha^2}=\frac{25\alpha^2}{75\alpha^2}=\frac{1}{3}$	**2p**
2.a)	$2*(-1)=2\cdot(-1)+5\cdot 2+5\cdot(-1)+20=$	**3p**
	$=-2+10+(-5)+20=23$	**2p**
b)	$x*(-4)=x\cdot(-4)+5x+5\cdot(-4)+20=-4x+5x+(-20)+20=x$, pentru orice număr întreg x	**3p**
	$(-4)*x=(-4)\cdot x+5\cdot(-4)+5x+20=-4x+(-20)+5x+20=x$, pentru orice număr întreg x, deci $e=-4$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**2p**
c)	Cum $0\circ 0=20$, $0\in A(0)$ și $20\notin A(0)$, mulțimea $A(0)$ nu este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu legea de compoziție „$*$”	**1p**
	$x,y\in A(1)\Rightarrow x=3m+1$ și $y=3n+1$, unde $m,n\in\mathbb{N}\Rightarrow x*y=9mn+18m+18n+31\in A(1)$, deci $A(1)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu legea de compoziție „$*$”, deci $r=1$ convine	**2p**
	$x,y\in A(2)\Rightarrow x=3k+2$ și $y=3l+2$, unde $k,l\in\mathbb{N}\Rightarrow x*y=9kl+21k+21l+44\in A(2)$, deci $A(2)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu legea de compoziție „$*$”, deci $r=2$ convine	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=e^x-e+(x-1)e^x=$	**3p**
	$=e^x-e+xe^x-e^x=xe^x-e$, $x\in(-1,+\infty)$	**2p**
b)	$f(1)=0$, $f'(1)=0$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)$, adică $y=0$	**3p**
c)	$f''(x)=(x+1)e^x>0$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)\Rightarrow f'$ strict crescătoare pe $(-1,+\infty)$ și, cum $f'(1)=0$, obținem că $f'(x)<0$, pentru orice $x\in(-1,1)$ și $f'(x)>0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$	**3p**
	Cum f este strict descrescătoare pe $(-1,1)$, f este strict crescătoare pe $(1,+\infty)$ și f este continuă în $x_0=1$, obținem că $x_0=1$ este punctul de extrem al funcției f	**2p**
2.a)	$\int_0^1\frac{f(x)}{\ln(x+2)}dx=\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx=\operatorname{arctg}x\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}0=\frac{\pi}{4}$	**2p**
b)	Din regula lui l'Hospital, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+2)}{x^2+1}=$	**3p**
	$=\ln 2$	**2p**
c)	$\int_0^1\left(f(x)+\frac{\operatorname{arctg}x}{x+2}\right)dx=\int_0^1\left(\frac{1}{x^2+1}\cdot\ln(x+2)+\operatorname{arctg}x\cdot\frac{1}{x+2}\right)dx=\int_0^1\left(\operatorname{arctg}x\cdot\ln(x+2)\right)'dx=$	**3p**
	$=\operatorname{arctg}x\cdot\ln(x+2)\Big\vert_0^1=\operatorname{arctg}1\cdot\ln 3-\operatorname{arctg}0\cdot\ln 2=\frac{\pi}{4}\ln 3$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 18

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z^2-6z+10=(3+i)^2-6(3+i)+10=9+6i+i^2-18-6i+10=$	**3p**
	$=9+(-1)-8=0$	**2p**
2.	$f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^2-4x=x^2+2x-6\Leftrightarrow -6x=-6$	**3p**
	$x=1$	**2p**
3.	$2x+3=(x+1)^2\Rightarrow 2x+3=x^2+2x+1\Rightarrow x^2=2$	**2p**
	$x=-\sqrt{2}$, care nu convine sau $x=\sqrt{2}$, care convine	**3p**
4.	Mulţimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Numerele naturale de două cifre care au produsul cifrelor un număr prim sunt 12, 21, 13, 31, 15, 51, 17 şi 71, deci sunt 8 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{8}{90}=\dfrac{4}{45}$	**1p**
5.	B este mijlocul segmentului $AM\Rightarrow x_B=\dfrac{x_A+x_M}{2}$ şi $y_B=\dfrac{y_A+y_M}{2}$, deci $M(7,-4)$	**2p**
	M este mijlocul segmentului $BN\Rightarrow x_M=\dfrac{x_B+x_N}{2}$ şi $y_M=\dfrac{y_B+y_N}{2}$, deci $N(11,-7)$	**3p**
6.	$\sin x+\cos x=\cos 2x\Leftrightarrow \sin x+\cos x=\cos^2 x-\sin^2 x\Leftrightarrow \sin x+\cos x=(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)$	**3p**
	Cum $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, obţinem $\cos x-\sin x=1$, deci $\sin x-\cos x=-1$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=2+0+0-0-0-0=2$	**3p**
b)	$A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}2^x&0&0\\0&1&2x\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^y&0&0\\0&1&2y\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^x\cdot 2^y&0&0\\0&1&2y+2x\\0&0&1\end{pmatrix}=$	**2p**
	$=\begin{pmatrix}2^{x+y}&0&0\\0&1&2(x+y)\\0&0&1\end{pmatrix}=A(x+y)$, pentru orice numere reale x şi y	**3p**

c)	$B=A(1+2+3)-I_3=A(6)-I_3=\begin{pmatrix}2^6-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 12\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$	**2p**
	Cum $\det B=0$ și $\begin{vmatrix}2^6-1 & 0\\ 0 & 12\end{vmatrix}=12\left(2^6-1\right)\neq 0$, obținem că rangul matricei B este egal cu 2	**3p**
2.a)	$1*1=1^2\cdot 1^2-2\cdot 1^2-2\cdot 1^2+6=$	**3p**
	$=1-2-2+6=3$	**2p**
b)	$x^2y^2-2x^2-2y^2+6=2\Leftrightarrow x^2\left(y^2-2\right)-2\left(y^2-2\right)=0\Leftrightarrow\left(x^2-2\right)\left(y^2-2\right)=0$	**3p**
	$x^2=2$ sau $y^2=2$, ceea ce este imposibil pentru orice numere raționale x și y, deci $x*y\neq 2$	**2p**
c)	$m^2n^2-2m^2-2n^2+6=3\Leftrightarrow m^2n^2-2m^2-2n^2+4=1\Leftrightarrow\left(m^2-2\right)\left(n^2-2\right)=1$	**2p**
	m și n sunt numere întregi $\Rightarrow m^2-2=n^2-2=-1$ sau $m^2-2=n^2-2=1$, deci $m^2=n^2=1$ sau $m^2=n^2=3$, de unde obținem perechile de numere întregi $(-1,-1)$, $(-1,1)$, $(1,-1)$, $(1,1)$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=2x+2-\dfrac{2}{x+1}=$	**3p**
	$=\dfrac{2x^2+4x+2-2}{x+1}=\dfrac{2x(x+2)}{x+1}$, $x\in(-1,+\infty)$	**2p**
b)	Tangenta la graficul funcției f în punctul $A(a,f(a))$ are panta egală cu $f'(a)$ și, cum dreapta de ecuație $y=3x+2020$ are panta egală cu 3, obținem $f'(a)=3$	**2p**
	$\dfrac{2a(a+2)}{a+1}=3\Leftrightarrow 2a^2+a-3=0$ și, cum $a\in(-1,+\infty)$, obținem $a=1$	**3p**
c)	$f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in(-1,0]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-1,0]$ și $f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[0,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[0,+\infty)\Rightarrow f(x)\geq f(0)$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)$ și, cum $f(0)=0$, obținem $f(x)\geq 0$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)$	**3p**
	$x^2+2x\geq 2\ln(x+1)\Leftrightarrow(x+1)^2\geq 2\ln(x+1)+1$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_0^3 f^2(x)dx=\int_0^3\left(x^2+2\right)dx=\left(\dfrac{x^3}{3}+2x\right)\Big|_0^3=$	**3p**
	$=9+6=15$	**2p**
b)	$0\leq I_n=\int_0^1 x^n f(x)dx=\int_0^1 x^n\sqrt{x^2+2}\,dx\leq\sqrt{3}\int_0^1 x^n dx=\sqrt{3}\cdot\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1=\dfrac{\sqrt{3}}{n+1}$, pentru orice număr natural nenul n	**3p**
	Cum $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{3}}{n+1}=0$, obținem $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$	**2p**
c)	$I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{x^2+2}\,dx=\int_0^1\dfrac{x^n\left(x^2+2\right)}{\sqrt{x^2+2}}dx=\int_0^1 x^{n+1}\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}dx+2\int_0^1 x^{n-1}\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}dx=$	**2p**
	$=\int_0^1 x^{n+1}\left(\sqrt{x^2+2}\right)'dx+2\int_0^1 x^{n-1}\left(\sqrt{x^2+2}\right)'dx=\sqrt{3}-(n+1)I_n+2\sqrt{3}-2(n-1)I_{n-2}$ și obținem $(n+2)I_n+2(n-1)I_{n-2}=3\sqrt{3}$, pentru orice număr natural n, $n\geq 3$	**3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 19

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$b_4 = b_1q^3 = 2\cdot\sqrt{5}^3 = 10\sqrt{5} = \sqrt{500}$	**2p**
	$484 < 500 < 529 \Rightarrow 22 < \sqrt{500} < 23$, deci partea întreagă a lui b_4 este egală cu 22	**3p**
2.	$f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(f(x)) = x \Leftrightarrow 2f(x) - 3 = x \Leftrightarrow 2(2x-3) - 3 = x$	**3p**
	$x = 3$	**2p**
3.	$\log_2 \frac{2x^2+x+1}{x^2-x+2} = 1 \Rightarrow \frac{2x^2+x+1}{x^2-x+2} = 2 \Rightarrow 2x^2+x+1 = 2x^2-2x+4$	**3p**
	$x = 1$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Numerele naturale de două cifre care au suma cifrelor un număr divizibil cu 11 sunt 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83 și 92, deci sunt 8 cazuri favorabile	**2p**
	$p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{8}{90} = \frac{4}{45}$	**1p**
5.	$\vec{u} + \vec{v} = (1+a)\vec{i} - \vec{j} \Rightarrow \lvert\vec{u}+\vec{v}\rvert^2 = (1+a)^2 + 1$	**2p**
	Cum $\lvert\vec{u}\rvert^2 = 2$ și $\lvert\vec{v}\rvert^2 = a^2+4$, obținem $a^2+2a+2 = 2+a^2+4$, deci $a = 2$	**3p**
6.	$(\sin x + \cos x)^2 = 2\cos^2 x \Leftrightarrow \sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x = 2\cos^2 x \Leftrightarrow \sin 2x = \cos 2x$	**2p**
	$\operatorname{tg} 2x = 1$ și, cum $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, obținem $2x = \frac{\pi}{4}$, deci $x = \frac{\pi}{8}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$	**2p**
	$= 0+2+1-1-0-2 = 0$	**3p**
b)	Dacă $m = -3$ și (x_0, y_0, z_0) este soluție a sistemului de ecuații, atunci $\begin{cases} -3x_0 + y_0 + z_0 = 1 \\ 2x_0 - 2y_0 + z_0 = 2 \\ x_0 + y_0 - 2z_0 = -2 \end{cases}$	**2p**
	Prin adunarea celor trei relații, obținem $0 = 1$, ceea ce este imposibil, deci, pentru $m = -3$, sistemul de ecuații nu are soluții	**3p**
c)	$\det(A(m)) = m^3 + 2m^2 - 3m = m(m-1)(m+3)$, pentru orice număr real m	**1p**
	Dacă $m = 0$, atunci $\begin{cases} y+z = 1 \\ 2x+y+z = 2 \\ x+y+z = 1 \end{cases}$, care nu are soluții, dacă $m = 1$, atunci $\begin{cases} x+y+z = 1 \\ 2x+2y+z = 2 \\ x+y+2z = 2 \end{cases}$, care nu are soluții	**2p**

	$m\in\mathbb{R}\setminus\{-3,0,1\}\Rightarrow \det\left(A(m)\right)\neq 0$, deci sistemul de ecuații are soluție unică și, cum pentru $m=-3$, sistemul nu are soluții, obținem că sistemul de ecuații are cel mult o soluție	**2p**
2.a)	$(1+i)\circ(1-i)=1+i+1-i-\frac{1}{2}(1-i)-\frac{1}{2}(1+i)=$	**3p**
	$=2-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i=1$	**2p**
b)	$z_1,z_2\in H\Rightarrow z_1=2+bi$ și $z_2=2+ci$, $b,c\in\mathbb{R}\Rightarrow z_1\circ z_2=2+bi+2+ci-\frac{1}{2}(2-bi)-\frac{1}{2}(2-ci)=$	**3p**
	$=4+bi+ci-1+\frac{1}{2}bi-1+\frac{1}{2}ci=2+\frac{3}{2}(b+c)i\in H$, deci H este parte stabilă a lui $\mathbb{C}$ în raport cu legea de compoziție „$\circ$”	**2p**
c)	Dacă $z_0=a+ib$, cu $a,b\in\mathbb{R}$, pentru $z=x-ib$, unde x este număr real oarecare, obținem $z_0\circ z=a+ib+x-ib-\frac{1}{2}(a-ib)-\frac{1}{2}(x+ib)=$	**3p**
	$=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}x\in\mathbb{R}$, deci există o infinitate de numere complexe z cu proprietatea că numărul $z_0\circ z$ este real	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(\left(x^3-3x+2\right)^{\frac{1}{3}}\right)'=\frac{1}{3}\left(x^3-3x+2\right)^{-\frac{2}{3}}\left(3x^2-3\right)=$	**3p**
	$=\frac{1}{3}\cdot\frac{3\left(x^2-1\right)}{\sqrt[3]{\left(x^3-3x+2\right)^2}}=\frac{(x-1)(x+1)}{\sqrt[3]{\left(x^3-3x+2\right)^2}}$, $x\in(1,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}}\frac{f(x)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}}\frac{\sqrt[3]{x^3-3x+2}}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}}\sqrt[3]{\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^3}}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}}\sqrt[3]{\frac{x+2}{x-1}}=+\infty$	**2p**
c)	$f'(x)>0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)\Rightarrow f$ este strict crescătoare, deci injectivă	**2p**
	$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ și f este continuă, deci pentru orice $a\in(0,+\infty)$, ecuația $f(x)=a$ are soluție unică	**3p**
2.a)	$\int_1^4 e^x f(x)\,dx=\int_1^4\left(x^2+2\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+2x\right)\Big|_1^4=$	**3p**
	$=\frac{4^3}{3}+8-\frac{1}{3}-2=21+6=27$	**2p**
b)	$\int_1^e f(\ln x)\,dx=\int_1^e\frac{\ln^2 x+2}{e^{\ln x}}dx=\int_1^e\frac{1}{x}\left(\ln^2 x+2\right)dx=\left(\frac{1}{3}\ln^3 x+2\ln x\right)\Big|_1^e=$	**3p**
	$=\frac{1}{3}\ln^3 e+2\ln e-\frac{1}{3}\ln^3 1-2\ln 1=\frac{1}{3}+2=\frac{7}{3}$	**2p**
c)	Dacă F este o primitivă a lui f, atunci $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt=\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+2}{e^x}=2$	**3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 20

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	Cum $2-3i=\overline{2+3i}$, $A=z(2+3i)+\bar{z}\cdot\overline{2+3i}=$	**2p**
	$=z(2+3i)+\overline{z(2+3i)}\in\mathbb{R}$, deoarece este suma dintre un număr complex și conjugatul său	**3p**
2.	$f\left(3+\sqrt{2}\right)=\left(3+\sqrt{2}\right)^2-6\left(3+\sqrt{2}\right)+7=9+6\sqrt{2}+2-18-6\sqrt{2}+7=9+2-18+7=$	**3p**
	$=0$, deci $f\left(\sqrt{2}\right)\cdot f\left(1+\sqrt{2}\right)\cdot f\left(2+\sqrt{2}\right)\cdot\ldots\cdot f\left(10+\sqrt{2}\right)=0$	**2p**
3.	$\lg\left(x^2+x-2\right)=\lg\left(10\cdot\frac{x-1}{2}\right)\Rightarrow x^2+x-2=5x-5\Rightarrow x^2-4x+3=0$	**3p**
	$x=1$, care nu convine, sau $x=3$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Numerele naturale de două cifre care au produsul cifrelor mai mare decât 51 sunt 69, 96, 78, 87, 79, 97, 88, 89, 98 și 99, deci sunt 10 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{10}{90}=\frac{1}{9}$	**1p**
5.	$AM=5$, $BM=5$, $CM=5$	**3p**
	$AM=BM=CM$, deci punctul M este centrul cercului circumscris ΔABC	**2p**
6.	$\frac{AB}{\sin C}=\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin A}=2R\Rightarrow\sin A+\sin B+\sin C=\frac{BC}{2R}+\frac{AC}{2R}+\frac{AB}{2R}\Rightarrow\frac{AB+AC+BC}{2R}=\frac{1}{rR}$	**3p**
	$p=\frac{1}{r}$ și, cum $r=\frac{S}{p}$, obținem $S=1$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}2&1&0\\4&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A(0)\right)=\begin{vmatrix}2&1&0\\4&1&0\\1&0&-1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=-2+0+0-0-(-4)-0=2$	**3p**
b)	$\det\left(A(m)\right)=2(1-m)(1+m)$, pentru orice număr real m	**3p**
	Matricea $A(m)$ este inversabilă $\Leftrightarrow\det\left(A(m)\right)\neq0\Leftrightarrow m\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$	**2p**
c)	$m\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}\Rightarrow\det\left(A(m)\right)\neq0$, deci sistemul de ecuații are soluția $\left(1,\frac{2}{m+1},\frac{2}{m+1}\right)$, unde $m\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$	**3p**
	$\frac{y_0}{z_0}=\frac{\frac{2}{m+1}}{\frac{2}{m+1}}=1=x_0$, pentru orice $m\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$	**2p**

2.a)	$2*(-2)=2\cdot\sqrt{(-2)^2+1}+(-2)\cdot\sqrt{2^2+1}=$	**3p**
	$=2\sqrt{5}-2\sqrt{5}=0$	**2p**
b)	$x*0=x\sqrt{0^2+1}+0\cdot\sqrt{x^2+1}=x\sqrt{1}=x$, pentru orice număr real x	**2p**
	$0*x=0\cdot\sqrt{x^2+1}+x\sqrt{0^2+1}=x\sqrt{1}=x$, pentru orice număr real x, deci $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**3p**
c)	$f(x)*f(y)=f(x)\sqrt{f^2(y)+1}+f(y)\sqrt{f^2(x)+1}=\frac{e^{2x}-1}{2e^x}\sqrt{\left(\frac{e^{2y}-1}{2e^y}\right)^2+1}+\frac{e^{2y}-1}{2e^y}\sqrt{\left(\frac{e^{2x}-1}{2e^x}\right)^2+1}=$	**2p**
	$=\frac{e^{2x}-1}{2e^x}\sqrt{\left(\frac{e^{2y}+1}{2e^y}\right)^2}+\frac{e^{2y}-1}{2e^y}\sqrt{\left(\frac{e^{2x}+1}{2e^x}\right)^2}=\frac{e^{2x}-1}{2e^x}\cdot\frac{e^{2y}+1}{2e^y}+\frac{e^{2y}-1}{2e^y}\cdot\frac{e^{2x}+1}{2e^x}=\frac{e^{2(x+y)}-1}{2e^{x+y}}=f(x+y)$, pentru orice numere reale x și y	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{e^x\sqrt{x^2+1}-e^x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=$	**3p**
	$=\frac{e^x\left(x^2+1\right)-xe^x}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}=\frac{e^x\left(x^2-x+1\right)}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{x\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{e^x-e^{-x}}{x}\right)$	**2p**
	Cum $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\left(e^x-e^{-x}\right)'}{x'}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}}{1}=2$, obținem $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}=2$	**3p**
c)	$f'(x)>0$, pentru orice număr real $x\Rightarrow f$ este strict crescătoare	**2p**
	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ și f este continuă, deci Im $f=(0,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2\frac{1}{x^2+4}dx=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\Big\vert_0^2=$	**3p**
	$=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}1-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}0=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{8}$	**2p**
b)	$0<\frac{1}{x^2+4}\le\frac{1}{4}$, deci $0<\left(\frac{1}{x^2+4}\right)^n\le\frac{1}{4^n}$, pentru orice $x\in[0,1]$ și orice număr natural n,	**3p**
	deci $0\le\int_0^1\left(\frac{1}{x^2+4}\right)^n dx\le\int_0^1\frac{1}{4^n}dx$, de unde obținem $0\le I_n\le\frac{1}{4^n}$, pentru orice număr natural n	
	Cum $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{4^n}=0$, obținem $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$	**2p**
c)	$\int_0^a xf(x)dx=\int_0^a\frac{x}{x^2+4}dx=\frac{1}{2}\int_0^a\frac{\left(x^2+4\right)'}{x^2+4}dx=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right)\Big\vert_0^a=\frac{1}{2}\ln\left(a^2+4\right)-\frac{1}{2}\ln4=\frac{1}{2}\ln\frac{a^2+4}{4}$	**3p**
	$\frac{1}{2}\ln\frac{a^2+4}{4}=\frac{1}{2}\ln\frac{5}{4}\Leftrightarrow a^2+4=5$ și, cum $a>0$, obținem $a=1$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_2=\frac{a_1+a_3}{2}\Rightarrow 2a_2=a_1+a_3$	**3p**
	$a_1+a_2+a_3=3a_2\Leftrightarrow 30=3a_2\Leftrightarrow a_2=10$	**2p**
2.	$f(3)=0$	**2p**
	$(f\circ f)(3)=f\big(f(3)\big)=f(0)=9$	**3p**
3.	$(x-6)(x+6)=2^6\Rightarrow x^2-36=64\Rightarrow x^2-100=0$	**3p**
	$x=-10$, care nu convine; $x=10$, care convine	**2p**
4.	Cifra zecilor, fiind nenulă, se poate alege în 5 moduri	**2p**
	Pentru fiecare alegere a cifrei zecilor, cifra unităților se poate alege în câte 5 moduri, deci se pot forma $5\cdot 5=25$ de numere	**3p**
5.	$\overrightarrow{CE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$	**3p**
	Cum $\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$, obținem $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$	**2p**
6.	$C=\pi-(A+B)=\frac{\pi}{3}\Rightarrow \sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$	**3p**
	$\frac{AB}{\sin C}=2R\Rightarrow R=2$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&4&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det\big(A(1)\big)=\begin{vmatrix}1&2&1\\1&4&1\\1&-1&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=4+(-1)+2-4-(-1)-2=0$	**3p**
b)	$\det\big(A(a)\big)=2\left(a^2-1\right)$, pentru orice număr real a	**2p**
	$\begin{vmatrix}2&1\\4&1\end{vmatrix}\neq 0$, deci matricea $A(a)$ are rangul $2\Leftrightarrow \det\big(A(a)\big)=0$, de unde obținem $a=-1$ sau $a=1$	**3p**
c)	Sistemul are soluție unică (x_0,y_0,z_0), deci $a\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ și soluția sistemului este $\left(\frac{2}{a+1},1,\frac{2}{a+1}\right)$	**3p**
	$\left(\frac{2}{a+1}\right)^2+1+\left(\frac{2}{a+1}\right)^2=3$ și, cum $a\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, obținem $a=-3$	**2p**

2.a)	$x*y=xy-\frac{x}{2}-\frac{y}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=$	**2p**
	$=x\left(y-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(y-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
b)	$\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x}-x\right)=0$	**1p**
	$\frac{1}{x}-\frac{1}{2}=0\Rightarrow x=2$	**1p**
	$x-\frac{1}{2}=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}$	**1p**
	$\frac{1}{x}-x=0\Rightarrow x=-1$ sau $x=1$	**2p**
c)	Presupunem că există x și y numere întregi, astfel încât x să fie simetricul lui y, deci $x*y=e$, de unde obținem $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$	**2p**
	$\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)=1\Rightarrow(2x-1)(2y-1)=4$, ceea ce nu convine, deoarece x și y sunt numere întregi și 4 este număr par	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=2x-8+\frac{8}{x}=$	**3p**
	$=\frac{2x^2-8x+8}{x}=\frac{2(x-2)^2}{x}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	Dreapta este paralelă cu tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=2$, deci are panta egală cu $f'(2)$	**2p**
	Cum $f'(2)=0$, ecuația dreptei este $y=3$	**3p**
c)	$f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $(0,+\infty)$ și, cum $f(2)=0$, obținem $f(a)\geq 0$, pentru orice $a\in[2,+\infty)$	**2p**
	$f(a)\geq 0\Rightarrow g(a)\geq h(a)\Rightarrow b\geq c$, pentru orice $a\in[2,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\int_0^1\left(x^2+4\right)f(x)dx=\int_0^1\left(x^2-4\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-4x\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=\frac{1}{3}-4=-\frac{11}{3}$	**2p**
b)	$F'(x)=f(x)=\frac{x^2-4}{x^2+4}$, $F''(x)=f'(x)=\frac{16x}{\left(x^2+4\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$, unde F este o primitivă a lui f	**3p**
	$F''(x)\leq 0$, pentru orice $x\in(-\infty,0]$, deci funcția F este concavă pe $(-\infty,0]$	**2p**
c)	$x\in[1,2]\Rightarrow x^n\left(x^2-4\right)\leq 0$ și $\frac{1}{x^2+4}\geq\frac{1}{8}$, deci $x^n f(x)\leq\frac{1}{8}x^n\left(x^2-4\right)$	**2p**
	$I_n\leq\int_1^2\frac{1}{8}x^n\left(x^2-4\right)dx=\frac{1}{8}\left(\frac{x^{n+3}}{n+3}-\frac{4x^{n+1}}{n+1}\right)\Big\vert_1^2=\frac{1}{8}\left(-\frac{2^{n+4}}{(n+3)(n+1)}-\frac{1}{n+3}+\frac{4}{n+1}\right)$	**2p**
	Cum $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2^{n+4}}{(n+3)(n+1)}=+\infty$, obținem $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=-\infty$	**1p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Test 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că numărul $a=(4+3i)^2+(3-4i)^2$ este natural, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Determinați cel mai mare număr întreg m pentru care soluțiile ecuației $x^2-11x+m=0$ sunt numere reale.

5p **3.** Rezolvați în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_7(7x)+\log_x 7=3$.

5p **4.** Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi, știind că aceasta are exact 45 de submulțimi cu două elemente.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,-2)$, $B(-4,4)$ și $C(-4,0)$. Calculați aria triunghiului ABC.

5p **6.** Determinați $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $\cos x\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin x\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{1}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & a & a^2-a\\ 0 & 1 & 2a\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\det(A(1))=1$.

5p **b)** Demonstrați că $A(a)A(b)=A(a+b)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pentru care $A(3)\cdot X=A(5)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=2xy-3x-3y+6$.

5p **a)** Arătați că $x*y=2\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(y-\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{2}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $x*x=14$

5p **c)** Determinaţi numărul natural n, știind că $\left(2^n+\frac{3}{2}\right)*\left(2^{n+1}+\frac{3}{2}\right)*\left(2^{n+2}+\frac{3}{2}\right)=2^{20}+\frac{3}{2}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x^2}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{-2\left(3x^2-3x+1\right)}{x^3(x-1)^3}$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul $A(0,3)$ și este paralelă cu tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=2$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f(2)+f(3)+\ldots+f(n)\right)^{n^2}$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{f(x)}dx=1$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 f(x)dx$.

5p **c)** Arătați că există un unic număr real x pentru care $\int_0^x e^{f^2(t)}dt=x$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Test 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numărul complex $z=3-i$. Arătați că $z^2-6z+10=0$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+6$. Determinați numărul real a, știind că $f(a)=f(a-2)$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_4\left(x^2+4x+5\right)=\log_4(2x+4)$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 16.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,5)$, $B(3,3)$ şi $C(7,3)$. Determinaţi coordonatele punctului D, știind că $ABCD$ este paralelogram.

5p **6.** Se consideră $E(x)=\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+\operatorname{ctg}x+2\sin\frac{5x}{3}$, unde $x\in(0,\pi)$. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & -2a & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 2a & -2a^2 & 1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\det(A(1))=1$.

5p **b)** Demonstrați că $A(a)A(b)=A(a+b)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Demonstrați că, dacă $A(n)=A(1)A(2)A(3)\cdot\ldots\cdot A(2020)$, atunci numărul natural n este multiplu de 2021.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=xy-\sqrt{3}(x+y)+3+\sqrt{3}$.

5p **a)** Arătați că $\sqrt{3}*0=\sqrt{3}$.

5p **b)** Demonstrați că $x*y=\left(x-\sqrt{3}\right)\left(y-\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Calculați $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{1}}*\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}*\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}*\ldots*\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{96}}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+4x+4}{e^x}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{-x(x+2)}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

5p **c)** Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(g(1)+g(2)+\ldots+g(n)\right)=\frac{1}{e-1}$, unde $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{f(x)}{(x+2)^2}$.

2. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+1}$.

5p **a)** Arătaţi că $\displaystyle\int_0^1 (x+1)\,f(x)\,dx=2$.

5p **b)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=2-\ln 2$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\displaystyle\int_0^1 e^x(x+1)^n\left(f(x)\right)^n dx$.

Demonstrați că $I_n+2nI_{n-1}=3^n e-1$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Test 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numărul complex $z=1+i$. Arătați că $2z-z^2=2$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx+2m$, unde m este număr real. Determinați mulțimea valorilor reale ale lui m, știind că $f(x)>0$ pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_5\left(\sqrt{x}+1\right)+\log_5\left(\sqrt{x}-1\right)=2$.

5p **4.** Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi, știind că aceasta are exact 32 de submulțimi.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,1)$ $B(2,5)$ și $C(6,1)$. Determinaţi coordonatele punctului D, știind că $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$.

5p **6.** Determinați $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x-\cos x$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}a&0&2-a\\0&2&0\\2-a&0&a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(2))=8$.

5p **b)** Demonstrați că $A(a)A(b)=2A(ab-a-b+2)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Determinați perechile de numere întregi p și q pentru care $A(p)A(q)=4I_3$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=-\frac{3}{5}xy+x+y$.

5p **a)** Arătați că $x*y=-\frac{3}{5}\left(x-\frac{5}{3}\right)\left(y-\frac{5}{3}\right)+\frac{5}{3}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Arătați că $\frac{5x}{3}*\frac{5}{3x}\geq\frac{5}{3}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

5p **c)** Calculați $\frac{1}{3}*\frac{2}{3}*\frac{3}{3}*\ldots*\frac{2020}{3}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x-\ln\left(x^2+1\right)$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{2\left(2x^2-x+2\right)}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x+1)-f(x)\right)$.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este bijectivă.

2. Se consideră funcţia $f:(-5,5)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{25-x^2}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 f^2(x)\,dx=\frac{74}{3}$.

5p **b)** Calculați $\int_{-3}^{3} |x\, f(x)|\, dx$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \frac{1}{f^n(x)}\, dx$. Demonstraţi că șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este monoton.

Examenul de bacalaureat naţional 2020

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Test 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că suma pătratelor elementelor mulțimii $M=\left\{n\in\mathbb{N}\,\middle|\, n-1<2\right\}$ este egală cu 5.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx+5$, unde m este număr real. Determinați numărul real m, știind că vârfului parabolei asociate funcției f are abscisa egală cu 3.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x+2}=\sqrt{8-x}$.

5p **4.** Determinați numărul submulțimilor cu 10 elemente ale unei mulțimi cu 12 elemente.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,1)$, $B(-1,3)$ și $C(8,10)$. Determinaţi ecuația dreptei paralele cu dreapta AC și care trece prin mijlocul segmentului CD, unde punctul D este mijlocul segmentului AB.

5p **6.** Calculați $S=\cos\pi+\cos 2\pi+\cos 3\pi+\ldots+\cos 2020\pi$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}x&1&-x\\1&0&1\\-x&1&x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=-4$.

5p **b)** Demonstrați că $\det\left(A(x)A(y)-A(2xy)\right)=0$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numărul natural n pentru care $A(1)A\left(\frac{1}{2}\right)+A(2)A\left(\frac{1}{4}\right)+\ldots+A(1010)A\left(\frac{1}{2020}\right)=nI_3$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție asociativă $x*y=\left(\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{y}\right)^5$.

5p **a)** Arătaţi că $2^5*3^5=5^5$.

5p **b)** Determinați numărul real x, știind că $2^5*x^5*\left(243x^5\right)=100000$.

5p **c)** Se consideră numerele $M=1^5*2^5*...*10^5$ și $N=5^5\cdot 11^5$. Demonstrați că $M-N=0$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x-1}{x+1}+\ln(x+1)-\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x-1}{x(x+1)^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstraţi că graficul funcției f **nu** intersectează axa Ox.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 f^2(x)\,dx=\frac{4}{3}$.

5p **b)** Calculați $\int_{-1}^{1} |x\, f(x)|\, dx$.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_{0}^{x} t\cdot f(t)\, dt}{x^2}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Test 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Se consideră numerele complexe $z_1 = 3-3i$ și $z_2 = 5-6i$. Arătați că $2z_1 - z_2 = 1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x+15$. Determinați numărul real m pentru care $f(m)+f(m+1) = 35$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2\cdot 3^x - 3^{x+1} + 27 = 0$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să fie multiplu de 25.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(6,4)$, $B(-2,6)$. Determinați numerele reale a și b, știind că, dacă $C(a,b)$, atunci $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $AB = 4$. Știind că aria ΔABC este egală cu 6, calculați lungimea laturii BC.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & a+1 & a \\ a & 6 & 4 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} 2x+2y+z=3 \\ 2x+(a+1)y+az=3 \\ ax+6y+4z=a+3 \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\det(A(a)) = (a-1)(a-4)$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Arătați că **nu** există niciun număr real a pentru care $(A(4)-A(1))\cdot A(a) = A(a)\cdot(A(4)-A(1))$.

5p **c)** Determinați numerele întregi a, pentru care sistemul de ecuații are soluția unică (x_0, y_0, z_0) cu x_0, y_0 și z_0 numere întregi.

2. Pe mulțimea $M = (-10,10)$ se definește legea de compoziție asociativă $x * y = \dfrac{100(x+y)}{xy+100}$.

5p **a)** Arătați că $3*0 = 3$.

5p **b)** Se consideră $f:M\to(0,+\infty)$, $f(x) = \dfrac{10-x}{10+x}$. Demonstrați că $f(x*y) = f(x)f(y)$, pentru orice $x, y \in M$.

5p **c)** Determinați $x \in M$ pentru care $\underbrace{x*x*...*x}_{\text{de 11 ori } x} = 0$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = e^x\left(x^2-4x+1\right)$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x) = e^x(x-3)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați abscisele punctelor situate pe graficul funcției f, în care tangenta la graficul funcţiei f este paralelă cu dreapta de ecuație $y = 2020$.

5p **c)** Determinați valorile reale ale lui a, știind că graficul funcției f intersectează dreapta de ecuație $y = a$ în exact trei puncte.

2. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{\ln x}$.

5p **a)** Arătați că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare pe intervalul $(1,+\infty)$.

5p **b)** Calculați $\displaystyle\int_e^{e^2}\frac{1}{x}\left(f(x)-\ln x\right)dx$.

5p **c)** Determinați numărul real a, $a>e$, știind că $\displaystyle\int_e^a \ln x\,dx=2a$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Test 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinaţi partea reală a numărului complex $z=\left(1+i\sqrt{3}\right)^2-\left(1-i\sqrt{3}\right)^2$.

5p **2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5-2x$. Arătaţi că $f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot f(4)\cdot f(5)<0$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2 x+\dfrac{1}{\log_2 x}=2$.

5p **4.** Se consideră mulţimea $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Determinaţi numărul de submulţimi cu 3 elemente ale lui A, care conţin exact 2 numere impare.

5p **5.** Se consideră triunghiul ABC şi punctele M, N şi P astfel încât $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN}=2\overrightarrow{BC}$ şi $\overrightarrow{CP}=2\overrightarrow{CA}$. Ştiind că O este un punct oarecare din plan, arătaţi că $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

5p **6.** Ştiind că $x\in(\pi,2\pi)$ şi $\cos 2x=\dfrac{1}{3}$, calculaţi $\sin x$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2 & a & 2\\ 3 & a & 2\\ 2 & a & 5\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases}2x+ay+2z=4\\ 3x+ay+2z=1\\ 2x+ay+5z=b\end{cases}$, unde a şi b sunt numere reale.

5p **a)** Arătaţi că $\det(A(1))=-3$.

5p **b)** Pentru $a=-1$ şi $b=-2$, rezolvaţi sistemul de ecuaţii.

5p **c)** Determinaţi numerele reale a şi b pentru care sistemul de ecuaţii este compatibil nedeterminat.

2. Pe mulţimea $G=(1,+\infty)$ se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=\sqrt{x^2y^2-x^2-y^2+2}$.

5p **a)** Arătaţi că $x*y=\sqrt{\left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)+1}$, pentru orice $x,\ y\in G$.

5p **b)** Determinaţi elementul neutru al legii de compoziţie „$*$”.

5p **c)** Ştiind că $(G,*)$ este grup, demonstraţi că funcţia $f:M\to G$, $f(x)=\sqrt{x+1}$ este un izomorfism de la grupul $(M,\cdot)$ la grupul $(G,*)$, unde $M=(0,+\infty)$ şi „$\cdot$” reprezintă operaţia de înmulţire a numerelor reale.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+1)e^{-x}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=-xe^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculaţi $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\left(f(n)\right)^n}{e^n\left(f(n+1)\right)^n}$.

5p **c)** Determinaţi mulţimea valorilor reale ale lui m pentru care ecuaţia $f(x)=m$ are două soluţii reale distincte.

2. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\dfrac{2}{x+1}$.

5p **a)** Arătaţi că $\displaystyle\int_0^1\left(f(x)-x\right)dx=2\ln 2$.

5p **b)** Calculaţi $\displaystyle\int_1^e\left(f(x)-\frac{2}{x+1}\right)\ln x\,dx$.

5p **c)** Determinaţi $a\in(0,+\infty)$ pentru care $\displaystyle\int_0^1 2f(x)F(x)dx=\frac{1}{4}+\ln 4+\ln^2 a$, unde F este primitiva funcţiei f pentru care $F(0)=0$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Test 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați partea întreagă a numărului real $x=\left(\sqrt{2}-1\right)^2$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f\left(x\right)=x^2-2x$. Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției f cu dreapta de ecuație $y=2x-3$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $4^{x-2}=\left(\frac{1}{4}\right)^{7-2x}$.

5p **4.** Determinați numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,3)$, $B(2,5)$. Determinaţi coordonatele punctului C pentru care $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$.

5p **6.** Calculați perimetrul triunghiului ABC, știind că $AB=2$, $AC=3$ și $m(\sphericalangle BAC)=60°$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $O_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $A(a)=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&a\\1&-a&0\end{pmatrix}$ și $\left(A(a)\right)^t=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-a\\3&a&0\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\det\left(A(2)\right)=1$.

5p **b)** Demonstrați că, pentru orice număr rațional q, matricea $A(q)$ este inversabilă.

5p **c)** Se consideră matricea $B(a)=A(a)-\left(A(a)\right)^t$. Determinați numerele raționale p pentru care $B(p)B(p)B(p)+5B(p)=O_3$.

2. Pe mulțimea $G=(0,1)$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\frac{xy}{2xy-x-y+1}$.

5p **a)** Arătați că $\frac{1}{3}*\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$.

5p **b)** Verificați dacă $e=\frac{1}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Știind că $(G,*)$ este grup, demonstrați că funcția $f:G\to M$, $f\left(x\right)=\frac{1}{x}-1$ este un izomorfism de la grupul $(G,*)$ la grupul $(M,\cdot)$, unde $M=(0,+\infty)$ și „$\cdot$” reprezintă operația de înmulțire a numerelor reale.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f\left(x\right)=x\ln x$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=1+\ln x$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinaţi $m\in(0,+\infty)$ pentru care tangenta la graficul funcției f în punctul $M\left(m,f\left(m\right)\right)$ este paralelă cu dreapta de ecuație $y=2x$.

5p **c)** Demonstrați că $x\ln x+\frac{1}{e}\geq 0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos x$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, f(x)\,dx=\frac{1}{2}$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(f(x)\right)^n dx$. Demonstrați că șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Test 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați suma elementelor mulțimii $A=\left\{x\in\mathbb{N}\,\middle|\,x\le\sqrt{5}\right\}$.

5p **2.** Determinați numerele reale m și n, știind că $f(1)=2$ și $f(2)=1$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx+n$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $16^x+2\cdot4^x-8=0$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă cifra sutelor un număr prim.

5p **5.** Se consideră paralelogramul $ABCD$ și punctul O, intersecția diagonalelor acestuia. Arătați că $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}$.

5p **6.** Determinați $\sin x$, știind că $x\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$ și $\cos x=\frac{4}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2 & a & 1\\ a-3 & a & 1\\ 3 & 2a-1 & 1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}2x+ay+z=1\\ (a-3)x+ay+z=2a-1,\\ 3x+(2a-1)y+z=1\end{cases}$ unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=5$.

5p **b)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui a pentru care sistemul de ecuații este compatibil determinat.

5p **c)** Determinați numărul real a, știind că sistemul de ecuații are soluție unică (x_0,y_0,z_0) și x_0, y_0 și z_0 sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $x*y=x+y-\frac{xy}{3}$.

5p **a)** Arătați că $1*3=3$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $x*x*x=\frac{26}{9}$.

5p **c)** Determinați numerele naturale n ale căror simetrice în raport cu legea de compoziție „$*$” sunt numere naturale.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4-4\ln x$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{4(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei verticale la graficului funcției f.

5p **c)** Demonstrați că, pentru fiecare număr natural n, $n\ge2$, ecuația $f(x)-n=0$ are două soluții reale distincte.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3e^x$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^2 f(x)e^{-x}dx=4$.

5p **b)** Calculați $\int_1^e \frac{1}{x^2} f(\ln x)\,dx$.

5p **c)** Arătați că $\int_0^1 f(x)F(x)\,dx = 2(e-3)^2$, unde $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este primitiva funcţiei f pentru care $F(0)=0$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Test 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^7}+\frac{1}{2^8}<2$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x^2-4x+5$. Determinați produsul absciselor punctelor de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^x+3^{x-2}+3^{x+2}=91$.

5p **4.** Determinați termenul care **nu** îl conține pe x din dezvoltarea $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^9$, unde $x\in(0,+\infty)$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,1)$, $B(1,3)$ și $C(3,2)$. Determinați ecuația dreptei OG, știind că G este centrul de greutate al triunghiului ABC.

5p **6.** Calculați raza cercului circumscris triunghiului ABC, știind că $AB=2$ și $\cos C=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ a & 1 & 1\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix}$, unde a este număr întreg.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=7$.

5p **b)** Demonstrați că rangul matricei $A(a)$ este egal cu 3, pentru orice număr întreg a.

5p **c)** Determinați numărul întreg m pentru care inversa matricei $A(m)$ are toate elementele numere întregi.

2. Pe mulțimea $M=(0,+\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=\frac{xy}{x+y}$.

5p **a)** Arătați că $2\circ 2=1$.

5p **b)** Demonstrați că $x\circ y\circ z=\left(x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}\right)^{-1}$, pentru orice $x,y,z\in M$.

5p **c)** Demonstrați că $\frac{1}{2}\circ\frac{1}{3}\circ\frac{1}{4}\circ\ldots\circ\frac{1}{10}=\frac{1}{54}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to(0,+\infty)$, $f(x)=\ln(x+1)-\ln(x-1)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=-\frac{2}{x^2-1}$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este bijectivă.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\,f(x)\right)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+2$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{5}{6}$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^e \frac{f(x)}{x}\ln x\,dx = \frac{e^2-7}{4}$.

5p **c)** Determinați numerele reale a, $a>1$ pentru care $\int_1^a f(x)e^x dx = e^a - 3e$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Test 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați partea reală a numărului complex $z=(3+2i)(3-2i)-(4-i)$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+2$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x-3$. Calculați $(f\circ g)(2)$.

5p **3.** Rezolvați în mulţimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{2^{6x}}=16$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă produsul cifrelor un număr impar.

5p **5.** Se consideră paralelogramul $ABCD$ cu $AD=6$, $AB=4$ și $m(\sphericalangle ADC)=120°$. Determinați modulul vectorului $\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB=60$, $AC=80$ și $BC=100$. Calculați lungimea înălțimii AD a triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2a+1 & 1 & -2\\ a-1 & -1 & 1\\ 2a & -2 & 1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}(2a+1)x+y-2z=a\\ (a-1)x-y+z=a+1,\\ 2ax-2y+z=1\end{cases}$ unde a este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\det(A(1))=1$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care matricea $A(a)$ **nu** este inversabilă.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care există y_0 și z_0, numere reale, astfel încât $(2,y_0,z_0)$ să fie soluție a sistemului de ecuații.

2. Pe mulțimea $G=(0,+\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $x*y=\sqrt[3]{x^{\log_2 y}}$.

5p **a)** Arătați că $2*64=4$.

5p **b)** Arătați că legea de compoziție „$*$” este comutativă.

5p **c)** Determinați $x\in G$ care sunt egale cu simetricele lor în raport cu legea de compoziție „$*$”.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-5)(x-4)(x-3)(x-2)+1$.

5p **a)** Arătați că $f'(5)=6$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{f(n+1)-1}{f(n)-1}\right)^n$.

5p **c)** Demonstrați că ecuația $f'(x)=0$ are trei soluții reale.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1-e^x}{1+e^x}$.

5p **a)** Determinați primitiva G a funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\left(1+e^x\right)f(x)$ pentru care $G(0)=0$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 f(x)dx$.

5p **c)** Demonstrați că $\int_{-1}^1 f(x)\cos x dx = 0$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Test 11

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\sqrt{7}\left(\sqrt{6}+1\right)-\sqrt{6}\left(\sqrt{7}+1\right)=\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x+1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x+2$. Demonstrați că $f(x+1)-f(x)=g(x)$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x-1}=\sqrt{x^2-2x-1}$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $M=\{1,2,3,4,5\}$. Determinați numărul de submulțimi ale lui M care au cel puțin trei elemente.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră trapezul $ABCD$ cu $AB\parallel CD$ și $A(1,2)$, $B(4,5)$ și $D(-3,2)$. Determinați ecuația dreptei MN, știind că segmentul MN este linia mijlocie a trapezului $ABCD$.

5p **6.** Calculați $\sin 2x$, știind că $(2\sin x+\cos x)^2=2+3\sin^2 x$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & a & 2\\ a & i & a\\ -1 & a & -1\end{pmatrix}$, unde $i^2=-1$ și a este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\det(A(0))=i$.

5p **b)** Demonstrați că, pentru orice număr real a, matricea $A(a)$ este inversabilă.

5p **c)** Calculați $\underbrace{A(0)\cdot A(0)\cdot A(0)\cdot\ldots\cdot A(0)}_{\text{de 2020 ori } A(0)}$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=3^{x+y}-3^{x+1}-3^{y+1}+12$.

5p **a)** Arătați că $x*1=3$, pentru orice număr real x.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $0*x=-9$.

5p **c)** Demonstrați că, dacă $x*y=3$, atunci $(x-1)(y-1)=0$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-\ln\left(x^2+1\right)$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{2x^3}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Demonstrați că axa Ox este tangentă graficului funcției f.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice număr natural nenul n, ecuația $f(x)=n$ are două soluții reale distincte.

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_1^e \frac{f(x)}{e^x}\,dx=1$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^2 x^3 f\left(x^2\right)dx = \frac{e(e-1)\left(e^2+e+1\right)}{2}$.

5p **c)** Demonstrați că $\int_1^e f(x)dx + \int_1^e e^x \ln x\,dx = e^e$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Test 12

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că numărul $N=\left(\sqrt{5}+\sqrt{13}\right)^2+\left(\sqrt{5}-\sqrt{13}\right)^2$ este pătratul unui număr natural.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+a$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, știind că $(f\circ f)(1)+f(1)=1$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x+4^{1-x}=4$.

5p **4.** Determinați numărul numerelor naturale de trei cifre distincte care se pot forma cu elementele mulțimii $A=\{0,5,7\}$.

5p **5.** Se consideră punctul G, centrul de greutate al triunghiului ABC și punctul M, mijlocul segmentului AG. Demonstrați că $6\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

5p **6.** Calculați măsura unghiului A al triunghiului ascuțitunghic ABC, știind că $4\mathcal{A}_{\Delta ABC}=AB\cdot AC$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 2 & -2 & 1\\ a+4 & a+3 & a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=-15$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care rangul matricei $A(a)$ **nu** este egal cu 3.

5p **c)** Demonstrați că matricea $M=A(-1)\cdot A(-1)\cdot A(-1)\cdot A(-1)$ are toate elementele numere întregi, divizibile cu 25.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\sqrt[3]{x^3+y^3+2020}$.

5p **a)** Arătați că $x*(-x)=\sqrt[3]{2020}$, pentru orice număr real x.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $(x+1)*(-x)=\sqrt[3]{2021}$.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice număr real a, există un unic număr real x pentru care $x*x*x=a$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-6x^2+9x+5$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=3(x-1)(x-3)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este concavă pe $(-\infty,2]$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+5}}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1 f(x)\cdot\sqrt{x^2+3x+5}\,dx=4$.

5p **b)** Calculați $\int_{-4}^{1} f(x)dx$.

5p **c)** Arătați că $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, f(\sin x)dx = 6-2\sqrt{5}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Test 13

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinaţi raţia progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $b_1=2$ şi $b_3-4b_2=-8$.

5p **2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+m$, unde m este număr real. Determinați numărul real m, știind că punctul $A(f(1),1)$ aparține graficului funcției f.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\frac{x^2-1}{\sqrt{x-1}}=\sqrt{x+1}$.

5p **4.** Determinați numărul numerelor naturale de trei cifre care au proprietatea că pătratul cifrei zecilor este egal cu diferența dintre cifra unităților și cifra sutelor.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,1)$ și $H(3,2)$. Știind că H este ortocentrul triunghiului ABC, determinați panta dreptei BC.

5p **6.** Determinați $x\in(0,\pi)$, știind că $\sin x-\cos x=\sqrt{2}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ m & m^2 & 1\\ m+1 & (m+1)^2 & 1\end{pmatrix}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=0$.

5p **b)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui m pentru care matricea $A(m)$ este inversabilă.

5p **c)** În reperul cartezian xOy se consideră punctele necoliniare $A(1,1)$, $B(m,m^2)$ și $C(m+1,(m+1)^2)$, unde m este număr real. Determinați numerele reale m, știind că triunghiul ABC are aria egală cu 1.

2. Pe mulțimea $G=(0,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x*y=2^{\ln x\cdot\ln y}$.

5p **a)** Arătați că $x*1=1$, pentru orice $x\in G$.

5p **b)** Determinați $f\in G$, știind că f este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Determinați $x\in G$ pentru care $x*\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln\left(e^x+x-1\right)$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{x-2}{e^x+x-1}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Demonstraţi că dreapta de ecuaţie $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

5p **c)** Determinaţi imaginea funcţiei f.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\,dx=1+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

5p **b)** Calculați $\int_{-1}^{1} |x\, f(x)|\, dx$.

5p **c)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} \int_{0}^{x} f(t)\, dt = 2$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Test 14

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că numerele $\log_3 5$, $\sqrt{2}$ și $\log_5 9$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

5p **2.** Se consideră o funcție $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Demonstrați că funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-f(-x)$ este impară.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^x+3^{\frac{1}{2}-x}=1+\sqrt{3}$.

5p **4.** Determinați termenul care îl conține pe x^{10} din dezvoltarea $\left(x^3+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{20}$, unde $x\in\mathbb{R}^*$.

5p **5.** În planul triunghiului ABC se consideră punctul G, astfel încât $3\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$. Demonstrați că G este centrul de greutate al triunghiului ABC.

5p **6.** Determinați $x\in(0,\pi)$, știind că $\sin 2x-3\sin x-2\cos x+3=0$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3&-1&-1\\-1&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$ și $M(m)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&m&1\\1&1&m\end{pmatrix}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=1$.

5p **b)** Demonstrați că, pentru orice număr real m, rangul matricei $M(m)$ este diferit de 2.

5p **c)** Determinați numărul real m, $m\neq 1$, știind că inversa matricei $M(m)$ este matricea A.

2. Pe mulțimea numerelor complexe se definește legea de compoziție $z_1\circ z_2=z_1+z_2+z_1z_2$.

5p **a)** Arătați că $(1+i)\circ(2-i)=6+i$.

5p **b)** Demonstrați că numărul $z\circ\overline{z}$ este număr real, pentru orice număr complex z.

5p **c)** Determinați numerele complexe z pentru care $z\circ z=-2$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{2(x-1)(x+1)}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f(1)+f(2)+\ldots+f(n)+2\ln n\right)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+1}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 e^x f(x)\,dx=\frac{4}{3}$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 f(-x)dx$.

5p **c)** Determinați numerele reale a și b, știind că funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=e^{-x}\left(-x^2+ax+b\right)$ este o primitivă a funcției f.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Test 15

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați numărul complex z, pentru care $z=3\bar{z}$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+a$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, știind că numerele $f(0)$, $f(2)$ și $f(1)$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(-x)=\log_3\left(x^2-2x-2\right)$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{0,1,2,\ldots,9\}$, pătratul acestui număr să aparțină mulțimii A.

5p **5.** Se consideră punctele A, B, C și D, astfel încât $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$. Demonstrați că $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC cu $BC=R$, unde R este raza cercului circumscris triunghiului. Calculați măsura unghiului A al triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $O_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}1&a&0\\0&1&a\\0&0&1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\det(A(a))=1$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Se consideră matricea $B(a)=A(a)-I_3$, unde a este număr real. Demonstrați că, pentru orice număr real a, $B(a)\cdot B(a)\cdot B(a)=O_3$.

5p **c)** Determinați numărul natural nenul n, știind că suma elementelor matricei X pentru care $A(2)\cdot X=A(1)+A(2)+\ldots+A(n)$ este egală cu 21.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=x^2+4xy+y^2$.

5p **a)** Arătați că $1*2=13$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $(x*x)*x^2=61$.

5p **c)** Demonstrați că există o infinitate de numere iraționale a pentru care numărul $a*1$ este natural.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x-3}{\sqrt{x^2+3}}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{3(x+1)}{\left(x^2+3\right)\sqrt{x^2+3}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\right)^x$.

5p **c)** Demonstrați că $x^5+2\sqrt{x^{10}+3}\geq 3$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+\ln x$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^3\left(f(x)-\ln x\right)dx=\frac{26}{3}$.

5p **b)** Calculați $\int_1^2\left(f(x)-x^2\right)dx$.

5p **c)** Arătați că $\int_1^2\frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right)dx=\frac{3-4\ln^2 2}{8}$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Test 16

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați numărul de elemente ale mulțimii $A=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,-\sqrt{5}<x<\sqrt{7}\right\}$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x+a$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=-x^2+2bx+1$, unde a și b sunt numere reale. Determinați numerele reale a și b, știind că parabolele asociate celor două funcții au același vârf.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}=2$.

5p **4.** Arătați că **nu** există nicio mulțime finită care să aibă exact 12 submulțimi cu 2 elemente.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,4)$, $B(-4,3)$ și $C(5,0)$. Arătați că punctul $H(4,7)$ este ortocentrul triunghiului ABC.

5p **6.** Calculați $\cos x$, știind că $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $2\left(\cos^4 x-\sin^4 x\right)=-1$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3&2&1\\6&4&2\\9&6&3\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $B=I_3+A$.

5p **a)** Arătați că $\det A=0$.

5p **b)** Arătați că matricea $I_3-\frac{1}{11}A$ este inversa matricei B.

5p **c)** Dați exemplu de trei matrice $U,V,T\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, de rang 1, astfel încât $U+V+T=B$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=xy-3x-3y+a$, unde a este număr real.

5p **a)** Determinați numărul real a pentru care $(-1)*1=0$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care legea de compoziție „$*$” admite element neutru.

5p **c)** Demonstrați că, dacă $a\in[12,+\infty)$, atunci mulțimea $[3,+\infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziție „$*$”.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to(0,1)$, $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{2}+f'(1)+f'(2)+\ldots+f'(n)\right)^{\sqrt{n}}$.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este bijectivă.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2}{x^4+1}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1\left(x^4+1\right)f(x)dx=\frac{1}{3}$.

5p **b)** Demonstrați că $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx\le\frac{\pi}{8}$.

5p **c)** Se consideră primitiva F a lui f pentru care $F(1)=0$. Calculați $\displaystyle\int_0^1 F(x)dx$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Test 17

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că, dacă $z^2+z+2=0$, unde z este număr complex, atunci $z^2+\frac{4}{z^2}=-3$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\{2x\}$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui x. Arătați că $f\left(x+\frac{1}{2}\right)=f(x)$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{x+1}-3^x=2^{x+2}-2^{x+1}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr a din mulțimea $A=\left\{\sqrt{3},\sqrt{4},\sqrt{5},\ldots,\sqrt{25}\right\}$, numerele 3, 4 și a să reprezinte lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic.

5p **5.** Se consideră paralelogramul $ABCD$ și punctele M și N astfel încât $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ și $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Demonstrați că punctele D, M și N sunt coliniare.

5p **6.** Arătați că, dacă ABC este un triunghi oarecare, atunci $\cos A<\frac{1}{2}\left(\frac{AB}{AC}+\frac{AC}{AB}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & m & 1\\ 1 & -3 & 2\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+2y+z=0\\ 2x+my+z=0\\ x-3y+2z=0\end{cases}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(m))=m-9$, pentru orice număr real m.

5p **b)** Determinați numărul real m pentru care sistemul de ecuații admite soluții diferite de $(0,0,0)$.

5p **c)** Pentru $m=9$, se consideră (x_0,y_0,z_0) o soluție a sistemului de ecuații, cu x_0, y_0 și z_0 numere reale astfel încât $(x_0,y_0,z_0)\neq(0,0,0)$. Calculați $\frac{x_0^2+y_0^2-z_0^2}{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$.

2. Pe mulțimea numerelor întregi se definește legea de compoziție $x*y=xy+5x+5y+20$.

5p **a)** Arătați că $2*(-1)=23$.

5p **b)** Demonstrați că $e=-4$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Pentru $r\in\{0,1,2\}$, notăm cu $A(r)$ mulțimea numerelor naturale care au restul r la împărțirea cu 3. Determinați numerele $r\in\{0,1,2\}$ pentru care $A(r)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu legea de compoziție „$*$”.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)\left(e^x-e\right)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=xe^x-e$, $x\in(-1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f, în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Determinaţi punctul de extrem al funcției f.

2. Se consideră funcţia $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\ln(x+2)}{x^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{\ln(x+2)}dx=\frac{\pi}{4}$.

5p **b)** Calculați $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$.

5p **c)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1\left(f(x)+\frac{\operatorname{arctg}x}{x+2}\right)dx=\frac{\pi}{4}\ln 3$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Test 18

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că, dacă $z=3+i$, unde z este număr complex, atunci $z^2-6z+10=0$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2+2x-6$. Determinați abscisa punctului de intersecție a graficelor funcțiilor f și g.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{2x+3}=x+1$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, produsul cifrelor sale să fie un număr prim.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,2)$ și $B(3,-1)$. Știind că punctul M este simetricul lui A față de B și punctul N este simetricul lui B față de M, determinați coordonatele punctului N.

5p **6.** Arătați că, dacă $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ și $\sin x+\cos x=\cos 2x$, atunci $\sin x-\cos x=-1$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A(x)=\begin{pmatrix}2^x & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ și $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=2$.

5p **b)** Demonstrați că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați rangul matricei $B=A(1)\cdot A(2)\cdot A(3)-I_3$.

2. Pe mulțimea numerelor raționale se definește legea de compoziție $x*y=x^2y^2-2x^2-2y^2+6$.

5p **a)** Arătați că $1*1=3$.

5p **b)** Arătați că $x*y\neq 2$, pentru orice numere raționale x și y.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere întregi pentru care $m*n=3$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x-2\ln(x+1)$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{2x(x+2)}{x+1}$, $x\in(-1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați numărul real $a\in(-1,+\infty)$, știind că tangenta la graficul funcției f în punctul $A(a,f(a))$ este paralelă cu dreapta de ecuație $y=3x+2020$.

5p **c)** Demonstrați că $(x+1)^2\geq 2\ln(x+1)+1$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+2}$. Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 x^n f(x)\,dx$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^3 f^2(x)\,dx=15$.

5p **b)** Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

5p **c)** Arătați că $(n+2)I_n + 2(n-1)I_{n-2} = 3\sqrt{3}$, pentru orice număr natural n, $n \geq 3$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Test 19

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ cu $b_1=2$ și rația $q=\sqrt{5}$. Calculați partea întreagă a lui b_4.

5p **2.** Se consideră funcția bijectivă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-3$. Determinați abscisa punctului de intersecție a graficelor funcțiilor f și f^{-1}.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2\left(2x^2+x+1\right)-\log_2\left(x^2-x+2\right)=1$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, suma cifrelor sale să fie divizibilă cu 11.

5p **5.** Se consideră vectorii $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}$ și $\vec{v}=a\vec{i}-2\vec{j}$, unde a este număr real. Determinați numărul real a pentru care $|\vec{u}+\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2$.

5p **6.** Arătați că, dacă $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos x$, atunci $x=\frac{\pi}{8}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix} m & 1 & 1\\ 2 & m+1 & 1\\ 1 & 1 & m+1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} mx+y+z=1\\ 2x+(m+1)y+z=2\\ x+y+(m+1)z=m+1\end{cases}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=0$.

5p **b)** Demonstrați că, pentru $m=-3$, sistemul de ecuații **nu** are soluții.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice număr real m, sistemul de ecuații are cel mult o soluție.

2. Pe mulțimea numerelor complexe se definește legea de compoziție $z_1\circ z_2=z_1+z_2-\frac{1}{2}\overline{z}_1-\frac{1}{2}\overline{z}_2$, unde $\overline{z}$ este conjugatul lui z.

5p **a)** Arătați că $(1+i)\circ(1-i)=1$.

5p **b)** Se consideră $H=\{2+bi\,|\,b\in\mathbb{R}\}$. Arătați că H este parte stabilă a lui $\mathbb{C}$ în raport cu legea de compoziție „$\circ$”.

5p **c)** Se consideră numărul complex z_0. Arătați că există o infinitate de numere complexe z cu proprietatea că numărul $z_0\circ z$ este real.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x+2}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{(x-1)(x+1)}{\sqrt[3]{(x^3-3x+2)^2}}$, $x\in(1,+\infty)$.

5p	**b)** Calculați $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}$.
5p	**c)** Arătați că, pentru orice $a\in(0,+\infty)$, ecuația $f(x)=a$ are soluție unică.
	2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(x^2+2\right)e^{-x}$.
5p	**a)** Arătați că $\int_1^4 e^x f(x)\,dx=27$.
5p	**b)** Calculați $\int_1^e f(\ln x)\,dx$.
5p	**c)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt=2$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Test 20

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că numărul $A=z(2+3i)+\overline{z}(2-3i)$ este real, pentru orice număr complex z, unde $\overline{z}$ este conjugatul lui z.

5p **2.** Se consideră $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-6x+7$. Arătați că $f(\sqrt{2})\cdot f(1+\sqrt{2})\cdot f(2+\sqrt{2})\cdot\ldots\cdot f(10+\sqrt{2})=0$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\lg(x^2+x-2)=1+\lg\frac{x-1}{2}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, produsul cifrelor sale să fie mai mare decât 51.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,6)$, $B(-3.-1)$ și $C(-2,-2)$. Arătați că punctul $M(1,2)$ este centrul cercului circumscris triunghiului ABC.

5p **6.** Se consideră R, raza cercului circumscris triunghiului ABC și r, raza cercului înscris în triunghiul ABC. Știind că $\sin A+\sin B+\sin C=\frac{1}{rR}$, arătați că aria triunghiului ABC este egală cu 1.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}2 & 1 & m\\ 4 & 1 & m\\ 1 & -m & -1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}2x+y+mz=4\\ 4x+y+mz=6\\ x-my-z=-1\end{cases}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=2$.

5p **b)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui m pentru care matricea $A(m)$ este inversabilă.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice $m\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, soluția (x_0,y_0,z_0) a sistemului de ecuații verifică relația $\frac{y_0}{z_0}=x_0$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $2*(-2)=0$.

5p **b)** Verificați dacă $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^{2x}-1}{2e^x}$. Arătați că $f(x)*f(y)=f(x+y)$, pentru orice numere reale x și y.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^x}{\sqrt{x^2+1}}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{e^x(x^2-x+1)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$.

5p **c)** Determinați imaginea funcției f.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^2 f(x)dx=\dfrac{\pi}{8}$.

5p **b)** Pentru fiecare număr natural n, considerăm numărul $I_n=\int_0^1 f^n(x)dx$. Arătați că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$.

5p **c)** Determinați numărul real a, $a>0$, pentru care $\int_0^a x\,f(x)dx=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{5}{4}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că numărul $a=3+2\sqrt{2}+\dfrac{1}{3+2\sqrt{2}}$ este natural.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$. Arătați că $(f\circ f)(1)=f(2)+2$.

5p **3.** Rezolvați în mulţimea numerelor reale ecuaţia $9^{x^2}=3\cdot 3^x$.

5p **4.** Determinați numărul natural nenul n, ştiind că mulţimea $A=\{1,2,3,\ldots,n\}$ are exact 10 submulţimi cu două elemente.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(1,0)$, $N(7,0)$ și $A(a,3)$, unde a este număr real. Știind că $AM=AN$, arătați că segmentul AO are lungimea egală cu 5.

5p **6.** Se consideră $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ pentru care $3\cos x-2=2\cos 2x$. Calculați $\cos x$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 2-a & a\\ a & 1 & 1\\ a & 2a-5 & a-2\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases}x+(2-a)y+az=1\\ ax+y+z=2-a\\ ax+(2a-5)y+(a-2)z=-4\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=3$.

5p **b)** Demonstrați că $\det(A(a))=(a-1)(a-3)(3a+1)$, pentru orice număr real a.

5p **c)** Determinați numărul natural a pentru care sistemul are soluție unică (x_0,y_0,z_0) și x_0, y_0, z_0 sunt numere naturale.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=\log_2\left(2^x+2^y\right)$.

5p **a)** Arătați că $0*0=1$.

5p **b)** Demonstrați că legea de compoziție „$*$” este comutativă.

5p **c)** Determinaţi numărul real x pentru care $(x*x)*x=3+\log_2 3$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^4-x^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{x\left(2x^2-1\right)}{\sqrt{x^4-x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice $m\in\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},1\right)$, ecuația $f(x)=m$ are exact patru soluții reale.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{x^2+2x+5}$.

5p **a)** Arătaţi că $\displaystyle\int_1^2 x\cdot\frac{1}{f(x)}dx=\frac{31}{3}$.

5p **b)** Arătaţi că $\displaystyle\int_0^1 g(x)dx=\frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}$, unde $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)+\dfrac{1}{x^2+2x+5}$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\displaystyle\int_{-1}^1 x^{2n-1}f(x)dx$. Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numărul complex $z=2+i$. Arătați că $z^2-4z+5=0$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x+a$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, știind că punctul $M(0,2)$ aparține graficului funcției f.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x=\sqrt[3]{x^3+2x}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de cinci cifre distincte, formate cu cifre din mulțimea $\{1,2,3,4,5\}$, acesta să aibă cifra zecilor egală cu 2 și cifra unităților egală cu 3.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,1)$, $B(2,3)$ și $C(4,a)$, unde a este un număr real. Determinați numărul real a, știind că punctul C este situat pe mediatoarea segmentului AB.

5p **6.** Măsurile unghiurilor A, B și C ale triunghiului ABC sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice. Demonstrați că măsura unghiului B este egală cu $\frac{\pi}{3}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1+\ln x\\ 0 & x & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde $x\in(0,+\infty)$.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=1$.

5p **b)** Demonstrați că $A(x)A(y)=A(y)A(x)$, pentru orice $x,y\in(0,+\infty)$.

5p **c)** Determinați numărul natural n pentru care $A\left(\frac{1}{3}\right)\cdot A\left(\frac{1}{2}\right)\cdot A(1)\cdot A(2)\cdot A(3)=\begin{pmatrix}1 & 0 & n\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=xy-4(x+y)+a$, unde a este număr real.

5p **a)** Pentru $a=10$, arătați că $1*2=0$.

5p **b)** Pentru $a=20$, arătați că $e=5$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Demonstrați că, dacă $a\in[20,+\infty)$, atunci mulțimea $H=[4,+\infty)$ este parte stabilă a mulțimii numerelor reale în raport cu legea de compoziție „$*$”.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$, $f(x)=6^x-3^x+2^x$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(0)=\ln 4$.

5p **b)** Se consideră tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f. Determinați numărul real a pentru care punctul $A(a,\ln(16e))$ este situat pe această tangentă.

5p **c)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(f(x))}{x}$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-\frac{2x}{x^2+3}-\frac{2}{x^2+3}$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_1^2\left(x^2+3\right)f(x)dx=\frac{1}{3}$.

5p **b)** Arătaţi că $\int_0^1 f(x)dx=1-\ln\frac{4}{3}-\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 f^n(x)dx$. Arătați că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că numărul $z=\left(1-i\sqrt{2}\right)\left(1+i\sqrt{2}\right)$ este natural, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+a$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, știind că $f(x)+f(1-x)=7$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^x+5^{-x}=2$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $A=\{1,2,3,4,5\}$. Determinați numărul submulțimilor cu trei elemente ale lui A, care îl conțin pe 1.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctul $M(-4,4)$. Determinaţi ecuaţia dreptei d care trece prin punctul M şi este perpendiculară pe dreapta OM.

5p **6.** Triunghiul ABC este dreptunghic în A și $\sin B=\cos B$. Arătați că triunghiul ABC este isoscel.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a^2+1 & a^2+2 & a^2+3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=-1$.

5p **b)** Demonstrați că, pentru orice număr real a, matricea $A(a)$ este inversabilă.

5p **c)** Determinați numerele întregi a pentru care inversa matricei $A(a)$ are toate elementele numere întregi.

2. Pe mulțimea $A=[1,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x*y=\frac{1}{2}\sqrt[3]{x^3y^3-x^3-y^3+9}$.

5p **a)** Arătați că $1*2020=1$.

5p **b)** Demonstrați că $x*y=\sqrt[3]{\frac{1}{8}\left(x^3-1\right)\left(y^3-1\right)+1}$, pentru orice $x,y\in A$.

5p **c)** Determinaţi $x\in A$ pentru care $x*x=x$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x-2}+\ln\frac{x-1}{x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{-3x+4}{x(x-1)(x-2)^2}$, $x\in(2,+\infty)$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

5p **c)** Demonstrați că $\frac{1}{x-2}>\ln\frac{x}{x-1}$, pentru orice $x\in(2,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^3+1}}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1\left(x^3+1\right)f^2(x)\,dx=\frac{1}{3}$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 f^2(x)\,dx = \frac{1}{3}\ln 2$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n = \int_0^1 f\left(x^n\right)dx$. Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ este egală cu 30. Determinați a_2.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-6x+9$. Arătați că $(f\circ f)(3)=9$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x-6)=6-\log_2(x+6)$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale de două cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $\{0,1,2,3,4,5\}$.

5p **5.** Se consideră triunghiul ABC, punctul D mijlocul laturii AC și punctul E mijlocul segmentului BD. Arătați că $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB=2\sqrt{3}$, $A=\frac{\pi}{4}$ și $B=\frac{5\pi}{12}$. Determinați raza cercului circumscris triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 2 & 1\\ a & 4 & 1\\ 1 & -1 & a\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax+2y+z=4\\ ax+4y+z=6\\ x-y+az=1\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=0$.

5p **b)** Determinați numerele reale a pentru care matricea $A(a)$ are rangul 2.

5p **c)** Determinați numărul real a, știind că sistemul are soluție unică (x_0,y_0,z_0) și $x_0^2+y_0^2+z_0^2=3$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=xy-\frac{1}{2}(x+y)+\frac{3}{4}$. Legea de compoziție este asociativă și are elementul neutru $e=\frac{3}{2}$.

5p **a)** Demonstrați că $x*y=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numerele reale nenule x pentru care $\frac{1}{x}*x*\frac{1}{x}=x*\frac{1}{x}*x$.

5p **c)** Arătați că **nu** există numere întregi x și y, astfel încât x să fie simetricul lui y în raport cu legea de compoziție „$*$”.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-8x+8\ln x+12-8\ln 2$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{2(x-2)^2}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul $A(3,3)$ și este paralelă cu tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=2$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Se consideră numerele reale a, b și c astfel încât punctul $M(a,b)$ este situat pe graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2-8\ln 2+8\ln x$ și punctul $N(a,c)$ este situat pe graficul funcției $h:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $h(x)=8x-12$. Demonstrați că $b\geq c$, pentru orice $a\in[2,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2+4}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1\left(x^2+4\right)f(x)\,dx=-\frac{11}{3}$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f este concavă pe $(-\infty,0]$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural n, se consideră $I_n=\displaystyle\int_1^2 x^n f(x)\,dx$. Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=-\infty$.

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$7+\sqrt{7}\in(9,10)$ și, cum n este număr natural, obținem $M=\{0,1,2,3\}$	**3p**
	Mulțimea M are 4 elemente	**2p**
2.	$\Delta=36-4m\Rightarrow y_V=-\dfrac{\Delta}{4a}=m-9$	**3p**
	$m-9>0\Leftrightarrow m\in(9,+\infty)$	**2p**
3.	$x+3=(x-3)^2\Rightarrow x^2-7x+6=0$	**3p**
	$x=1$, care nu convine; $x=6$, care convine	**2p**
4.	O mulțime cu 12 elemente are $C_{12}^0+C_{12}^1+C_{12}^2=1+12+\dfrac{12\cdot 11}{2}=$	**3p**
	$=13+66=79$ de submulțimi cu cel mult 2 elemente	**2p**
5.	Paralela prin A la OB intersectează paralela prin B la OA în punctul $C\Rightarrow OACB$ este paralelogram	**2p**
	OC și AB au același mijloc, deci $x_O+x_C=x_A+x_B$, $y_O+y_C=y_A+y_B$, de unde obținem $x_C=3$ și $y_C=3$	**3p**
6.	$\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}x}+\dfrac{1}{1+\operatorname{ctg}x}=\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}x}+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\operatorname{tg}x}}=\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}x}+\dfrac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}x+1}=$	**3p**
	$=\dfrac{1+\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}=1$, pentru orice $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}0&2&0\\-1&3&0\\0&0&2\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(1))=\begin{vmatrix}0&2&0\\-1&3&0\\0&0&2\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+0+0-0-0-(-4)=4$	**3p**
b)	$A(a)\cdot A(b)=\begin{pmatrix}1-a-b-ab&2b+2ab+2a&0\\-a-b-ab&1+2a+2b+2ab&0\\0&0&1+a+b+ab\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1-(a+b+ab)&2(a+b+ab)&0\\-(a+b+ab)&1+2(a+b+ab)&0\\0&0&1+(a+b+ab)\end{pmatrix}=A(a+b+ab)$, pentru orice numere reale a și b	**2p**

c)	Cum $A(a)\cdot A(b)\cdot A(c)=A(a+b+ab)\cdot A(c)=A(a+b+c+ab+ac+bc+abc)$, obținem $a+b+c+ab+ac+bc+abc=0$	**3p**
	$1+a+b+c+ab+ac+bc+abc=1\Rightarrow(1+a)+b(1+a)+c(1+a)+bc(1+a)=1$, de unde obținem $(1+a)(1+b+c+bc)=1$, deci $(1+a)(1+b)(1+c)=1$	**2p**
2.a)	$3*4=\sqrt{3^2+4^2}=$	**3p**
	$=\sqrt{25}=5$	**2p**
b)	$x*\sqrt{5}=\sqrt{x^2+5}$, $x\in M$	**2p**
	Cum $\sqrt{x^2+5}<x+1\Rightarrow x^2+5<x^2+2x+1$, obținem $x\in(2,+\infty)$	**3p**
c)	Pentru $m=3k$ și $n=4k$, unde $k\in\mathbb{N}^*$, obținem $m*n=5k$	**2p**
	Cum numerele $3k$, $4k$ și $5k$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice, există o infinitate de perechi de numere naturale nenule (m,n), de forma $(3k,4k)$, pentru care numerele m, n și $m*n$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=1-\dfrac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+5}}=$	**3p**
	$=1-\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}}=\dfrac{\sqrt{x^2-4x+5}-x+2}{\sqrt{x^2-4x+5}}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\sqrt{x^2-4x+5}=\sqrt{(x-2)^2+1}>x-2$, pentru orice număr real x	**2p**
	$f'(x)>0$, pentru orice număr real x, deci f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$	**3p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-4x+5}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(x-\sqrt{x^2-4x+5}\right)\left(x+\sqrt{x^2-4x+5}\right)}{x+\sqrt{x^2-4x+5}}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x-5}{x+\sqrt{x^2-4x+5}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(4-\frac{5}{x}\right)}{x\left(1+\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}\right)}=2$, deci ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f este $y=2$	**3p**
2.a)	$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(x^2+1\right)dx=\left(\dfrac{x^3}{3}+x\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{3}+1=\dfrac{4}{3}$	**2p**
b)	$\int_0^1 e^x f(x)dx=\int_0^1 e^x\left(x^2+1\right)dx=e^x\left(x^2+1\right)\Big\vert_0^1-\int_0^1 2xe^x dx=2e-1-(2x-2)e^x\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=2e-1-2=2e-3$	**2p**
c)	$\int_{-1}^1\left\vert x\ln\left(f(x)\right)\right\vert dx=\int_{-1}^0(-x)\ln\left(x^2+1\right)dx+\int_0^1 x\ln\left(x^2+1\right)dx=\int_0^1 2x\ln\left(x^2+1\right)dx=$	**2p**
	$=\int_0^1\left(x^2+1\right)'\ln\left(x^2+1\right)dx=\left(x^2+1\right)\ln\left(x^2+1\right)\Big\vert_0^1-\int_0^1\left(x^2+1\right)\dfrac{2x}{x^2+1}dx=2\ln 2-x^2\Big\vert_0^1=2\ln 2-1$	**3p**

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$n=1+12i+36i^2+9-12i+4i^2=$	**2p**
	$=1-36+9-4=-30$, care este număr întreg negativ	**3p**
2.	$f(1)=f(5)\Rightarrow 1+a=25+5a\Rightarrow a=-6$	**2p**
	$f(x)=x^2-6x$, de unde obținem $f(2)=-8$ și $f(4)=-8$, deci $f(2)=f(4)$	**3p**
3.	$2x^2-2=(x+1)^2\Rightarrow x^2-2x-3=0$	**2p**
	$x=-1$, care nu convine; $x=3$, care convine	**3p**
4.	Există 900 de numere naturale de trei cifre, deci sunt 900 de cazuri posibile	**2p**
	Dacă cifra unităților este c, $1\le c\le 9$, atunci cifra sutelor poate fi aleasă în c moduri, iar pentru fiecare alegere a cifrei sutelor există o singură alegere a cifrei zecilor; în total sunt $9+8+\ldots+1=45$ de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{45}{900}=\dfrac{1}{20}$	**1p**
5.	$OA=OB=5$	**2p**
	$m_{AO}=\dfrac{4}{3}$ și $m_{BO}=-\dfrac{3}{4}\Rightarrow AO\perp BO$ și, cum $AOBC$ este paralelogram, obținem că $AOBC$ este pătrat, deci triunghiul ACB este dreptunghic isoscel	**3p**
6.	$2\sin^2 x=1\Rightarrow \sin x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ sau $\sin x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	**2p**
	Cum $x\in(0,\pi)$, obținem $\sin x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, deci $x=\dfrac{\pi}{4}$ sau $x=\dfrac{3\pi}{4}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2)=\begin{pmatrix}2&3&4\\1&2&3\\1&1&2\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(2))=\begin{vmatrix}2&3&4\\1&2&3\\1&1&2\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=8+4+9-8-6-6=1$	**3p**
b)	$A(a)A(1)=\begin{pmatrix}3a+3&5a+4&7a+5\\6&9&12\\2+a&4+a&6+a\end{pmatrix}$, pentru orice număr real a	**2p**
	$A(1)A(a)=\begin{pmatrix}a+5&a+8&4a+8\\a+5&a+8&4a+8\\a+2&a+4&2a+5\end{pmatrix}$, pentru orice număr real a, deci $A(a)A(1)=A(1)A(a)$ implică $a=1$, care convine	**3p**

c)	$\det\left(A(a)\right)=\begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=(a-1)^2$, pentru orice număr real a	**3p**
	Cum $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\neq 0$, matricea $A(a)$ are rangul doi $\Leftrightarrow a=1$	**2p**
2.a)	$\hat{3}\circ\hat{3}=\hat{3}\cdot\hat{3}+\hat{3}+\hat{3}=$	**2p**
	$=\hat{3}+\hat{3}+\hat{3}=\hat{3}$	**3p**
b)	$x\circ\hat{0}=x\cdot\hat{0}+x+\hat{0}=x$, pentru orice $x\in\mathbb{Z}_6$	**2p**
	$\hat{0}\circ x=\hat{0}\cdot x+\hat{0}+x=x$, pentru orice $x\in\mathbb{Z}_6$, deci $\hat{0}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”	**3p**
c)	$\hat{4}\circ\hat{4}=\hat{0}\Rightarrow\hat{4}$ este simetrizabil în raport cu legea de compoziție „$\circ$” și simetricul lui este $\hat{4}$	**2p**
	$f(x)=f(y)\Rightarrow\hat{4}\circ x=\hat{4}\circ y\Rightarrow x=y\Rightarrow f$ este injectivă, de unde obținem că $\operatorname{Im} f$ are 6 elemente, deci $\operatorname{Im} f=\mathbb{Z}_6$, de unde obținem că f este bijectivă	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=-\dfrac{2}{(x-1)^3}+\dfrac{2}{(x+1)^3}=$	**3p**
	$=\dfrac{2\left((x-1)^3-(x+1)^3\right)}{(x+1)^3(x-1)^3}=\dfrac{-4\left(3x^2+1\right)}{(x+1)^3(x-1)^3}=\dfrac{-4\left(3x^2+1\right)}{\left(x^2-1\right)^3}$, $x\in(-1,1)\cup(1,+\infty)$	**2p**
b)	Cum $f(0)=0$, graficul funcției f intersectează axa Oy în punctul $O(0,0)$	**2p**
	$f'(0)=4$, deci ecuația tangentei este $y=4x$	**3p**
c)	$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f(2)+f(4)+\ldots+f(2n)\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{1^2}-\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{3^2}-\dfrac{1}{5^2}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)^2}-\dfrac{1}{(2n+1)^2}\right)^n=$	**2p**
	$=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{(2n+1)^2}\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(1+\dfrac{-1}{(2n+1)^2}\right)^{-(2n+1)^2}\right)^{\frac{-n}{(2n+1)^2}}=e^0=1$	**3p**
2.a)	$\int\limits_0^2\left(x^2+4\right)f(x)\,dx=\int\limits_0^2(2x-2)\,dx=\left(x^2-2x\right)\Big\vert_0^2=$	**3p**
	$=4-4=0$	**2p**
b)	$\int\limits_0^{2\sqrt{3}}f(x)\,dx=\int\limits_0^{2\sqrt{3}}\dfrac{2x}{x^2+4}\,dx-2\int\limits_0^{2\sqrt{3}}\dfrac{1}{x^2+4}\,dx=\ln\left(x^2+4\right)\Big\vert_0^{2\sqrt{3}}-\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}\Big\vert_0^{2\sqrt{3}}=$	**3p**
	$=\ln 16-\ln 4-\operatorname{arctg}\sqrt{3}=2\ln 2-\dfrac{\pi}{3}$	**2p**
c)	Funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int\limits_1^x f(t)\,dt$ este derivabilă și $F'(x)=f(x)=\dfrac{2(x-1)}{x^2+4}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
	$F'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(-\infty,1]\Rightarrow F$ este descrescătoare pe $(-\infty,1]$ și $F'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[1,+\infty)\Rightarrow F$ este crescătoare pe $[1,+\infty)\Rightarrow F(x)\ge F(1)$, pentru orice număr real x, de unde obținem că $\int\limits_1^x f(t)\,dt\ge 0$, pentru orice număr real x	**3p**

Examenul naţional de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(1+i)^2-2(1+i)+2=1+2i+i^2-2-2i+2=$	**3p**
	$=1-1=0$	**2p**
2.	$f(1)=2\Rightarrow 1+a-5=2$	**3p**
	$a=6$	**2p**
3.	$\log_4\left(x^2+1\right)=\log_4\left(x(x+1)\right)$, deci $x^2+1=x^2+x$	**3p**
	$x=1$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 9 numere divizibile cu 2 și cu 5, deci sunt 9 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{9}{90}=\frac{1}{10}$	**1p**
5.	$m_{MN}=1$ și, cum dreptele sunt paralele, obținem $m_d=1$	**3p**
	$P\in d$, deci ecuația dreptei d este $y-y_P=m_d\left(x-x_P\right)$, adică $y=x-3$	**2p**
6.	$\text{tg}\,A=\frac{BC}{AC}$	**2p**
	$\text{tg}\,B=\frac{AC}{BC}=\frac{1}{\frac{BC}{AC}}=\frac{1}{\text{tg}A}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(A(0)\right)=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=8+0+0-0-0-0=8$	**3p**
b)	$A(a)-2I_3=\begin{pmatrix}a+2&0&-a\\0&2&0\\3a&0&2-3a\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&0&-a\\0&0&0\\3a&0&-3a\end{pmatrix}$, pentru orice număr real a	**3p**
	$aB=a\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\3&0&-3\end{pmatrix}$, pentru orice număr real a, deci $B=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\3&0&-3\end{pmatrix}$	**2p**
c)	$A(n)\cdot A(-n)=\begin{pmatrix}4+2n^2&0&-2n^2\\0&4&0\\6n^2&0&4-6n^2\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(A(n)\cdot A(-n)\right)=64\left(1-n^2\right)$, unde n este număr natural	**3p**
	$64\left(1-n^2\right)>0$ și, cum n este număr natural, obținem $n=0$	**2p**

2.a)	$2*0=\frac{1}{2}\left(2+0+\left\|2-0\right\|\right)=$	**3p**
	$=\frac{1}{2}(2+2)=2$	**2p**
b)	$a\le b\Rightarrow\left\|a-b\right\|=b-a$	**2p**
	$a*b=\frac{1}{2}\left(a+b+\left\|a-b\right\|\right)=\frac{1}{2}(a+b+b-a)=\frac{1}{2}\cdot 2b=b$, pentru orice numere reale a şi b astfel încât $a\le b$	**3p**
c)	$x^2+1\ge 2x$ şi $x^2+1\ge -2x$, pentru orice număr real x, deci $\left((2x)*\left(x^2+1\right)\right)*(-2x)=$	**3p**
	$=\left(x^2+1\right)*(-2x)=(-2x)*\left(x^2+1\right)=x^2+1$, pentru orice număr real x	
	$x^2+1=10$, deci $x=-3$ sau $x=3$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=1-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}=$	**3p**
	$=1-\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}=\frac{\sqrt{x^2+3}-x}{\sqrt{x^2+3}}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+3}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-\left(x^2+3\right)}{x+\sqrt{x^2+3}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3}{x+\sqrt{x^2+3}}=0$	**3p**
	Dreapta de ecuaţie $y=0$ este asimptota orizontală spre $+\infty$ la graficul funcţiei f	**2p**
c)	$f'(x)>0$, pentru orice număr real x, deci f este strict crescătoare	**2p**
	Cum $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ şi f este funcţie continuă, ecuaţia $f(x)=a$ are soluţie $\Leftrightarrow a\in(-\infty,0)$	**3p**
2.a)	$\int_0^2\left(x^2+x+3\right)f(x)\,dx=\int_0^2\left(x^2+x+3\right)\frac{x}{x^2+x+3}\,dx=\int_0^2 x\,dx=\frac{x^2}{2}\Big\|_0^2=$	**3p**
	$=\frac{4}{2}=2$	**2p**
b)	$\int_1^2 g(x)\,dx=\int_1^2\frac{2x+1}{x^2+x+3}\,dx=\int_1^2\frac{\left(x^2+x+3\right)'}{x^2+x+3}\,dx=$	**3p**
	$=\ln\left(x^2+x+3\right)\Big\|_1^2=\ln 9-\ln 5=\ln\frac{9}{5}$	**2p**
c)	$0\le\frac{x}{x^2+x+3}\le\frac{1}{2}$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$, deci $0\le f^n(x)\le\left(\frac{1}{2}\right)^n$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$ şi orice număr natural nenul n	**2p**
	$0\le I_n=\int_a^b f^n(x)\,dx\le\left(\frac{1}{2}\right)^n(b-a)$, pentru orice număr natural nenul n şi, cum $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$, obţinem că $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$	**3p**

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z^2-z-i=1+2i+i^2-1-i-i=$	**3p**
	$=1+2i-1-1-2i=-1$	**2p**
2.	$\Delta=9-4(3-n)=4n-3$	**2p**
	$\Delta>0\Leftrightarrow n>\frac{3}{4}$, deci $n=1$	**3p**
3.	$2+\log_5 x+\frac{1}{\log_5 x}=4\Rightarrow(\log_5 x-1)^2=0$	**3p**
	$\log_5 x=1$, deci $x=5$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	În această mulțime există 45 de numere divizibile cu 2, 30 de numere divizibile cu 3 și 15 numere divizibile atât cu 2 cât și cu 3, deci sunt $45+30-15=60$ de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{60}{90}=\frac{2}{3}$	**1p**
5.	Distanța de la punctul C la dreapta AB este egală cu 2	**2p**
	$AB=5\Rightarrow \mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{5\cdot 2}{2}=5$	**3p**
6.	$\sin(\pi-x)=\sin x$, $\cos(\pi-x)=-\cos x\Rightarrow E(x)=\operatorname{tg}2x$, pentru orice $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$	**3p**
	$E\left(\frac{\pi}{8}\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A+I_3=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A+I_3)=\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1+0+0-0-0-0=1$	**3p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$	**2p**
	$A\cdot A\cdot A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=O_3$	**3p**

c)	Pentru $X=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, obținem $A\cdot X=\begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $X\cdot A=\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & d & e \\ 0 & g & h \end{pmatrix}$	**2p**
	$A\cdot X=X\cdot A\Rightarrow d=h=0$, $g=0$, $a=e=i$, $b=f$, deci $X=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}=aI_3+bA+cA\cdot A$, unde a, b și c sunt numere reale	**3p**
2.a)	$5*2=\lvert 5-2\rvert=3$	**2p**
	$(5*2)*1=3*1=\lvert 3-1\rvert=2$	**3p**
b)	$x*y=\lvert x-y\rvert=\lvert -(y-x)\rvert=$	**2p**
	$=\lvert y-x\rvert=y*x$, pentru orice numere reale x și y, deci legea de compoziție „$*$” este comutativă	**3p**
c)	$(a*b)+(b*c)=\lvert a-b\rvert+\lvert b-c\rvert\geq\lvert (a-b)+(b-c)\rvert=$	**3p**
	$=\lvert a-b+b-c\rvert=\lvert a-c\rvert=a*c$, pentru orice numere reale a, b și c	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{(2x-2)e^x-(x^2-2x+1)e^x}{e^{2x}}=\dfrac{e^x(2x-2-x^2+2x-1)}{e^{2x}}=$	**3p**
	$=\dfrac{-x^2+4x-3}{e^x}=\dfrac{-(x-1)(x-3)}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$ sau $x=3$	**2p**
	$f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in(-\infty,1]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty,1]$, $f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[1,3]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[1,3]$ și $f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in[3,+\infty)\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[3,+\infty)$	**3p**
c)	f este crescătoare pe $[1,3]$, f este descrescătoare pe $[3,+\infty)$ și $f(3)=\dfrac{4}{e^3}$, deci $f(x)\leq\dfrac{4}{e^3}$, pentru orice $x\in[1,+\infty)$	**2p**
	$\dfrac{(x-1)^2}{e^x}\leq 4e^{-3}\Rightarrow(x-1)^2\leq 4e^{x-3}$, deci $x-1\leq 2e^{\frac{x-3}{2}}$, pentru orice $x\in[1,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\int_0^2 f^2(x)\,dx=\int_0^2(x+1)\,dx=\left(\dfrac{x^2}{2}+x\right)\Big\rvert_0^2=$	**3p**
	$=\dfrac{4}{2}+2=4$	**2p**
b)	$\int_0^1\ln\sqrt{x+1}\,dx=\dfrac{1}{2}\int_0^1\ln(x+1)\,dx=\dfrac{1}{2}\int_0^1(x+1)'\ln(x+1)\,dx=\dfrac{1}{2}(x+1)\ln(x+1)\Big\rvert_0^1-\dfrac{1}{2}\int_0^1 dx=$	**3p**
	$=\ln 2-\dfrac{1}{2}x\Big\rvert_0^1=\ln 2-\dfrac{1}{2}$	**2p**

c)	$F:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_0^x e^{f(t)}dt$ derivabilă și $F'(x)=e^{f(x)}>0$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$	**2p**
	F este strict crescătoare și continuă, $F(0)=0$ și $F(2021)=\int_0^{2021} e^{\sqrt{t+1}}dt\geq\int_0^{2021}1dt=2021$, deci există un singur $x\in[0,+\infty)$, pentru care $\int_0^x e^{f(t)}dt=2021$	**3p**

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z^4=\left(z^2\right)^2=(1-i)^2=1-2i+i^2=-2i$	**3p**
	$z^4+2i=-2i+2i=0$	**2p**
2.	$\Delta=4-4m$ și valoarea minimă a funcției f este $-\frac{\Delta}{4\cdot 1}=-\frac{4-4m}{4}=m-1$	**3p**
	$m-1>1$, deci $m\in(2,+\infty)$	**2p**
3.	$\log_5(x+2)(2x-1)=2\Rightarrow(x+2)(2x-1)=25\Rightarrow 2x^2+3x-27=0$	**3p**
	$x=-\frac{9}{2}$, care nu convine; $x=3$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de trei cifre are 900 de elemente, deci sunt 900 de cazuri posibile	**2p**
	Numerele naturale care au suma cifrelor divizibilă cu 9 sunt multiplii de 9, deci mulțimea cazurilor favorabile este $\{9\cdot 12, 9\cdot 13, 9\cdot 14,\ldots, 9\cdot 111\}$ și are 100 de elemente	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{100}{900}=\frac{1}{9}$	**1p**
5.	$\overrightarrow{AB}=\vec{i}+\vec{j}$, $\overrightarrow{AC}=2\vec{i}+4\vec{j}$ și $\overrightarrow{AD}=(x_D-2)\vec{i}+(y_D-1)\vec{j}$	**3p**
	$\vec{i}+\vec{j}+2\vec{i}+4\vec{j}+(x_D-2)\vec{i}+(y_D-1)\vec{j}=\vec{0}\Rightarrow x_D=-1$ și $y_D=-4$	**2p**
6.	Cum $\cos(\pi-x)=-\cos x$, obținem $-4\cos^2 x+3=0$, deci $\cos^2 x=\frac{3}{4}$	**2p**
	Pentru $x\in(0,1)$, $\cos x>0$, deci $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ și $x=\frac{\pi}{6}$, care convine	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1\cdot 2\cdot 3+0+0-0-0-0=6$	**3p**
b)	$A\cdot B+B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}=B\cdot A$	**2p**

c)	Cum $B\cdot B\cdot B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, obținem $x+1+2(y-2)=0$ și $2(x+1)+3(y-2)=0$	**3p**
	$x=-1$, $y=2$	**2p**
2.a)	$2*4=2^4=16$	**2p**
	$4*2=4^2=16$, deci $2*4=4*2$	**3p**
b)	$2*1=2^1=2$ și $1*2=1^2=1$	**2p**
	Deoarece $2*1\neq 1*2$, legea de compoziție „$*$” nu este comutativă	**3p**
c)	$(2*2)*n<64\Leftrightarrow 4*n<64\Leftrightarrow 4^n<4^3$	**3p**
	Cum n este număr natural nenul, obținem $n=1$ sau $n=2$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=2+\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}=$	**3p**
	$=\dfrac{2(x^2+x+1)+2x+1}{x^2+x+1}=\dfrac{2x^2+4x+3}{x^2+x+1}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f(x+1)-f(x)=2(x+1)+\ln(x^2+3x+3)-2x-\ln(x^2+x+1)=2+\ln\dfrac{x^2+3x+3}{x^2+x+1}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x))=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\ln\dfrac{x^2+3x+3}{x^2+x+1}\right)=2+\ln 1=2$	**3p**
c)	$f'(x)>0$, pentru orice număr real $x\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}\Rightarrow f$ este injectivă	**2p**
	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(2+\dfrac{\ln(x^2+x+1)}{x}\right)$ și $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(x^2+x+1)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\frac{2x+1}{x^2+x+1}}{1}=0$, deci $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ și, cum $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ și f este continuă pe $\mathbb{R}$, obținem că f este surjectivă, deci f este bijectivă	**3p**
2.a)	$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1(2x-1)\,dx=(x^2-x)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=1-1=0$	**2p**
b)	$\int_0^1 e^x\lvert f(x)\rvert\,dx=\int_0^1 e^x\lvert 2x-1\rvert\,dx=\int_0^{\frac12}e^x(1-2x)\,dx+\int_{\frac12}^1 e^x(2x-1)\,dx=e^x(3-2x)\Big\vert_0^{\frac12}+e^x(2x-3)\Big\vert_{\frac12}^1=$	**3p**
	$=2\sqrt{e}-3-e+2\sqrt{e}=4\sqrt{e}-e-3$	**2p**
c)	$I_n=\int_0^1(2x-1)^n\,dx=\dfrac{(2x-1)^{n+1}}{2(n+1)}\Big\vert_0^1=\dfrac{1-(-1)^{n+1}}{2(n+1)}$, unde n este număr natural nenul	**3p**
	Cum $0\le I_n\le\dfrac{1}{n+1}$, obținem $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$m_a=\frac{a+b}{2}=\frac{2021-\sqrt{2}+2021+\sqrt{2}}{2}=$	**3p**
	$=\frac{2\cdot 2021}{2}=2021$	**2p**
2.	$f(1)=m\Leftrightarrow 1-3+1=m$	**3p**
	$m=-1$	**2p**
3.	$\log_3\left(\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)\right)=2$, deci $\left(\sqrt{x}\right)^2-9=3^2$	**3p**
	$x-9=9$, deci $x=18$, care convine	**2p**
4.	O mulțime cu n elemente are 2^n submulțimi	**3p**
	$2^n=16$, deci $n=4$	**2p**
5.	$MNQP$ este paralelogram, deci segmentele MQ și PN au același mijloc	**3p**
	Coordonatele punctului Q sunt $x=11$ și $y=6$	**2p**
6.	În ΔABC, $2\sin A\cdot\cos A\cdot\cos A=\sin A$, deci $\cos^2 A=\frac{1}{2}$	**3p**
	Cum unghiul A este ascuțit, obținem $\cos A=\frac{1}{\sqrt{2}}$, deci $A=\frac{\pi}{4}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A(1)\right)=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1+0+0-0-0-0=1$	**3p**
b)	$\det\left(A(a)\right)=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&a&0\\1+\log_2 a&0&1\end{vmatrix}=a$, pentru orice $a\in(0,+\infty)$	**3p**
	$\det\left(A(a)\right)\neq 0$, pentru orice $a\in(0,+\infty)$, deci matricea $A(a)$ este inversabilă	**2p**
c)	$\left(A(a)\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{a}&0\\-1-\log_2 a&0&1\end{pmatrix}$, pentru orice $a\in(0,+\infty)$	**2p**
	$A(a)+\left(A(a)\right)^{-1}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&a+\frac{1}{a}&0\\0&0&2\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A(a)+\left(A(a)\right)^{-1}\right)=4\left(a+\frac{1}{a}\right)$ și, cum $a+\frac{1}{a}\geq 2$,	**3p**
	obținem că $\det\left(A(a)+\left(A(a)\right)^{-1}\right)\geq 8$, pentru orice $a\in(0,+\infty)$	

2.a)	Pentru $m=1$, obținem $x\circ y=xy-(x+y)+2$, deci $2\circ 2=2\cdot 2-(2+2)+2=$	**3p**
	$=4-4+2=2$	**2p**
b)	$2\circ 1=5\Leftrightarrow 2\cdot 1-m(2+1)+m(m+1)=5\Leftrightarrow m^2-2m-3=0$ și, cum $m\in(0,+\infty)\Rightarrow m=3$	**3p**
	$2\circ 5=2\cdot 5-3(2+5)+3\cdot 4=10-21+12=1$	**2p**
c)	$-m^2x^5-m\left(mx^3-mx^2\right)+m^2+m=m\Leftrightarrow m^2\left(x^5+x^3-x^2-1\right)=0$	**2p**
	Cum $m\in(0,+\infty)$, obținem $x^3\left(x^2+1\right)-x^2-1=0\Leftrightarrow\left(x^2+1\right)\left(x^3-1\right)=0$, deci $x=1$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=4x^3-\frac{4}{x}=\frac{4x^4-4}{x}=$	**3p**
	$=\frac{4\left(x^4-1\right)}{x}=\frac{4\left(x^2+1\right)(x+1)(x-1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$	**2p**
	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(0,1]$, deci f este descrescătoare pe $(0,1]$ și $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[1,+\infty)$, deci f este crescătoare pe $[1,+\infty)$	**3p**
c)	$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$	**2p**
	Cum $f(1)=-1$, f este continuă, f este strict descrescătoare pe $(0,1)$ și f este strict crescătoare pe $(1,+\infty)$, obținem că ecuația $f(x)=0$ are exact două soluții distincte în intervalul $(0,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\int_0^1\left(x^4+1\right)f(x)\,dx=\int_0^1\left(x^4+1+2x\right)dx=\left(\frac{x^5}{5}+x+x^2\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=\frac{1}{5}+1+1=\frac{11}{5}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F'(x)}{x'}=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2x}{x^4+1}\right)=1$	**3p**
	Asimptota oblică spre $+\infty$ la graficul funcției F are panta egală cu 1	**2p**
c)	$G(x)=\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^x\left(1+\frac{2t}{t^4+1}\right)dt=\left(t+\operatorname{arctg}\left(t^2\right)\right)\Big\vert_0^x=x+\operatorname{arctg}\left(x^2\right)$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
	$\int_0^1 xG(x)\,dx=\int_0^1\left(x^2+x\operatorname{arctg}\left(x^2\right)\right)dx=\frac{x^3}{3}\Big\vert_0^1+\frac{1}{2}\int_0^1\left(x^2\right)'\operatorname{arctg}\left(x^2\right)dx=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}x^2\operatorname{arctg}\left(x^2\right)\Big\vert_0^1-\int_0^1\frac{x^3}{x^4+1}dx=$ $=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}\ln\left(x^4+1\right)\Big\vert_0^1=\frac{1}{3}+\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\ln 2$	**3p**

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Testul 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a+ib-2(a-ib)=-2+6i \Leftrightarrow -a+3ib=-2+6i$, unde $z=a+ib$, $a,b\in\mathbb{R}$	**3p**
	$a=2$ și $b=2$, deci $z=2+2i$	**2p**
2.	$f^2(1)=f(0)\cdot f(2)\Leftrightarrow (1+m)^2=m(4+m)\Leftrightarrow m^2+2m+1=4m+m^2$	**3p**
	$2m=1$, deci $m=\frac{1}{2}$, care convine	**2p**
3.	$(x-1)^2=3x+1\Rightarrow x^2-5x=0$	**3p**
	$x=0$, care nu convine; $x=5$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea $A=\{0,1,2,\ldots,20\}$ are 21 de elemente, deci sunt 21 de cazuri posibile	**2p**
	Numerele din mulțimea A al căror pătrat aparține mulțimii A sunt 0, 1, 2, 3 și 4, deci sunt 5 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{5}{21}$	**1p**
5.	$\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$	**2p**
	$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DA}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$	**3p**
6.	$\frac{BC}{\sin A}=2R$, unde R este raza cercului circumscris triunghiului	**2p**
	Cum $\sin A=\frac{1}{2}$, obținem $2BC=2R$, deci $BC=R$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(m)+A(-m)=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, pentru orice număr real m	**2p**
	$\det\left(A(m)+A(-m)\right)=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{vmatrix}=8-0=8$, pentru orice număr real m	**3p**
b)	$A(m)\cdot A(m)=\begin{pmatrix}1&0&0\\2m&1&0\\m^2&2m&1\end{pmatrix}$, pentru orice număr real m	**3p**
	$A(m)\cdot A(m)=A(0)\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\2m&1&0\\m^2&2m&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Leftrightarrow m=0$	**2p**

c)	$A(2k-1)-A(2k)=\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}$, pentru orice număr natural nenul k	**2p**
	$A(1)-A(2)+A(3)-A(4)+...+A(2n-1)-A(2n)=n\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}=n\left(A(-1)-A(0)\right)$, pentru orice număr natural nenul n	**3p**
2.a)	$\frac{1}{2}*\frac{3}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^2+4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2=$	**3p**
	$=\frac{1}{4}+3+\frac{9}{4}=\frac{11}{2}$	**2p**
b)	$x*(-x)=(-x)*x=-2x^2$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\left(-2x^2\right)*\left(-2x^2\right)=24x\Leftrightarrow 24x^4=24x$, de unde obținem $x=0$ sau $x=1$	**3p**
c)	$x*\frac{1}{x}=x^2+4\cdot x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=x^2+4+\frac{1}{x^2}$, pentru orice număr real nenul x	**2p**
	$\left(x*\frac{1}{x}\right)-6=x^2+4+\frac{1}{x^2}-6=x^2-2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\geq 0$, deci $x*\frac{1}{x}\geq 6$, pentru orice număr real nenul x	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+2}-(x+2)\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}}{x^2+2}=$	**3p**
	$=\dfrac{x^2+2-x^2-2x}{\left(x^2+2\right)\sqrt{x^2+2}}=\dfrac{2(1-x)}{\left(x^2+2\right)\sqrt{x^2+2}}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{(x+2)^2}{x^2+2}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+2}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{4x+2}{x^2+2}\right)^x=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(1+\dfrac{4x+2}{x^2+2}\right)^{\frac{x^2+2}{4x+2}}\right)^{\frac{x(4x+2)}{x^2+2}}=e^4$	**2p**
c)	$f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in(-\infty,1]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $(-\infty,1]$ și $f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in[1,+\infty)\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[1,+\infty)$ și, cum $f(1)=\sqrt{3}$, obținem că $f(x)\leq\sqrt{3}$, pentru orice număr real x	**3p**
	$f\left(e^x\right)\leq\sqrt{3}\Rightarrow\dfrac{e^x+2}{\sqrt{e^{2x}+2}}\leq\sqrt{3}\Rightarrow\dfrac{e^x+2}{\sqrt{3}}\leq\sqrt{e^{2x}+2}$, pentru orice număr real x	**2p**
2.a)	$\int_1^{\sqrt{2}}\left(f(x)+\ln x\right)dx=\int_1^{\sqrt{2}}x^3dx=\left.\dfrac{x^4}{4}\right\vert_1^{\sqrt{2}}=$	**3p**
	$=\frac{4}{4}-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$	**2p**

b)	$\int_1^e x\left(x^3-f(x)\right)dx=\int_1^e x\ln x\,dx=\frac{x^2}{2}\ln x\Big\vert_1^e-\int_1^e\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{e^2}{2}-\frac{x^2}{4}\Big\vert_1^e=$	**3p**
	$=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{e^2+1}{4}$	**2p**
c)	$\int_1^{e^2}\frac{1}{x}f\left(\sqrt{x}\right)dx=\int_1^{e^2}\frac{1}{x}\left(\left(\sqrt{x}\right)^3-\ln\sqrt{x}\right)dx=\int_1^{e^2}\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}\ln x\right)dx=\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-\frac{1}{4}\ln^2 x\right)\Big\vert_1^{e^2}=$	**3p**
	$=\frac{2}{3}e^3-\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\ln^2\left(e^2\right)=\frac{2}{3}e^3-\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\cdot 4=\frac{2e^3-5}{3}$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{4^3}=4=$	**3p**
	$=2^2=\left(\log_3 9\right)^2\Rightarrow \sqrt[3]{4}$, $\log_3 9$ și $\sqrt[3]{16}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice	**2p**
2.	$f(-x)=-f(x)$, pentru orice număr real x	**2p**
	$g(-x)=\left(f(-x)\right)^2=\left(-f(x)\right)^2=\left(f(x)\right)^2=g(x)$, pentru orice număr real x, deci funcția g este pară	**3p**
3.	$2^{2x}-\sqrt{2}\cdot 2^x-2\cdot 2^x+2\sqrt{2}=0\Leftrightarrow 2^x\left(2^x-\sqrt{2}\right)-2\left(2^x-\sqrt{2}\right)=0\Leftrightarrow\left(2^x-2\right)\left(2^x-\sqrt{2}\right)=0$	**3p**
	$x=1$ sau $x=\dfrac{1}{2}$	**2p**
4.	$T_{k+1}=C_{10}^k\left(x\sqrt{x}\right)^{10-k}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^k=C_{10}^k x^{\frac{3(10-k)}{2}-2k}=C_{10}^k x^{\frac{30-7k}{2}}$, unde $k\in\{0,1,2,\ldots,10\}$	**3p**
	$\dfrac{30-7k}{2}=8\Leftrightarrow k=2$, deci $T_3=C_{10}^2x^8$ îl conține pe x^8	**2p**
5.	$\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$, deci punctul M este mijlocul segmentului BC	**3p**
	$\overrightarrow{BC}=-2\overrightarrow{CM}$, deci $k=-2$	**2p**
6.	$2\sin x\cos x+6\cos x-\sin x-3=0\Leftrightarrow 2\cos x(\sin x+3)-(\sin x+3)=0\Leftrightarrow(\sin x+3)(2\cos x-1)=0$	**2p**
	$\sin x+3\neq 0$, deci $\cos x=\dfrac{1}{2}$ și, cum $x\in(0,\pi)$, obținem $x=\dfrac{\pi}{3}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ 4 & -1 & -1\end{vmatrix}=2+1+0-4-0-0=$	**3p**
	$=3-4=-1$	**2p**
b)	Cum $\begin{vmatrix}-1 & -1\\ m-1 & m\end{vmatrix}=-m+m-1=$	**3p**
	$=-1\neq 0$, deci matricea $M(m)$ are rangul cel puțin egal cu 2, pentru orice număr real m	**2p**
c)	$M(m)\cdot A=I_3\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ m+2 & -m-1 & 0\\ -m-2 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$	**3p**
	$m=-2$, care convine	**2p**
2.a)	$(2+i)\circ(2-i)=2+i+2-i+(2+i)(2-i)=$	**3p**
	$=4+4-i^2=9$	**2p**

b)	$A=-1+(a+1)i-1+(a-1)i+\left(-1+(a+1)i\right)\left(-1+(a-1)i\right)=$	**2p**
	$=-2+2ai+1-(a-1)i-(a+1)i-\left(a^2-1\right)=-a^2<0$, pentru orice număr real nenul a	**3p**
c)	$2z+z^2=-5\Leftrightarrow z^2+2z+5=0$	**3p**
	$z=-1-2i$ sau $z=-1+2i$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(\ln(x+1)-\ln(x+3)\right)'=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}=$	**3p**
	$=\frac{x+3-(x+1)}{(x+1)(x+3)}=\frac{2}{(x+1)(x+3)}$, $x\in(-1,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}\ln\frac{x+1}{x+3}=-\infty$	**3p**
	Dreapta de ecuație $x=-1$ este asimptota verticală la graficul funcției f	**2p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xf(x)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\ln\frac{x+1}{x+3}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x+3}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{-2}{x+3}\right)^x=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\left(1+\frac{-2}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{-2}}\right)^{\frac{-2x}{x+3}}=\ln e^{-2}=-2$	**3p**
2.a)	$\int_0^1\left(e^xf(x)-2\right)dx=\int_0^1\left(x^2-1\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=\frac{1}{3}-1=-\frac{2}{3}$	**2p**
b)	$\int_1^e f(\ln x)dx=\int_1^e\left(\ln^2x+1\right)\cdot\frac{1}{x}dx=\int_1^e\left(\ln^2x+1\right)\cdot(\ln x)'dx=\left(\frac{\ln^3x}{3}+\ln x\right)\Big\vert_1^e=$	**3p**
	$=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$	**2p**
c)	$f'(x)=-\frac{(x-1)^2}{e^x}\le0$, pentru orice număr real x, deci f este descrescătoare, de unde obținem că $f(1)\le f(x)\le f(0)$, pentru orice $x\in[0,1]$	**2p**
	Pentru orice $x\in[0,1]$, $\frac{2}{e}\le f(x)\le1\Rightarrow\frac{2}{e}x^n\le x^nf(x)\le x^n$, deci $\frac{2}{e(n+1)}\le I_n\le\frac{1}{n+1}$, de unde obținem că $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$	**3p**

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2n+1<10 \Leftrightarrow n<\frac{9}{2}$	**2p**
	Cum n este număr natural, obținem că mulțimea M are 5 elemente	**3p**
2.	$\Delta=100-4m$, $y_V=m-25$	**2p**
	Vârful parabolei asociate funcției f este situat pe axa $Ox \Leftrightarrow y_V=0 \Leftrightarrow m=25$	**3p**
3.	$\sqrt{x-5}=7-x \Rightarrow x-5=(7-x)^2$, deci $x^2-15x+54=0$	**3p**
	$x=6$, care convine; $x=9$, care nu convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de trei cifre are 900 de elemente, deci sunt 900 de cazuri posibile	**2p**
	Sunt $9\cdot 10\cdot 8=720$ de numere naturale de trei cifre care nu sunt multipli de 5, deci sunt 720 de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{720}{900}=\frac{4}{5}$	**1p**
5.	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}$, deci punctul C este mijlocul segmentului AB	**3p**
	Coordonatele punctului C sunt $x_C=1$, $y_C=\frac{7}{2}$	**2p**
6.	$\mathcal{A}_{ABC}=\frac{AB\cdot AC\cdot \sin A}{2} \Rightarrow 6=\frac{4\cdot 5\cdot \sin A}{2} \Rightarrow \sin A=\frac{3}{5}$	**3p**
	$\cos^2 A=1-\sin^2 A=\frac{16}{25}$ și, cum unghiul A este ascuțit, obținem $\cos A=\frac{4}{5}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix}1 & a+1 & a\\ 1 & 1 & a+1\\ 2 & a & 1\end{vmatrix}=1+a^2+2(a+1)^2-2a-a(a+1)-(a+1)=$	**3p**
	$=2a^2+2=2(a^2+1)$, pentru orice număr real a	**2p**
b)	$A(0)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $A(a)\cdot A(0)=\begin{pmatrix}3a+2 & a+2 & 2a+1\\ 2a+4 & 2 & a+2\\ a+4 & a+2 & a+1\end{pmatrix}$, $A(0)\cdot A(a)=\begin{pmatrix}2 & a+2 & 2a+1\\ 4 & 2a+2 & 2a+2\\ 4 & 3a+2 & 2a+1\end{pmatrix}$, pentru orice număr real a	**3p**
	$\begin{pmatrix}3a+2 & a+2 & 2a+1\\ 2a+4 & 2 & a+2\\ a+4 & a+2 & a+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & a+2 & 2a+1\\ 4 & 2a+2 & 2a+2\\ 4 & 3a+2 & 2a+1\end{pmatrix} \Leftrightarrow a=0$	**2p**
c)	Sistemul este compatibil determinat și are soluția (x_0,y_0,z_0), cu $x_0=1$, $y_0=2$ și $z_0=4$	**3p**
	Cum $x_0z_0=4=y_0^2$, obținem că x_0, y_0 și z_0 sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice	**2p**

2.a)	$x*0=\dfrac{2(x+0)}{x\cdot 0+2}=$	**3p**
	$=\dfrac{2x}{2}=x$, pentru orice $x\in M$	**2p**
b)	$x*y-2=\dfrac{2(x+y)}{xy+2}-2=\dfrac{2x+2y-2xy-4}{xy+2}=-2\cdot\dfrac{xy-x-y+2}{xy+2}=$	**3p**
	$=-2\cdot\dfrac{(x-1)(y-1)+1}{xy+2}<0$, pentru orice $x,\ y\in[1,+\infty)\Rightarrow x*y<2$, pentru orice $x,\ y\in[1,+\infty)$	**2p**
c)	Cum m și n sunt numere naturale nenule, obținem $0<m*n<2$ și, cum $m*n$ este număr natural, obținem $m*n=1$	**2p**
	$\dfrac{2(m+n)}{mn+2}=1\Leftrightarrow mn-2m-2n+2=0\Leftrightarrow (m-2)(n-2)=2$ și, cum m și n sunt numere naturale nenule, obținem perechile $(3,4)$ și $(4,3)$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=e^x\left(x^2-4x+5\right)+e^x(2x-4)=$	**3p**
	$=e^x\left(x^2-2x+1\right)=e^x(x-1)^2,\ x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}\left(x^2+4x+5\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+4x+5}{e^x}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+4}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^x}=0$	**3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$, $f'(x)>0$ pentru orice $x\in(-\infty,1)\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(-\infty,1)$ și $f'(x)>0$ pentru orice $x\in(1,+\infty)\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(1,+\infty)$	**2p**
	Cum funcția f este continuă în $x=1$, obținem că f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}\Rightarrow f$ este injectivă, deci graficul funcției f intersectează orice paralelă la Ox în cel mult un punct	**3p**
2.a)	$\int_0^1\left(4x^3+1\right)dx=\left(x^4+x\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=1+1=2$	**2p**
b)	$\int_0^1 x^2\left(f(x)\right)^3dx=\int_0^1 x^2\left(4x^3+1\right)^3dx=\dfrac{1}{12}\int_0^1\left(4x^3+1\right)'\left(4x^3+1\right)^3dx=\dfrac{1}{12}\cdot\dfrac{\left(4x^3+1\right)^4}{4}\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=\dfrac{5^4-1}{48}=13$	**2p**
c)	$4t^3+1\geq 5$, pentru orice $t\in[1,+\infty)\Rightarrow\int_1^x\ln\left(f(t)\right)dt=\int_1^x\ln\left(4t^3+1\right)dt\geq\int_1^x\ln 5\,dt=(x-1)\ln 5$, pentru orice $x\in[1,+\infty)$	**3p**
	Cum $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)\ln 5=+\infty$, obținem $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_1^x\ln\left(f(t)\right)dt=+\infty$	**2p**

Examenul naţional de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z=(2+3i)(2-3i)-(9-3i)=2^2-(3i)^2-9+3i=4+3i$	**3p**
	$\lvert z\rvert=\sqrt{4^2+3^2}=5$	**2p**
2.	$f(2)=0$	**2p**
	$(g\circ f)(2)=g(f(2))=5\cdot 0+20=20$	**3p**
3.	$4^{x-5}=4^{-2}\Leftrightarrow x-5=-2$	**3p**
	$x=3$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de trei cifre are 900 de elemente, deci sunt 900 de cazuri posibile	**2p**
	Mulțimea numerelor naturale de trei cifre care au produsul cifrelor egal cu 8 este $\{118, 181, 811, 124, 142, 214, 241, 412, 421, 222\}$, deci sunt 10 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{10}{900}=\dfrac{1}{90}$	**1p**
5.	$ABCD$ este paralelogram, deci $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$	**2p**
	$AC^2=AB^2+BC^2-2\cdot AB\cdot BC\cdot\cos(\sphericalangle ABC)=76\Rightarrow AC=2\sqrt{19}\Rightarrow\lvert\overrightarrow{AM}\rvert=AM=\sqrt{19}$	**3p**
6.	$BC^2=AB^2+AC^2\Rightarrow\Delta ABC$ este dreptunghic în $A\Rightarrow R=\dfrac{BC}{2}=10$	**2p**
	$P_{\Delta ABC}=48$ și $\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\dfrac{12\cdot 16}{2}=96\Rightarrow r=\dfrac{96}{24}=4$, de unde obținem $\dfrac{r}{R}=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(4)=\begin{pmatrix}4&1&-2\\2&1&3\\7&2&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(4))=\begin{vmatrix}4&1&-2\\2&1&3\\7&2&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=4+21+(-8)-(-14)-2-24=5$	**3p**
b)	$\det(A(a))=5a-15$, pentru orice număr real a	**2p**
	Matricea $A(a)$ **nu** este inversabilă $\Leftrightarrow\det(A(a))=0$, deci $a=3$	**3p**
c)	Pentru $a=3$ soluțiile sistemului de ecuații sunt de forma $(1+5\alpha,-1-13\alpha,\alpha)$, unde $\alpha\in\mathbb{R}$	**3p**
	$z_0^2=x_0+y_0\Leftrightarrow\alpha^2+8\alpha=0\Leftrightarrow\alpha=-8$ sau $\alpha=0$, deci $(x_0,y_0,z_0)=(-39,103,-8)$ sau $(x_0,y_0,z_0)=(1,-1,0)$	**2p**

2.a)	$4*3=\sqrt{4^{\log_3 3}}=$	**3p**
	$=\sqrt{4}=2$	**2p**
b)	$x*9=\sqrt{x^{\log_3 9}}=\sqrt{x^2}=x$, pentru orice $x\in G$	**2p**
	$9*x=\sqrt{9^{\log_3 x}}=\sqrt{3^{2\log_3 x}}=\sqrt{\left(3^{\log_3 x}\right)^2}=\sqrt{x^2}=x$, pentru orice $x\in G$, deci $e=9$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**3p**
c)	$x*x=e\Rightarrow\sqrt{x^{\log_3 x}}=9\Rightarrow x^{\log_3 x}=81\Rightarrow\log_3 x^{\log_3 x}=\log_3 81$, deci $\log_3^2 x=4$	**3p**
	$\log_3 x=-2$ sau $\log_3 x=2\Rightarrow x=\frac{1}{9}$, care nu convine; $x=9$, care convine	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=2x\cdot\left(x^2-4\right)+\left(x^2-9\right)\cdot 2x=$	**3p**
	$=2x\left(x^2-4+x^2-9\right)=2x\left(2x^2-13\right),\ x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sin(x-3)}{f(x)-3}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sin(x-3)}{\left(x^2-9\right)\left(x^2-4\right)}=\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{\sin(x-3)}{x-3}\cdot\frac{1}{(x+3)\left(x^2-4\right)}\right)=$	**2p**
	$=1\cdot\frac{1}{(3+3)\left(3^2-4\right)}=\frac{1}{30}$	**3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-\sqrt{\frac{13}{2}},\ x=0$ sau $x=\sqrt{\frac{13}{2}}$; $f'(x)<0$, pentru orice $x\in\left(-\infty,-\sqrt{\frac{13}{2}}\right)\cup\left(0,\sqrt{\frac{13}{2}}\right)$ și $f'(x)>0$, pentru orice $x\in\left(-\sqrt{\frac{13}{2}},0\right)\cup\left(\sqrt{\frac{13}{2}},+\infty\right)$	**3p**
	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, $f\left(-\sqrt{\frac{13}{2}}\right)=f\left(\sqrt{\frac{13}{2}}\right)=-\frac{13}{4}$, $f(0)=39$, f continuă pe $\mathbb{R}$, f strict descrescătoare pe $\left(-\infty,-\sqrt{\frac{13}{2}}\right)$ și pe $\left(0,\sqrt{\frac{13}{2}}\right)$ și f strict crescătoare pe $\left(-\sqrt{\frac{13}{2}},0\right)$ și pe $\left(\sqrt{\frac{13}{2}},+\infty\right)$, deci ecuația $f(x)=m$ are exact patru soluții reale $\Leftrightarrow m\in\left(-\frac{13}{4},39\right)$	**2p**
2.a)	$\int_1^2\frac{f(x)}{\operatorname{arctg}x}dx=\int_1^2 2xdx=x^2\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=4-1=3$	**2p**
b)	$\int_0^{\sqrt{3}}f(x)dx=\int_0^{\sqrt{3}}\left(x^2+1\right)'\operatorname{arctg}x\,dx=\left(x^2+1\right)\operatorname{arctg}x\Big\vert_0^{\sqrt{3}}-\int_0^{\sqrt{3}}\left(x^2+1\right)\cdot\frac{1}{x^2+1}dx=4\cdot\frac{\pi}{3}-x\Big\vert_0^{\sqrt{3}}=$	**3p**
	$=\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$, de unde obținem $a=\frac{3}{4}$	**2p**
c)	$\int_{-1}^1 xf(x)dx=2\int_{-1}^1 x^2\operatorname{arctg}x\,dx=2\int_1^{-1}(-x)^2\operatorname{arctg}(-x)(-1)dx=-2\int_{-1}^1 x^2\operatorname{arctg}x\,dx=-\int_{-1}^1 xf(x)dx$	**3p**
	$2\int_{-1}^1 xf(x)dx=0$, deci $\int_{-1}^1 xf(x)dx=0$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Testul 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$1<\sqrt[3]{7}<2$ și $4<\log_2 21<5$, deci $A=\{2,3,4\}$	**3p**
	Produsul elementelor mulțimii A este egal cu 24	**2p**
2.	$f(x)=y \Leftrightarrow x^2+4x=5x+2 \Leftrightarrow x^2-x-2=0$	**3p**
	Abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției f cu dreapta d sunt $x=-1$ și $x=2$	**2p**
3.	$2\cdot 3^{2x}-3^{2x}-3=0 \Leftrightarrow 3^{2x}=3$	**3p**
	$2x=1$, deci $x=\dfrac{1}{2}$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de trei cifre are 900 de elemente, deci sunt 900 de cazuri posibile	**2p**
	Mulțimea numerelor naturale de trei cifre, care au cifrele numere prime distincte, are $4\cdot 3\cdot 2=24$ de elemente, deci sunt 24 de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{24}{900}=\dfrac{2}{75}$	**1p**
5.	$\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MB}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}$	**3p**
	$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AM}$, deci $AMBC$ este paralelogram	**2p**
6.	$\cos^2 x=1-\sin^2 x=\dfrac{225}{289}$	**2p**
	Cum $x\in\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$, obținem $\cos x=-\dfrac{15}{17}$, deci $\operatorname{tg} x=\dfrac{8}{15}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2)=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 1 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(2))=\begin{vmatrix}3 & 1 & 2\\ 1 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=-3+2+0-0-(-6)-1=4$	**3p**
b)	$\det(A(a))=a^2+a-2$, pentru orice număr real a	**2p**
	Sistemul de ecuații nu este compatibil determinat $\Leftrightarrow \det(A(a))=0$, deci $a=-2$ sau $a=1$	**3p**
c)	Sistemul are soluția unică (x_0,y_0,z_0), deci $a\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ și $x_0=\dfrac{5}{a+2}$	**3p**
	$x_0\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow (a+2)\mid 5$ și, cum $a\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$, obținem $a=3$	**2p**
2.a)	$1*5=1+5-\dfrac{1\cdot 5}{5}=$	**3p**
	$=1+5-1=5$	**2p**

b)	$\sqrt{x}+\sqrt{x}-\frac{x}{5}=5\Leftrightarrow 10\sqrt{x}=25+x$, unde x este număr real, $x\geq 0$	**2p**
	$\left(\sqrt{x}-5\right)^2=0$, de unde obținem $x=25$	**3p**
c)	$x*0=0*x=x$, pentru orice număr real x, deci $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**1p**
	$a*a'=0\Leftrightarrow 5a+5a'-aa'=0\Leftrightarrow a'(a-5)=5a$, deci $a'=\frac{5a}{a-5}$, pentru orice număr real a, $a\neq 5$, unde a' este simetricul lui a	**3p**
	$\frac{5a}{a-5}<0\Leftrightarrow a\in(0,5)$	**1p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\ln(x+1)+(x-1)\cdot\frac{1}{x+1}=$	**3p**
	$=\ln(x+1)+\frac{x+1-2}{x+1}=1+\ln(x+1)-\frac{2}{x+1}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{(x-1)^2}{x}\ln(x+1)\ln\left(\frac{1}{x}+1\right)\right)=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{(x-1)^2}{x^2}\ln(x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)=-\infty$	**3p**
c)	$f''(x)=\frac{x+3}{(x+1)^2}>0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)\Rightarrow f'$ este strict crescătoare pe $(0,+\infty)$	**2p**
	f' este injectivă pe $(0,+\infty)$, deci $f'(a)\neq f'(b)$, pentru orice $a,b\in(0,+\infty)$, cu $a\neq b$, de unde obținem că tangentele la graficul funcției f în punctele $A(a,f(a))$ și $B(b,f(b))$ sunt concurente, pentru orice $a,b\in(0,+\infty)$, cu $a\neq b$	**3p**
2.a)	$\int_1^2 x\sqrt{x+1}f(x)dx=\int_1^2 3x^2dx=x^3\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=8-1=7$	**2p**
b)	$\int_0^1\frac{9x^2}{x+1}dx=9\int_0^1\frac{x^2-1+1}{x+1}dx=9\int_0^1\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx=9\left(\frac{x^2}{2}-x+\ln(x+1)\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=9\left(\frac{1}{2}-1+\ln 2-0\right)=9\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)$	**2p**
c)	$\int_0^3 f(x)F(x)dx=\int_0^3 F'(x)F(x)dx=\frac{1}{2}F^2(x)\Big\vert_0^3=$	**3p**
	$=\frac{1}{2}\left(F^2(3)-F^2(0)\right)=\frac{1}{2}\left(8^2-0^2\right)=32$	**2p**

Examenul naţional de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}=1\cdot\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^5}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=$	**3p**
	$=\frac{3}{4}\left(1+\frac{1}{3^5}\right)>\frac{3}{4}$	**2p**
2.	$(f\circ f)(x)=0\Leftrightarrow -3f(x)+18=0\Leftrightarrow f(x)=6$	**3p**
	$-3x+18=6\Leftrightarrow x=4$, deci abscisa punctului de intersecție a graficului funcției $f\circ f$ cu axa Ox este egală cu 4	**2p**
3.	$2^{2-x}\left(2-1+2^3\right)=9\Leftrightarrow 2^{2-x}=1$	**3p**
	$x=2$	**2p**
4.	$T_{k+1}=C_{14}^k\left(x^3\right)^{14-k}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k=C_{14}^k x^{42-3k-\frac{k}{2}}=C_{14}^k x^{\frac{84-7k}{2}}$, unde $k\in\{0,1,2,\ldots,14\}$	**3p**
	$\frac{84-7k}{2}=0\Leftrightarrow k=12$, deci $T_{13}=C_{14}^{12}=91$ nu îl conține pe x	**2p**
5.	Punctul $M\left(\frac{a-2}{2},3\right)$ este mijlocul segmentului AB	**3p**
	$3=2\cdot\frac{a-2}{2}+3\Leftrightarrow a=2$	**2p**
6.	În ΔABC, $\operatorname{tg}C=1\Rightarrow \sphericalangle C=\frac{\pi}{4}$, deci $\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}$	**3p**
	$2R=\frac{AB}{\sin C}\Rightarrow AB=2\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(3)=\begin{pmatrix}3&1&1\\1&4&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(3))=\begin{vmatrix}3&1&1\\1&4&1\\1&-1&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=12+1+(-1)-4-(-3)-1=10$	**3p**
b)	$\det(A(a))=a^2+a-2$, pentru orice număr real a, deci $\det(A(a))=0\Leftrightarrow a=1$ sau $a=-2$	**3p**
	Cum $\det(A(n))\neq 0$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$, rangul matricei $A(n)$ este egal cu 3, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$	**2p**

c)	Pentru orice număr natural $m\geq 2$, $A(m)$ este inversabilă, deci $A^{-1}(m)$ are toate elementele numere întregi dacă $\det(A(m))=-1$ sau $\det(A(m))=1$	**3p**
	Cum $m\geq 2$, obținem $\det(A(m))=m^2+m-2\geq 4$, deci $A^{-1}(m)$ **nu** are toate elementele numere întregi	**2p**
2.a)	$8\circ 8=\dfrac{8\cdot 8-4}{8+8-4}=$	**3p**
	$=\dfrac{60}{12}=5$	**2p**
b)	$(x+2)\circ(y+2)=\dfrac{xy+2x+2y}{x+y}$, $(x+y)\circ 4=\dfrac{4x+4y-4}{x+y}$, pentru orice $x,y\in M$	**2p**
	$(x+2)\circ(y+2)-(x+y)\circ 4=\dfrac{xy-2x-2y+4}{x+y}=\dfrac{(x-2)(y-2)}{x+y}$, pentru orice $x,y\in M$ și, cum $x>2$ și $y>2$, obținem că $(x+2)\circ(y+2)>(x+y)\circ 4$, pentru orice $x,y\in M$	**3p**
c)	$x\circ x=\dfrac{x^2-4}{2x-4}=\dfrac{x+2}{2}$, $\underbrace{x\circ x\circ x\circ\ldots\circ x}_{\text{de } 2^n \text{ ori } x}=\dfrac{x+2^{n+1}-2}{2^n}$, unde $x\in M$ și n este număr natural, $n\geq 2$	**3p**
	$\dfrac{x+2^{n+1}-2}{2^n}=2^n-\dfrac{1}{2^n}\Rightarrow x=2^{2n}-2\cdot 2^n+1\Rightarrow x=\left(2^n-1\right)^2$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{1}{x-3}-2\cdot\dfrac{2x}{x^2-9}=$	**3p**
	$=\dfrac{x+3-4x}{x^2-9}=\dfrac{3(1-x)}{x^2-9}$, $x\in(3,+\infty)$	**2p**
b)	$f'(x)<0$, pentru orice $x\in(3,+\infty)\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(3,+\infty)$, deci f este injectivă	**2p**
	Cum f este continuă pe $(3,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=+\infty$ și $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$, obținem că f este surjectivă, deci f este bijectivă	**3p**
c)	$\lim\limits_{x\to 3}\left((x-3)f(x)\right)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)}{\frac{1}{x-3}}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f'(x)}{\left(\frac{1}{x-3}\right)'}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{-\frac{3(x-1)}{x^2-9}}{-\frac{1}{(x-3)^2}}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3(x-1)(x-3)^2}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3(x-1)(x-3)}{x+3}=0$	**2p**
2.a)	$\int_1^{\frac{3}{2}}\left(f(x)-\dfrac{x^2}{x^2-4}\right)dx=\int_1^{\frac{3}{2}}x\,dx=\dfrac{x^2}{2}\Big\vert_1^{\frac{3}{2}}=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{9}{4}-1\right)=\dfrac{5}{8}$	**2p**

b)	$\int_{-1}^{1}\left(f(x)+f(-x)\right)dx=\int_{-1}^{1}\frac{2x^2}{x^2-4}dx=2\int_{-1}^{1}\frac{x^2-4+4}{x^2-4}dx=2\int_{-1}^{1}\left(1+\frac{4}{x^2-4}\right)dx=2\left(x+\ln\left\lvert\frac{x-2}{x+2}\right\rvert\right)\Big\rvert_{-1}^{1}=$	**3p**
	$=2\left(1+\ln\frac{1}{3}+1-\ln 3\right)=4(1-\ln 3)$	**2p**
c)	$\int_{a}^{\sqrt{3}}\sqrt{x-f(x)}dx=\int_{a}^{\sqrt{3}}\sqrt{x-x-\frac{x^2}{x^2-4}}dx=\int_{a}^{\sqrt{3}}\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx=-\sqrt{4-x^2}\Big\rvert_{a}^{\sqrt{3}}=\sqrt{4-a^2}-1,\ a\in\left(0,\sqrt{3}\right)$	**3p**
	$\sqrt{4-a^2}=\sqrt{3}\Leftrightarrow a^2=1$ şi, cum $a\in\left(0,\sqrt{3}\right)$, obţinem $a=1$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z=(2+3i)(2-3i)-(9-3i)=2^2-(3i)^2-9+3i=4+3i$	**3p**
	$\lvert z\rvert=\sqrt{4^2+3^2}=5$	**2p**
2.	$f(2)=0$	**2p**
	$(g\circ f)(2)=g(f(2))=5\cdot 0+20=20$	**3p**
3.	$4^{x-5}=4^{-2}\Leftrightarrow x-5=-2$	**3p**
	$x=3$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de trei cifre are 900 de elemente, deci sunt 900 de cazuri posibile	**2p**
	Mulțimea numerelor naturale de trei cifre care au produsul cifrelor egal cu 8 este $\{118, 181, 811, 124, 142, 214, 241, 412, 421, 222\}$, deci sunt 10 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{10}{900}=\dfrac{1}{90}$	**1p**
5.	$ABCD$ este paralelogram, deci $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$	**2p**
	$AC^2=AB^2+BC^2-2\cdot AB\cdot BC\cdot\cos(\sphericalangle ABC)=76\Rightarrow AC=2\sqrt{19}\Rightarrow\lvert\overrightarrow{AM}\rvert=AM=\sqrt{19}$	**3p**
6.	$BC^2=AB^2+AC^2\Rightarrow\Delta ABC$ este dreptunghic în $A\Rightarrow R=\dfrac{BC}{2}=10$	**2p**
	$P_{\Delta ABC}=48$ și $\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\dfrac{12\cdot 16}{2}=96\Rightarrow r=\dfrac{96}{24}=4$, de unde obținem $\dfrac{r}{R}=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(4)=\begin{pmatrix}4&1&-2\\2&1&3\\7&2&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(4))=\begin{vmatrix}4&1&-2\\2&1&3\\7&2&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=4+21+(-8)-(-14)-2-24=5$	**3p**
b)	$\det(A(a))=5a-15$, pentru orice număr real a	**2p**
	Matricea $A(a)$ **nu** este inversabilă $\Leftrightarrow\det(A(a))=0$, deci $a=3$	**3p**
c)	Pentru $a=3$ soluțiile sistemului de ecuații sunt de forma $(1+5\alpha,-1-13\alpha,\alpha)$, unde $\alpha\in\mathbb{R}$	**3p**
	$z_0^2=x_0+y_0\Leftrightarrow\alpha^2+8\alpha=0\Leftrightarrow\alpha=-8$ sau $\alpha=0$, deci $(x_0,y_0,z_0)=(-39,103,-8)$ sau $(x_0,y_0,z_0)=(1,-1,0)$	**2p**

2.a)	$4*3=\sqrt{4^{\log_3 3}}=$	**3p**
	$=\sqrt{4}=2$	**2p**
b)	$x*9=\sqrt{x^{\log_3 9}}=\sqrt{x^2}=x$, pentru orice $x\in G$	**2p**
	$9*x=\sqrt{9^{\log_3 x}}=\sqrt{3^{2\log_3 x}}=\sqrt{\left(3^{\log_3 x}\right)^2}=\sqrt{x^2}=x$, pentru orice $x\in G$, deci $e=9$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**3p**
c)	$x*x=e\Rightarrow\sqrt{x^{\log_3 x}}=9\Rightarrow x^{\log_3 x}=81\Rightarrow\log_3 x^{\log_3 x}=\log_3 81$, deci $\log_3^2 x=4$	**3p**
	$\log_3 x=-2$ sau $\log_3 x=2\Rightarrow x=\frac{1}{9}$, care nu convine; $x=9$, care convine	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=2x\cdot\left(x^2-4\right)+\left(x^2-9\right)\cdot 2x=$	**3p**
	$=2x\left(x^2-4+x^2-9\right)=2x\left(2x^2-13\right),\ x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sin(x-3)}{f(x)-3}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sin(x-3)}{\left(x^2-9\right)\left(x^2-4\right)}=\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{\sin(x-3)}{x-3}\cdot\frac{1}{(x+3)\left(x^2-4\right)}\right)=$	**2p**
	$=1\cdot\frac{1}{(3+3)\left(3^2-4\right)}=\frac{1}{30}$	**3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-\sqrt{\frac{13}{2}},x=0$ sau $x=\sqrt{\frac{13}{2}}$; $f'(x)<0$, pentru orice $x\in\left(-\infty,-\sqrt{\frac{13}{2}}\right)\cup\left(0,\sqrt{\frac{13}{2}}\right)$ și $f'(x)>0$, pentru orice $x\in\left(-\sqrt{\frac{13}{2}},0\right)\cup\left(\sqrt{\frac{13}{2}},+\infty\right)$	**3p**
	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, $f\left(-\sqrt{\frac{13}{2}}\right)=f\left(\sqrt{\frac{13}{2}}\right)=-\frac{13}{4}$, $f(0)=39$, f continuă pe $\mathbb{R}$, f strict descrescătoare pe $\left(-\infty,-\sqrt{\frac{13}{2}}\right)$ și pe $\left(0,\sqrt{\frac{13}{2}}\right)$ și f strict crescătoare pe $\left(-\sqrt{\frac{13}{2}},0\right)$ și pe $\left(\sqrt{\frac{13}{2}},+\infty\right)$, deci ecuația $f(x)=m$ are exact patru soluții reale $\Leftrightarrow m\in\left(-\frac{13}{4},39\right)$	**2p**
2.a)	$\int_1^2\frac{f(x)}{\operatorname{arctg}x}dx=\int_1^2 2xdx=x^2\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=4-1=3$	**2p**
b)	$\int_0^{\sqrt{3}}f(x)dx=\int_0^{\sqrt{3}}\left(x^2+1\right)'\operatorname{arctg}x\,dx=\left(x^2+1\right)\operatorname{arctg}x\Big\vert_0^{\sqrt{3}}-\int_0^{\sqrt{3}}\left(x^2+1\right)\cdot\frac{1}{x^2+1}dx=4\cdot\frac{\pi}{3}-x\Big\vert_0^{\sqrt{3}}=$	**3p**
	$=\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$, de unde obținem $a=\frac{3}{4}$	**2p**
c)	$\int_{-1}^1 xf(x)dx=2\int_{-1}^1 x^2\operatorname{arctg}x\,dx=2\int_1^{-1}(-x)^2\operatorname{arctg}(-x)(-1)dx=-2\int_{-1}^1 x^2\operatorname{arctg}x\,dx=-\int_{-1}^1 xf(x)dx$	**3p**
	$2\int_{-1}^1 xf(x)dx=0$, deci $\int_{-1}^1 xf(x)dx=0$	**2p**

Examenul naţional de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 11

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}=\left\|1-\sqrt{2}\right\|=\sqrt{2}-1$	**2p**
	Cum $\sqrt[3]{\left(6-\sqrt{2}\right)^3}=6-\sqrt{2}$, obținem că $\sqrt[3]{\left(6-\sqrt{2}\right)^3}+\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}=6-\sqrt{2}+\sqrt{2}-1=5$	**3p**
2.	$f(x)=0\Leftrightarrow x=3$, deci graficul funcției f intersectează axa Ox în punctul $(3,0)$	**2p**
	$g(3)=0\Leftrightarrow 9-6m-6=0$, deci $m=\frac{1}{2}$	**3p**
3.	$\log_2\left(x^2-4x+12\right)=3\Rightarrow x^2-4x+12=8\Rightarrow x^2-4x+4=0$	**3p**
	$x=2$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Numerele naturale de două cifre care au suma cifrelor divizibilă cu 3 sunt numerele naturale de două cifre care sunt divizibile cu 3, deci sunt 30 de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{30}{90}=\frac{1}{3}$	**1p**
5.	$AB\perp BC\Rightarrow m_{AB}\cdot m_{BC}=-1$	**2p**
	Cum $m_{AB}=1$ și $m_{BC}=\frac{m-3}{2}$, obținem $\frac{m-3}{2}=-1$, deci $m=1$	**3p**
6.	$\sin\frac{25\pi}{6}=\sin\left(4\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$	**2p**
	Cum $\cos\frac{23\pi}{3}=\cos\left(6\pi+\frac{5\pi}{3}\right)=\cos\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2}$, obținem că $\sin\frac{25\pi}{6}+\cos\frac{23\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(-2,0,2)=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&1&1\\1&1&3\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A(-2,0,2)\right)=\begin{vmatrix}-1&1&1\\1&1&1\\1&1&3\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=-3+1+1-1-(-1)-3=-4$	**3p**
b)	$\det\left(A(a,b,c)\right)=\begin{vmatrix}1+a&1&1\\1&1+b&1\\1&1&1+c\end{vmatrix}=(1+a)(1+b)(1+c)+1+1-(1+a)-(1+b)-(1+c)=$	**2p**
	$=abc+ab+ac+bc\neq 0$, deci matricea $A(a,b,c)$ este inversabilă	**3p**
c)	Sistemul este compatibil nedeterminat, deci $\det\left(A(a,b,c)\right)=0\Rightarrow abc+ab+ac+bc=0$	**3p**
	$ab+ac+bc=-abc\Rightarrow\frac{ab+ac+bc}{abc}=-1$, deci $N=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=-1$, care este număr întreg	**2p**

2.a)	$1*1=\frac{1\cdot 1}{1\cdot 1-1-1+2}=\frac{1}{1-1-1+2}=$	**3p**
	$=\frac{1}{1}=1$	**2p**
b)	$f(x)*f(y)=\frac{f(x)f(y)}{f(x)f(y)-f(x)-f(y)+2}=\frac{\frac{2}{x+1}\cdot\frac{2}{y+1}}{\frac{2}{x+1}\cdot\frac{2}{y+1}-\frac{2}{x+1}-\frac{2}{y+1}+2}=$	**2p**
	$=\frac{4}{4-2(y+1)-2(x+1)+2(x+1)(y+1)}=\frac{4}{2xy+2}=\frac{2}{xy+1}=f(xy)$, pentru orice $x,y\in(0,+\infty)$	**3p**
c)	$f\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2020}{2021}\right)=\frac{2n}{n+1}\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2021}\right)=\frac{2n}{n+1}$, unde n este număr natural	**3p**
	$\frac{2}{\frac{1}{2021}+1}=\frac{2n}{n+1}\Leftrightarrow\frac{2\cdot 2021}{2022}=\frac{2n}{n+1}$, deci $n=2021$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=2\ln x-2x+2$, $x\in(0,+\infty)$	**3p**
	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=0$	**2p**
b)	$f''(x)=\frac{2(1-x)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
	Cum $f''(x)>0$, pentru orice $x\in(0,1)$, obținem că funcția f este convexă pe $(0,1)$	**3p**
c)	$f''(x)<0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)\Rightarrow f'$ strict descrescătoare pe $x\in(1,+\infty)\Rightarrow f'(x)<f'(1)$, deci $f'(x)<0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$	**2p**
	f continuă și f strict descrescătoare pe $(1,+\infty)\Rightarrow f(x)<f(1)$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$, deci $2x\ln x-x^2+3<2$, de unde obținem $2\ln x<x-\frac{1}{x}$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$	**3p**
2.a)	$I_1+\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\int_0^1\frac{x}{1+x}dx+\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\int_0^1\left(\frac{x}{1+x}+\frac{1}{1+x}\right)dx=\int_0^1 1dx=$	**3p**
	$=x\Big\vert_0^1=1$	**2p**
b)	$I_2=2\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx=2\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=2\left(x-\text{arctg}\,x\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)=2-\frac{\pi}{2}$	**2p**
c)	$I_n=n\int_0^1\frac{x^n}{1+x^n}dx=\int_0^1 x\cdot\left(\ln\left(1+x^n\right)\right)'dx\le\int_0^1\left(\ln\left(1+x^n\right)\right)'dx=$	**3p**
	$=\ln\left(1+x^n\right)\Big\vert_0^1=\ln 2$, deci $I_n\le\ln 2$, pentru orice număr natural nenul n	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 12

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a=2\sqrt{2}$	**2p**
	Cum $\sqrt{4}<\sqrt{8}<\sqrt{9}$, deci $2<a<3$, obținem că $[a]=2$	**3p**
2.	Axa Ox este tangentă la graficul funcției $f \Rightarrow \Delta=0$	**2p**
	$m^2-4=0$, deci $m=-2$ sau $m=2$	**3p**
3.	$(x-1)(x+2)=(x-1)(x+2)^2 \Rightarrow (x-1)(x+2)(x+1)=0$	**2p**
	$x=-2$, care nu convine; $x=-1$, care nu convine; $x=1$, care convine	**3p**
4.	$C_n^2=55 \Rightarrow \dfrac{n(n-1)}{2}=55 \Rightarrow n^2-n-110=0$	**3p**
	Cum n este număr natural, $n\geq 2$, obținem $n=11$	**2p**
5.	Punctul de intersecție a dreptelor d_1 și d_2 este punctul $M(-1,-1)$	**2p**
	$m_{d_2}=-1$ și, cum $m_d \cdot m_{d_2}=-1$, obținem $m_d=1$, deci ecuația dreptei d este $y=x$	**3p**
6.	$\sin\dfrac{5\pi}{12}+\sin\dfrac{\pi}{12}=2\sin\dfrac{\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{12}}{2}\cos\dfrac{\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{12}}{2}=2\sin\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{6}=$	**3p**
	$=2\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(4,2)=\begin{pmatrix}2&-2&1\\1&4&3\\3&-2&2\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(4,2))=\begin{vmatrix}2&-2&1\\1&4&3\\3&-2&2\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=16+(-2)+(-18)-12-(-12)-(-4)=0$	**3p**
b)	$A(2,1)=\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&2&3\\3&-2&1\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(2,1))=0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A(2,1))\leq 2$	**3p**
	Cum $\begin{vmatrix}2&-1\\1&2\end{vmatrix}=5\neq 0$, obținem că rangul matricei $A(2,1)$ este egal cu 2	**2p**
c)	$n^2-3n+1=p^2-3p+1 \Leftrightarrow (n-p)(n+p-3)=0$	**2p**
	Cum n și p sunt numere naturale nenule și distincte, obținem $n+p=3$, iar perechile sunt $(1,2)$ și $(2,1)$	**3p**
2.a)	$(-1)*3=\dfrac{-3}{3}-(-1)-3+6=$	**3p**
	$=-1+1-3+6=3$	**2p**

b)	$x*(y+z-3)=\dfrac{x(y+z-3)}{3}-x-(y+z-3)+6=\dfrac{xy+xz}{3}-2x-y-z+9=$	**2p**
	$=\dfrac{xy}{3}-x-y+6+\dfrac{xz}{3}-x-z+6-3=(x*y)+(x*z)-3$, pentru orice numere reale x, y și z	**3p**
c)	$x*6=6*x=x$, pentru orice număr real x, deci $e=6$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”, de unde obținem că $x*x'=x'*x=6$, unde x' este simetricul lui x în raport cu legea de compoziție „$*$”	**2p**
	Deoarece $2x-3=x+x-3$ și $x*(y+z-3)=(x*y)+(x*z)-3$, pentru orice $x,y,z\in\mathbb{R}$, obținem $(x*x)+(x*x')-3+(x'*x)+(x'*x)-3=42\Leftrightarrow(x*x)+6-3+6+6-3=42$, deci $x*x=30\Rightarrow\dfrac{x^2}{3}-2x+6=30$, de unde obținem $x=-6$ sau $x=12$, care convin	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f(x)=\sqrt{x^2+2}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+2}}\cdot(x^2+2)'=$	**3p**
	$=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+2}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	Tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=\sqrt{2}$, situat pe graficul funcției f, este paralelă cu axa $Ox\Leftrightarrow f'(\sqrt{2})=0$	**2p**
	Cum $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}-a$, pentru orice număr real a, obținem că $\dfrac{\sqrt{2}}{2}-a=0$, deci $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	**3p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2}-ax}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}-a\right)}{x}=1-a$, pentru orice număr real a	**3p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(1-a)x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{x^2+2}+x}=0$, deci, pentru orice număr real a, dreapta de ecuație $y=(1-a)x$ este asimptotă spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
2.a)	$\displaystyle\int_1^3\frac{xf(x)}{\operatorname{arctg}x}dx=\int_1^3x^3dx=\frac{x^4}{4}\Big|_1^3=$	**3p**
	$=\dfrac{81-1}{4}=20$	**2p**
b)	$\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}\frac{f(x)}{x}dx=\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}}\left(x^2+1\right)'\operatorname{arctg}x\,dx=\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg}x\Big|_1^{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}}\frac{x^2+1}{x^2+1}dx=2\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}}1dx=$	**3p**
	$=\dfrac{5\pi}{12}-\dfrac{1}{2}x\Big|_1^{\sqrt{3}}=\dfrac{5\pi}{12}-\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$	**2p**
c)	Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ și orice $x\in[0,1]$, $0\le x^{2n}\le1$ și $0\le\operatorname{arctg}x\le\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow0\le\operatorname{arctg}^nx\le\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^n$,	**3p**
	de unde obținem că $0\le\displaystyle\int_0^1f^n(x)dx\le\int_0^1\left(\frac{\pi}{4}\right)^ndx=\left(\frac{\pi}{4}\right)^n$	
	Cum $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^n=0$, obținem că $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^1f^n(x)dx=0$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$N=\log_2 6-\log_2 9+\log_2 24=\log_2\frac{6\cdot 24}{9}=$	**3p**
	$=\log_2 16=4$, care este număr natural	**2p**
2.	$f(x)=2\Leftrightarrow x^2-x+2=2\Leftrightarrow x^2-x=0$	**2p**
	Cum ecuația $x^2-x=0$ are două soluții reale și distincte, obținem că dreapta $y=2$ intersectează graficul funcției f în două puncte distincte	**3p**
3.	$x^2-5=3x-1\Rightarrow x^2-3x-4=0$	**2p**
	$x=-1$, care nu convine, $x=4$, care convine	**3p**
4.	Mulțimea A are C_n^2 submulțimi cu 2 elemente, unde $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, este numărul de elemente ale lui A	**2p**
	$C_n^2=15$, deci $\frac{n(n-1)}{2}=15$, de unde obținem că mulțimea A are 6 elemente	**3p**
5.	M mijlocul lui $BC\Rightarrow \overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$	**2p**
	M mijlocul lui $NP\Rightarrow \overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AP}\right)$, deci $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{AM}=\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$	**3p**
6.	$2\sin x\cos x+2\sin^2 x=0\Leftrightarrow 2\sin x(\cos x+\sin x)=0$	**2p**
	Cum $x\in(0,\pi)$, obținem $x=\frac{3\pi}{4}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0,1,2)=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\2&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(0,1,2))=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&2\\2&0&0\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+0+4-2-0-0=2$	**3p**
b)	$\det(A(a,b,c))=\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\bc&ac&ab\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\a&b-a&c-a\\bc&ac-bc&ab-bc\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=\begin{vmatrix}1&0&0\\a&b-a&c-a\\bc&-c(b-a)&-b(c-a)\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(c-b)$, pentru orice numere reale a, b și c	**3p**
c)	$\det(A(m,n,p))=(n-m)(p-m)(p-n)$ și, cum m, n și p sunt numere naturale, cu $m<n<p$, obținem $p-m>p-n>0$ și $p-m>n-m>0$	**3p**
	Cum $\det(A(m,n,p))$ este număr prim, obținem $p-n=n-m=1$, deci numerele m, n și p sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice	**2p**

2.a)	$f=X^4+X^3+\hat{2}X+\hat{2}$, deci $f\left(\hat{0}\right)=\hat{2}$ și $f\left(\hat{2}\right)=\hat{0}$	**3p**
	$f\left(\hat{0}\right)+f\left(\hat{2}\right)=\hat{2}+\hat{0}=\hat{2}$	**2p**
b)	f este divizibil cu $X+\hat{2}\Leftrightarrow f\left(\hat{1}\right)=\hat{0}$, deci $a+b=\hat{0}$	**3p**
	Cum $a, b\in\mathbb{Z}_3$, perechile sunt $\left(\hat{0},\hat{0}\right)$, $\left(\hat{1},\hat{2}\right)$ și $\left(\hat{2},\hat{1}\right)$	**2p**
c)	$f\left(\hat{0}\right)+f\left(\hat{1}\right)+f\left(\hat{2}\right)=\hat{2}$, pentru orice $a,b\in\mathbb{Z}_3$	**3p**
	Dacă $f\left(\hat{0}\right)$, $f\left(\hat{1}\right)$ și $f\left(\hat{2}\right)$ ar fi distincte două câte două, atunci $f\left(\hat{0}\right)+f\left(\hat{1}\right)+f\left(\hat{2}\right)=$ $=\hat{0}+\hat{1}+\hat{2}=\hat{0}$, ceea ce este fals, deci pentru orice $a,b\in\mathbb{Z}_3$, există $x, y\in\mathbb{Z}_3$, cu $x\neq y$, astfel încât $f(x)=f(y)$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{\left(e^x+xe^x\right)\left(e^x+2\right)-xe^{2x}}{\left(e^x+2\right)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{e^{2x}+2e^x+2xe^x}{\left(e^x+2\right)^2}=\dfrac{e^x\left(e^x+2x+2\right)}{\left(e^x+2\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x+2}=1$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xe^x-x\left(e^x+2\right)}{e^x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x}{e^x+2}=0$, deci dreapta de ecuație $y=x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	**3p**
c)	$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=e^x+2x+2$ este strict crescătoare și, cum g este continuă, $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$ și $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$, există un unic număr real c, astfel încât $g(c)=0$	**3p**
	$f'(x)<0$, pentru orice $x\in(-\infty,c)\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(-\infty,c)$ și $f'(x)>0$, pentru orice $x\in(c,+\infty)\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(c,+\infty)$ și, cum f este continuă, obținem că f are un unic punct de extrem	**2p**
2.a)	$\int_0^1 f(x)\sqrt{x^2+4x+5}\,dx=\int_0^1 2(x+3)\,dx=\left(x^2+6x\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=1+6-0-0=7$	**2p**
b)	$\int_0^1\left(f^2(x)-4\right)dx=\int_0^1\dfrac{4(x+3)^2-4\left(x^2+4x+5\right)}{x^2+4x+5}dx=4\int_0^1\dfrac{2x+4}{x^2+4x+5}dx=$	**2p**
	$=4\int_0^1\dfrac{\left(x^2+4x+5\right)'}{x^2+4x+5}dx=4\ln\left(x^2+4x+5\right)\Big\vert_0^1=4\ln 2$	**3p**
c)	Cum $f^2(x)-4=\dfrac{4(2x+4)}{x^2+4x+5}\geq 0$ și $f(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$, obținem $f(x)\geq 2$, deci $f^n(x)\geq 2^n$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$ și orice număr natural nenul n	**2p**
	Cum $0\leq a<b$, $I_n=\int_a^b f^n(x)dx\geq 2^n(b-a)$, pentru orice număr natural nenul n și, cum $\lim\limits_{n\to+\infty}2^n=+\infty$, obținem că $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=+\infty$	**3p**

Examenul naţional de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$b_4^2 = b_2 \cdot b_6 \Rightarrow 4^2 = 2b_6$	**3p**
	$b_6 = 8$	**2p**
2.	$x_V = 1$, $y_V = m-1$, unde $V(x_V, y_V)$ este vârful parabolei asociate funcției f	**2p**
	$y_V = 3x_V \Leftrightarrow m-1 = 3$, deci $m = 4$	**3p**
3.	$2^{2x} - 2 \cdot 2^x - 3 = 0 \Rightarrow \left(2^x + 1\right)\left(2^x - 3\right) = 0$	**3p**
	Cum $2^x > 0$, obținem $x = \log_2 3$	**2p**
4.	Numerele naturale de trei cifre care au exact două cifre egale sunt de forma $\overline{aab}$, $\overline{aba}$ sau $\overline{baa}$, unde a și b sunt cifre distincte	**2p**
	Sunt $9 \cdot 9 = 81$ de numere de forma $\overline{aab}$, $9 \cdot 9 = 81$ de numere de forma $\overline{aba}$ și $9 \cdot 9 = 81$ de numere de forma $\overline{baa}$ cu a și b cifre distincte, deci numărul cerut este $81 \cdot 3 = 243$	**3p**
5.	$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ și $\overrightarrow{A'M} = \overrightarrow{MB'}$, unde M este mijlocul segmentelor AB, respectiv $A'B'$	**2p**
	$\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA'} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$	**3p**
6.	$2R = \dfrac{BC}{\sin A} = \dfrac{AC}{\sin B} = \dfrac{AB}{\sin C}$	**2p**
	$BC = 2R\sin A$, $AC = 2R\sin B$ și $AB = 2R\sin C \Rightarrow AB + AC + BC = 2R\left(\sin A + \sin B + \sin C\right)$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$X(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(X(0,1)\right) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$	**2p**
	$= 0 + 2 + 0 - 0 - 0 - 1 = 1$	**3p**
b)	$\det\left(X(a,b)\right) = \begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 \\ b & b+1 & b+2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = b - a$, pentru orice numere reale a și b	**3p**
	Pentru $a \neq b$, $\det\left(X(a,b)\right) \neq 0$, deci sistemul de ecuații are soluție unică	**2p**
c)	Dacă $a \neq b$, sistemul are soluția unică $(0,2,-1)$ și $y_0^2 - z_0^2 - 2ax_0 = 2^2 - (-1)^2 - 2a \cdot 0 = 3$, pentru orice număr real a	**2p**
	Dacă $a = b$, sistemul are soluțiile $(\alpha, 2 + a\alpha, -1 - a\alpha)$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$, deci $y_0^2 - z_0^2 - 2ax_0 =$ $= (2 + a\alpha)^2 - (-1 - a\alpha)^2 - 2a\alpha = 4 + 4a\alpha + a^2\alpha^2 - 1 - 2a\alpha - a^2\alpha^2 - 2a\alpha = 3$, pentru orice număr real a	**3p**
2.a)	$5 * 10 = (5-1)^{\log_3(10-1)} + 1 = 4^{\log_3 9} + 1 =$	**3p**
	$= 4^2 + 1 = 17$	**2p**

b)	$x*e=x \Leftrightarrow (x-1)^{\log_3(e-1)}+1=x \Leftrightarrow (x-1)^{\log_3(e-1)}=x-1$, pentru orice $x\in M$, de unde obţinem $\log_3(e-1)=1$, deci $e=4\in M$	**3p**
	Cum $4*x=3^{\log_3(x-1)}+1=(x-1)+1=x$, pentru orice $x\in M$, obţinem că $e=4$ este elementul neutru al legii de compoziţie „$*$”	**2p**
c)	$x*x=(x-1)^{\log_3(x-1)}+1$, $x*x*x=(x-1)^{\log_3^2(x-1)}+1$, pentru orice $x\in M$	**2p**
	Cum $x\in M$, $(x-1)^{\log_3(x-1)}=(x-1)^{\log_3^2(x-1)}\Rightarrow \log_3(x-1)=\log_3^2(x-1)$, deci $\log_3(x-1)=0$ sau $\log_3(x-1)=1$ şi, cum $x>2$, obţinem $x=4$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{2e^{2x}+4x^3}{2\sqrt{e^{2x}+x^4+2}}=$	**3p**
	$=\dfrac{2\left(e^{2x}+2x^3\right)}{2\sqrt{e^{2x}+x^4+2}}=\dfrac{e^{2x}+2x^3}{\sqrt{e^{2x}+x^4+2}}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	Panta tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcţiei f, este egală cu $f'(0)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	**2p**
	Cum dreapta de ecuaţie $x-\sqrt{3}y=0$ are panta egală cu $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, obţinem că tangenta la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcţiei f este paralelă cu dreapta de ecuaţie $x-\sqrt{3}y=0$	**3p**
c)	$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=e^{2x}+2x^3\Rightarrow g'(x)=2e^{2x}+6x^2>0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, deci funcţia g este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ şi, cum $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ şi g este continuă, există un unic număr real c cu $g(c)=0$	**2p**
	f este continuă pe $\mathbb{R}$ şi $f'(x)<0$, pentru orice $x\in(-\infty,c)\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(-\infty,c]$ şi $f'(x)>0$, pentru orice $x\in(c,+\infty)\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $[c,+\infty)$, deci f are un unic punct de extrem	**3p**
2.a)	$\displaystyle\int_0^1\left(2f(x)+\frac{1}{x^2+3}\right)dx=\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx=\operatorname{arctg}x\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}0=\dfrac{\pi}{4}$	**2p**
b)	$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcţiei $f\Rightarrow F'(x)=f(x)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x^2+3-\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+3\right)}=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+3\right)}>0$, pentru orice număr real x, deci funcţia F este strict crescătoare	**2p**
c)	$\displaystyle\int_a^b f(x)F^2(x)dx=\int_a^b F^2(x)F'(x)dx=\frac{1}{3}F^3(x)\Big\vert_a^b=\frac{1}{3}\left(F^3(b)-F^3(a)\right)$	**3p**
	Cum F este strict crescătoare, obţinem că $F(a)<F(b)$, pentru orice numere reale a şi b, cu $a<b$, deci $\displaystyle\int_a^b f(x)F^2(x)dx>0$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Testul 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați numărul elementelor mulțimii $M=\left\{n\in\mathbb{N}\,\middle|\, n^2<7+\sqrt{7}\right\}$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-6x+m$, unde m este număr real. Determinați valorile reale ale lui m pentru care vârful parabolei asociate funcției f are ordonata strict mai mare decât 0.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+3}=x-3$.

5p **4.** Determinați numărul submulțimilor cu cel mult 2 elemente ale unei mulțimi cu 12 elemente.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,1)$ și $B(-1,2)$. Determinați coordonatele punctului de intersecție a paralelei prin A la OB cu paralela prin B la OA.

5p **6.** Arătați că $\frac{1}{1+\operatorname{tg}x}+\frac{1}{1+\operatorname{ctg}x}=1$, pentru orice $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1-a & 2a & 0\\ -a & 1+2a & 0\\ 0 & 0 & 1+a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=4$.

5p **b)** Demonstrați că $A(a)\cdot A(b)=A(a+b+ab)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Demonstrați că, dacă a, b și c sunt numere reale pentru care $A(a)\cdot A(b)\cdot A(c)=A(0)$, atunci $(1+a)(1+b)(1+c)=1$.

2. Pe mulțimea $M=(0,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x*y=\sqrt{x^2+y^2}$.

5p **a)** Arătați că $3*4=5$.

5p **b)** Determinați $x\in M$ pentru care $x*\sqrt{5}<x+1$.

5p **c)** Demonstrați că există o infinitate de perechi (m,n) de numere naturale nenule, pentru care numerele m, n și $m*n$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\sqrt{x^2-4x+5}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{\sqrt{x^2-4x+5}-x+2}{\sqrt{x^2-4x+5}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+1$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{4}{3}$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 e^x f(x)\,dx$.

5p **c)** Arătați că $\int_{-1}^{1} \left|x\ln\left(f(x)\right)\right|dx = 2\ln 2 - 1$.

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Testul 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că numărul $n=(1+6i)^2+(3-2i)^2$ este întreg negativ, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+ax$, unde a este număr real astfel încât $f(1)=f(5)$. Arătați că $f(2)=f(4)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3\left(2x^2-2\right)=2\log_3(x+1)$.

5p **4.** Determinați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă cifra unităților egală cu suma dintre cifra sutelor și cifra zecilor.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,4)$, $B(-4,3)$ și C, astfel încât $AOBC$ este paralelogram. Arătați că triunghiul ACB este dreptunghic isoscel.

5p **6.** Determinați $x\in(0,\pi)$ pentru care $2\sin x\sin(\pi-x)=1$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(2))=1$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care $A(a)A(1)=A(1)A(a)$.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care matricea $A(a)$ are rangul doi.

2. Pe mulțimea $\mathbb{Z}_6$ se definește legea de compoziție $x\circ y=xy+x+y$.

5p **a)** Arătați că $\hat{3}\circ\hat{3}=\hat{3}$.

5p **b)** Arătați că $\hat{0}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

5p **c)** Demonstrați că funcția $f:\mathbb{Z}_6\to\mathbb{Z}_6$, $f(x)=\hat{4}\circ x$ este bijectivă.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(-1,1)\cup(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}-\dfrac{1}{(x+1)^2}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{-4\left(3x^2+1\right)}{\left(x^2-1\right)^3}$, $x\in(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul în care graficul funcției f intersectează axa Oy.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f(2)+f(4)+f(6)+\ldots+f(2n)\right)^n$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x-2}{x^2+4}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^2\left(x^2+4\right)f(x)\,dx=0$.

5p **b)** Calculați $\displaystyle\int_0^{2\sqrt{3}} f(x)\,dx$.

5p **c)** Demonstrați că $\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt\geq 0$, pentru orice număr real x.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Testul 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numărul complex $z=1+i$. Arătați că $z^2-z-i=-1$.

5p **2.** Determinați cel mai mic număr natural n pentru care ecuația $x^2-3x+3-n=0$ are două soluții distincte în mulțimea numerelor reale.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(25x)+\log_x 5=4$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 2 sau cu 3.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,2)$, $B(4,2)$ și $C(3,0)$. Calculați aria triunghiului ABC.

5p **6.** Se consideră expresia $E(x)=\sin x-\sin(\pi-x)+\cos x+\cos(\pi-x)+\operatorname{tg}2x$, unde $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{8}\right)=1$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, $O_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ și $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det(A+I_3)=1$.

5p **b)** Arătați că $A\cdot A\cdot A=O_3$.

5p **c)** Demonstrați că, dacă $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pentru care $A\cdot X=X\cdot A$, atunci există numerele reale a, b și c, astfel încât $X=aI_3+bA+cA\cdot A$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=|x-y|$.

5p **a)** Arătați că $(5*2)*1=2$.

5p **b)** Arătați că legea de compoziție „$*$” este comutativă.

5p **c)** Demonstrați că $(a*b)+(b*c)\geq a*c$, pentru orice numere reale a, b și c.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-2x+1}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{-(x-1)(x-3)}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $x-1\leq 2e^{\frac{x-3}{2}}$, pentru orice $x\in[1,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^2 f^2(x)\,dx=4$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 \ln\left(f\left(x\right)\right)dx$.

5p **c)** Demonstrați că există un singur număr real x, $x\in\left[0,+\infty\right)$, pentru care $\int_0^x e^{f(t)}dt=2021$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Testul 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Se consideră un număr complex z care are proprietatea $z^2=1-i$. Arătați că $z^4+2i=0$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x+m$, unde m este număr real. Determinați valorile reale ale lui m pentru care $f(x)>1$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvați în mulţimea numerelor reale ecuația $\log_5(x+2)+\log_5(2x-1)=2$.

5p **4.** Determinați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă suma cifrelor divizibilă cu 9.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,1)$, $B(3,2)$ și $C(4,5)$. Determinați coordonatele punctului D, știind că $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\vec{0}$.

5p **6.** Determinați $x\in(0,1)$ pentru care $4\cos x\cos(\pi-x)+3=0$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A=6$.

5p **b)** Arătați că $A\cdot B+B=B\cdot A$.

5p **c)** Determinați numerele reale x și y, știind că $(x+1)A\cdot B+(y-2)B\cdot A=B\cdot B\cdot B$.

2. Pe mulțimea numerelor naturale nenule se definește legea de compoziție $x*y=x^y$.

5p **a)** Arătați că $2*4=4*2$.

5p **b)** Arătați că legea de compoziție „$*$” **nu** este comutativă.

5p **c)** Determinați numerele naturale nenule n pentru care $(2*2)*n<64$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+\ln\left(x^2+x+1\right)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{2x^2+4x+3}{x^2+x+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x+1)-f(x)\right)$.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este bijectivă.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx=0$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 e^x\left|f(x)\right|dx$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 f^n(x)\,dx$. Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Testul 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați numărul complex z, pentru care $z-2\bar{z}=-2+6i$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+m$, unde m este număr real pozitiv. Determinați numărul real pozitiv m pentru care numerele $f(0)$, $f(1)$ și $f(2)$ sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2\log_5(x-1)=\log_5(3x+1)$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{0,1,2,\ldots,20\}$, pătratul acestui număr să aparțină mulțimii A.

5p **5.** Se consideră punctele A, B, C și D, astfel încât $2\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}$. Demonstrați că $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC cu măsura unghiului A de $30°$. Arătați că lungimea laturii BC este egală cu lungimea razei cercului circumscris triunghiului.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}1&0&0\\m&1&0\\0&m&1\end{pmatrix}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(m)+A(-m)\right)=8$, pentru orice număr real m.

5p **b)** Determinați numărul real m pentru care are loc egalitatea $A(m)\cdot A(m)=A(0)$.

5p **c)** Demonstrați că $A(1)-A(2)+A(3)-A(4)+\ldots+A(2n-1)-A(2n)=n\left(A(-1)-A(0)\right)$, pentru orice număr natural nenul n.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=x^2+4xy+y^2$.

5p **a)** Arătați că $\frac{1}{2}*\frac{3}{2}=\frac{11}{2}$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $\left(x*(-x)\right)*\left((-x)*x\right)=24x$.

5p **c)** Demonstrați că $x*\frac{1}{x}\geq 6$, pentru orice număr real nenul x.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{2(1-x)}{\left(x^2+2\right)\sqrt{x^2+2}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\right)^{2x}$.

5p **c)** Demonstrați că $\frac{e^x+2}{\sqrt{3}}\leq\sqrt{e^{2x}+2}$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-\ln x$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^{\sqrt{2}}\left(f(x)+\ln x\right)dx=\frac{3}{4}$.

5p **b)** Calculați $\int_1^e x\left(x^3-f(x)\right)dx$.

5p **c)** Arătați că $\int_1^{e^2}\frac{1}{x}f\left(\sqrt{x}\right)dx=\frac{2e^3-5}{3}$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Testul 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că numerele $\sqrt[3]{4}$, $\log_3 9$ și $\sqrt[3]{16}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

5p **2.** Se consideră o funcție impară $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Demonstrați că funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\left(f(x)\right)^2$ este pară.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{2x}-\sqrt{2}\cdot 2^{x}=2^{x+1}-2\sqrt{2}$.

5p **4.** Determinați termenul care îl conține pe x^8 din dezvoltarea $\left(x\sqrt{x}+\frac{1}{x^2}\right)^{10}$, unde $x\in(0,+\infty)$.

5p **5.** În planul triunghiului ABC se consideră punctul M, astfel încât $2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$. Determinați numărul real k, știind că $\overrightarrow{BC}=k\cdot\overrightarrow{CM}$.

5p **6.** Determinați $x\in(0,\pi)$, știind că $\sin 2x+6\cos x-\sin x-3=0$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2&0&-1\\1&-1&0\\4&-1&-1\end{pmatrix}$ și $M(m)=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\-1&m&1\\m-1&m&-m\end{pmatrix}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=-1$.

5p **b)** Demonstrați că, pentru orice număr real m, rangul matricei $M(m)$ este cel puțin egal cu 2.

5p **c)** Determinați numărul real m, $m\neq -1$, știind că inversa matricei $M(m)$ este matricea A.

2. Pe mulțimea numerelor complexe se definește legea de compoziție $z_1\circ z_2=z_1+z_2+z_1z_2$.

5p **a)** Arătați că $(2+i)\circ(2-i)=9$.

5p **b)** Demonstrați că, pentru orice număr real nenul a, numărul $A=\left(-1+(a+1)i\right)\circ\left(-1+(a-1)i\right)$ este real strict mai mic decât 0.

5p **c)** Determinați numerele complexe z pentru care $z\circ z=-5$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\frac{x+1}{x+3}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{2}{(x+1)(x+3)}$, $x\in(-1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xf(x)\right)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(x^2+1\right)e^{-x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1\left(e^x f(x)-2\right)dx=-\frac{2}{3}$.

5p **b)** Calculați $\int_1^e f(\ln x)\,dx$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n = \int_0^1 x^n f(x)\,dx$. Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Testul 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați numărul elementelor mulțimii $M=\left\{n\in\mathbb{N}\,\middle|\, 2n+1<10\right\}$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-10x+m$, unde m este număr real. Determinați numărul real m pentru care vârful parabolei asociate funcției f este situat pe axa Ox.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x+\sqrt{x-5}=7$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să **nu** fie multiplu de 5.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,4)$ și $B(-1,3)$. Determinați coordonatele punctului C astfel încât $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}=\vec{0}$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC cu $AB=4$, $AC=5$ și aria egală cu 6. Calculați cosinusul unghiului A.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & a+1 & a\\ 1 & 1 & a+1\\ 2 & a & 1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+(a+1)y+az=6a+3\\ x+y+(a+1)z=4a+7\\ 2x+ay+z=2a+6\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(a))=2\left(a^2+1\right)$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care $A(a)\cdot A(0)=A(0)\cdot A(a)$.

5p **c)** Demonstrați că, dacă (x_0,y_0,z_0) este soluția sistemului de ecuații, atunci x_0, y_0 și z_0 sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

2. Pe mulțimea $M=[0,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x*y=\dfrac{2(x+y)}{xy+2}$.

5p **a)** Arătați că $x*0=x$, pentru orice $x\in M$.

5p **b)** Arătați că $x*y<2$, pentru orice $x,\ y\in[1,+\infty)$.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere naturale nenule pentru care $m*n$ este număr natural.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\left(x^2-4x+5\right)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=e^x(x-1)^2$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty} f(-x)$.

5p **c)** Demonstrați că graficul funcției f intersectează orice dreaptă paralelă cu axa Ox în cel mult un punct.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x^3+1$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx=2$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 x^2\left(f\left(x\right)\right)^3 dx$.

5p **c)** Demonstrați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_1^x \ln\left(f\left(t\right)\right)dt = +\infty$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Testul 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați produsul elementelor mulțimii $A=\left\{x\in\mathbb{N}\,\middle|\,\sqrt[3]{7}<x\leq\log_2 21\right\}$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+4x$. Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției f cu dreapta d de ecuație $y=5x+2$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2\cdot 9^x-3^{2x}-3=0$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă cifrele numere prime distincte.

5p **5.** Se consideră punctul M în planul triunghiului ABC astfel încât $2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AB}$. Arătați că patrulaterul $AMBC$ este paralelogram.

5p **6.** Calculați $\operatorname{tg}x$, știind că $x\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ și $\sin x=-\frac{8}{17}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}a+1 & 1 & a\\ 1 & -1 & -a\\ 2-a & 1 & 1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}(a+1)x+y+az=-5\\ x-y-az=10\\ (2-a)x+y+z=1-a\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(2))=4$.

5p **b)** Determinați numerele reale a pentru care sistemul de ecuații **nu** este compatibil determinat.

5p **c)** Determinați numărul natural a pentru care sistemul are soluția unică (x_0,y_0,z_0) și x_0 este număr întreg.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $x*y=x+y-\frac{xy}{5}$.

5p **a)** Arătați că $1*5=5$.

5p **b)** Determinați numărul real x, $x\geq 0$, pentru care $\sqrt{x}*\sqrt{x}=5$.

5p **c)** Determinați valorile reale ale lui a, $a\neq 5$, pentru care simetricul lui a în raport cu legea de compoziție „$*$” este strict mai mic decât 0.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)\ln(x+1)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=1+\ln(x+1)-\frac{2}{x+1}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.

5p **c)** Demonstrați că orice două drepte distincte, tangente la graficul funcției f, sunt concurente.

2. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{3x}{\sqrt{x+1}}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2 x\sqrt{x+1}f(x)dx=7$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 f^2(x)dx$.

5p **c)** Știind că $F:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=2(x+1)\sqrt{x+1}-6\sqrt{x+1}+4$ este o primitivă a funcţiei f, arătați că $\int_0^3 f(x)F(x)dx=32$.

Examenul naţional de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Testul 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}>\frac{3}{4}$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-3x+18$. Determinați abscisa punctului de intersecție a graficului funcției $f\circ f$ cu axa Ox.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{3-x}-2^{2-x}+2^{5-x}=9$.

5p **4.** Determinați termenul care **nu** îl conține pe x din dezvoltarea $\left(x^3+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{14}$, unde $x\in(0,+\infty)$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(a,1)$ și $B(-2,5)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, știind că mijlocul segmentului AB aparține dreptei de ecuație $y=2x+3$.

5p **6.** Calculați lungimea laturii AB a triunghiului ABC, știind că $\operatorname{tg}C=1$ și că triunghiul ABC este înscris într-un cerc de rază 3.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 1 & 1\\ 1 & a+1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(3))=10$.

5p **b)** Demonstrați că, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$, rangul matricei $A(n)$ este egal cu 3.

5p **c)** Arătați că, pentru orice număr natural m, $m\geq 2$, inversa matricei $A(m)$ **nu** are toate elementele numere întregi.

2. Pe mulțimea $M=(2,+\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=\frac{xy-4}{x+y-4}$.

5p **a)** Arătați că $8\circ 8=5$.

5p **b)** Arătați că $(x+2)\circ(y+2)>(x+y)\circ 4$, pentru orice $x,y\in M$.

5p **c)** Demonstrați că, dacă $x\in M$ și n este număr natural, $n\geq 2$, astfel încât $\underbrace{x\circ x\circ x\circ\ldots\circ x}_{\text{de } 2^n \text{ ori } x}=2^n-\frac{1}{2^n}$, atunci x este pătratul unui număr natural.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(3,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(x-3)-2\ln(x^2-9)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{3(1-x)}{x^2-9}$, $x\in(3,+\infty)$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este bijectivă.

5p **c)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 3}\left((x-3)f(x)\right)=0$.

2. Se consideră funcția $f:(-2,2)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\dfrac{x^2}{x^2-4}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_1^{\frac{3}{2}}\left(f(x)-\frac{x^2}{x^2-4}\right)dx=\frac{5}{8}$.

5p **b)** Arătați că $\displaystyle\int_{-1}^{1}\big(f(x)+f(-x)\big)dx=4(1-\ln 3)$.

5p **c)** Determinați $a\in\left(0,\sqrt{3}\right)$, pentru care $\displaystyle\int_a^{\sqrt{3}}\sqrt{x-f(x)}dx=\sqrt{3}-1$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Testul 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați modulul numărului complex $z=(2+3i)(2-3i)-(9-3i)$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-2$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=5x+20$. Calculați $(g\circ f)(2)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^{x-5}=\frac{1}{16}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 8.

5p **5.** Se consideră paralelogramul $ABCD$ cu $AB=4$, $BC=6$ și măsura unghiului ABC de $120°$. Determinați modulul vectorului $\overrightarrow{AM}$, unde punctul M este mijlocul segmentului BD.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB=12$, $AC=16$ și $BC=20$. Arătați că $\frac{r}{R}=\frac{2}{5}$, unde r este raza cercului înscris în triunghiul ABC și R este raza cercului circumscris triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2a-1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax+y-2z=2 \\ 2x+y+3z=1 \\ (2a-1)x+2y+z=a \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(4))=5$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care matricea $A(a)$ **nu** este inversabilă.

5p **c)** Pentru $a=3$, determinați soluțiile (x_0,y_0,z_0) ale sistemului de ecuații pentru care $z_0^2=x_0+y_0$.

2. Pe mulțimea $G=(1,+\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\sqrt{x^{\log_3 y}}$.

5p **a)** Arătați că $4*3=2$.

5p **b)** Arătați că $e=9$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Determinați $x\in G$, știind că este egal cu simetricul lui în raport cu legea de compoziție „$*$”.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2-9)(x^2-4)+3$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=2x(2x^2-13)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sin(x-3)}{f(x)-3}=\frac{1}{30}$.

5p **c)** Determinați valorile reale ale lui m pentru care ecuația $f(x)=m$ are exact patru soluții reale.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x\operatorname{arctg}x$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2\frac{f(x)}{\operatorname{arctg}x}dx=3$.

5p **b)** Determinați numărul real nenul a pentru care $\int_0^{\sqrt{3}} f(x)dx = \frac{\pi}{a} - \sqrt{3}$.

5p **c)** Demonstrați că $\int_{-1}^{1} x f(x)dx = 0$.

Examenul naţional de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Testul 11

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $\sqrt[3]{\left(6-\sqrt{2}\right)^3}+\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}=5$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-3$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2-2mx-6$, unde m este număr real. Determinați numărul real m, știind că graficul funcției f intersectează axa Ox într-un punct în care și graficul funcției g intersectează axa Ox.

5p **3.** Rezolvați în mulţimea numerelor reale ecuația $\log_2\left(x^2-4x+12\right)=\log_3 27$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă suma cifrelor divizibilă cu 3.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-4,0)$, $B(-1,3)$ și $C(1,m)$, unde m este număr real. Determinați numărul real m pentru care triunghiul ABC este dreptunghic în B.

5p **6.** Arătați că $\sin\frac{25\pi}{6}+\cos\frac{23\pi}{3}=1$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a,b,c)=\begin{pmatrix}1+a & 1 & 1\\ 1 & 1+b & 1\\ 1 & 1 & 1+c\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}(1+a)x+y+z=0\\ x+(1+b)y+z=0\\ x+y+(1+c)z=0\end{cases}$, unde a, b și c sunt numere reale nenule.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(-2,0,2)\right)=-4$.

5p **b)** Arătați că, dacă $abc+ab+ac+bc\neq 0$, atunci matricea $A(a,b,c)$ este inversabilă.

5p **c)** Demonstrați că, dacă sistemul de ecuații admite și soluții diferite de soluția $(0,0,0)$, atunci numărul $N=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ este întreg.

2. Pe mulțimea $G=(0,2)$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\frac{xy}{xy-x-y+2}$ și se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to(0,2)$, $f(x)=\frac{2}{x+1}$.

5p **a)** Arătați că $1*1=1$.

5p **b)** Demonstrați că $f(x)*f(y)=f(xy)$, pentru orice $x,y\in(0,+\infty)$.

5p **c)** Determinați numărul natural n pentru care $f\left(\frac{1}{2}\right)*f\left(\frac{2}{3}\right)*f\left(\frac{3}{4}\right)*\ldots*f\left(\frac{2020}{2021}\right)=\frac{2n}{n+1}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x\ln x-x^2+3$.

5p **a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=0$.

5p **b)** Arătați că funcția f este convexă pe $(0,1)$.

5p **c)** Demonstrați că $2\ln x < x - \frac{1}{x}$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = n\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,dx$.

5p **a)** Arătați că $I_1 + \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = 1$.

5p **b)** Arătați că $I_2 = 2 - \frac{\pi}{2}$.

5p **c)** Demonstrați că $I_n \leq \ln 2$, pentru orice număr natural nenul n.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Testul 12

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați partea întreagă a numărului $a=\frac{4}{\sqrt{2}}$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+mx+1$, unde m este număr real. Determinați numerele reale m, știind că axa Ox este tangentă la graficul funcției f.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{(x-1)(x+2)}=(x+2)\sqrt{x-1}$.

5p **4.** Determinați numărul natural n, $n\geq 2$, știind că mulțimea $\{3,4,5,\ldots,n+2\}$ are exact 55 de submulțimi cu 2 elemente.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră dreptele d_1 și d_2, de ecuații $2x-y+1=0$, respectiv $x+y+2=0$. Determinați ecuația dreptei d care este perpendiculară pe dreapta d_2 și trece prin punctul de intersecție a dreptelor d_1 și d_2.

5p **6.** Arătați că $\sin\frac{5\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(m,x)=\begin{pmatrix}2 & -x & 1\\ 1 & m & 3\\ 3 & -2 & x\end{pmatrix}$, unde m și x sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det(A(4,2))=0$.

5p **b)** Determinați rangul matricei $A(2,1)$.

5p **c)** Determinați perechile de numere naturale nenule și distincte (n,p) pentru care $\det(A(3,n))=\det(A(3,p))$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $x*y=\frac{xy}{3}-x-y+6$.

5p **a)** Arătați că $(-1)*3=3$.

5p **b)** Arătați că $x*(y+z-3)=(x*y)+(x*z)-3$, pentru orice numere reale x, y și z.

5p **c)** Determinați numerele reale x, $x\neq 3$ pentru care $(x*(x+x'-3))+(x'*(2x-3))=42$, unde x' este simetricul lui x în raport cu legea de compoziție „$*$”.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+2}-ax$, unde a este număr real.

5p **a)** Pentru $a=0$, arătați că $f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=\sqrt{2}$, situat pe graficul funcției f, este paralelă cu axa Ox.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice număr real a, graficul funcției f admite asimptotă spre $+\infty$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2\operatorname{arctg}x$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^3 \frac{x f(x)}{\operatorname{arctg} x}dx = 20$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{f(x)}{x}dx = \frac{5\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

5p **c)** Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 f^n(x)dx = 0$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $(1+i)^2-2(1+i)+2=0$, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+ax-5$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, știind că punctul $M(1,2)$ aparține graficului funcției f.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_4\left(x^2+1\right)=\log_4 x+\log_4(x+1)$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 2 și cu 5.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(3,4)$, $N(0,1)$ și $P(3,0)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul P și este paralelă cu dreapta MN.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în C. Arătați că $\operatorname{tg}B=\dfrac{1}{\operatorname{tg}A}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}a+2&0&-a\\0&2&0\\3a&0&2-3a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=8$.

5p **b)** Determinați matricea $B\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, știind că $aB=A(a)-2I_3$, pentru orice număr real a.

5p **c)** Determinați numărul natural n pentru care $\det(A(n)\cdot A(-n))>0$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\dfrac{1}{2}\left(x+y+|x-y|\right)$.

5p **a)** Arătați că $2*0=2$.

5p **b)** Demonstrați că, dacă a și b sunt numere reale astfel încât $a\le b$, atunci $a*b=b$.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $(2x)*\left(x^2+1\right)*(-2x)=10$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\sqrt{x^2+3}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+3}-x}{\sqrt{x^2+3}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui a pentru care ecuația $f(x)=a$ are soluție.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{x^2+x+3}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^2\left(x^2+x+3\right)f(x)\,dx=2$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^2 g(x)dx = \ln\frac{9}{5}$, unde $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{2x+1}{x}\cdot f(x)$.

5p **c)** Se consideră numerele reale a și b, cu $0\le a<b$. Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_a^b f^n(x)dx$. Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$.

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați media aritmetică a numerelor reale $a=2021-\sqrt{2}$ și $b=2021+\sqrt{2}$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+1$. Determinați numărul real m, știind că punctul $A(1,m)$ aparține graficului funcției f.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3\left(\sqrt{x}+3\right)+\log_3\left(\sqrt{x}-3\right)=2$.

5p **4.** Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi, știind că aceasta are exact 16 submulțimi.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(3,0)$, $N(8,3)$ și $P(6,3)$. Determinați coordonatele punctului Q, știind că $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MQ}$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC în care $\sin 2A\cdot\cos A=\sin A$. Arătați că $A=\frac{\pi}{4}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & a & 0\\ 1+\log_2 a & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde $a\in(0,+\infty)$.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=1$.

5p **b)** Demonstrați că, pentru orice $a\in(0,+\infty)$, matricea $A(a)$ este inversabilă.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice $a\in(0,+\infty)$, $\det\left(A(a)+(A(a))^{-1}\right)\geq 8$, unde $(A(a))^{-1}$ este inversa matricei $A(a)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=xy-m(x+y)+m(m+1)$, unde $m\in(0,+\infty)$.

5p **a)** Pentru $m=1$, arătați că $2\circ 2=2$.

5p **b)** Demonstrați că, dacă $2\circ 1=5$, atunci $2\circ 5=1$.

5p **c)** Determinați numărul real x, știind că $\left(mx^3\right)\circ\left(-mx^2\right)=m$, pentru orice $m\in(0,+\infty)$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4-2-4\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{4\left(x^2+1\right)(x+1)(x-1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

5p **c)** Demonstrați că ecuația $f(x)=0$ are exact două soluții distincte în intervalul $(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1+\dfrac{2x}{x^4+1}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1\left(x^4+1\right)f(x)\,dx=\frac{11}{5}$.

5p **b)** Se consideră $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă a funcției f. Știind că graficul funcției F are asimptotă oblică spre $+\infty$, determinați panta acestei asimptote.

5p **c)** Se consideră funcția $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, primitiva funcției f pentru care $G(0)=0$. Arătați că $\displaystyle\int_0^1 xG(x)\,dx=\frac{1}{3}+\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\ln 2$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați modulul numărului complex $z=(2+3i)(2-3i)-(9-3i)$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-2$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=5x+20$. Calculați $(g\circ f)(2)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^{x-5}=\frac{1}{16}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 8.

5p **5.** Se consideră paralelogramul $ABCD$ cu $AB=4$, $BC=6$ și măsura unghiului ABC de $120°$. Determinați modulul vectorului $\overrightarrow{AM}$, unde punctul M este mijlocul segmentului BD.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB=12$, $AC=16$ și $BC=20$. Arătați că $\frac{r}{R}=\frac{2}{5}$, unde r este raza cercului înscris în triunghiul ABC și R este raza cercului circumscris triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2a-1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax+y-2z=2 \\ 2x+y+3z=1 \\ (2a-1)x+2y+z=a \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(4))=5$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care matricea $A(a)$ **nu** este inversabilă.

5p **c)** Pentru $a=3$, determinați soluțiile (x_0,y_0,z_0) ale sistemului de ecuații pentru care $z_0^2=x_0+y_0$.

2. Pe mulțimea $G=(1,+\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\sqrt{x^{\log_3 y}}$.

5p **a)** Arătați că $4*3=2$.

5p **b)** Arătați că $e=9$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Determinați $x\in G$, știind că este egal cu simetricul lui în raport cu legea de compoziție „$*$”.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2-9)(x^2-4)+3$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=2x(2x^2-13)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sin(x-3)}{f(x)-3}=\frac{1}{30}$.

5p **c)** Determinați valorile reale ale lui m pentru care ecuația $f(x)=m$ are exact patru soluții reale.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x\operatorname{arctg}x$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2\frac{f(x)}{\operatorname{arctg}x}dx=3$.

5p **b)** Determinați numărul real nenul a pentru care $\int_0^{\sqrt{3}} f(x)dx = \frac{\pi}{a} - \sqrt{3}$.

5p **c)** Demonstrați că $\int_{-1}^{1} x f(x)dx = 0$.

Examenul naţional de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că numărul $N=\log_2 6-2\log_2 3+\log_2 24$ este natural.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-x+2$. Arătați că dreapta de ecuație $y=2$ intersectează graficul funcției f în două puncte distincte.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2-5}=\sqrt{3x-1}$.

5p **4.** Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi A, știind că mulțimea A are exact 15 submulțimi cu două elemente.

5p **5.** Se consideră triunghiul ABC și punctele M, N și P mijloacele segmentelor BC, BM, respectiv CM. Arătați că $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AP}=\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$.

5p **6.** Determinați $x\in(0,\pi)$, știind că $\sin 2x+2\sin^2 x=0$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a,b,c)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ bc & ac & ab\end{pmatrix}$, unde a, b și c sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0,1,2))=2$.

5p **b)** Demonstrați că $\det(A(a,b,c))=(b-a)(c-a)(c-b)$, pentru orice numere reale a, b și c.

5p **c)** Demonstrați că, dacă m, n și p sunt numere naturale, cu $m<n<p$, astfel încât determinantul matricei $A(m,n,p)$ este număr prim, atunci numerele m, n și p sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

2. În mulțimea $\mathbb{Z}_3[X]$, se consideră polinomul $f=X^4+aX^3+\hat{2}X+b$, unde $a,b\in\mathbb{Z}_3$.

5p **a)** Pentru $a=\hat{1}$ și $b=\hat{2}$, arătați că $f(\hat{0})+f(\hat{2})=\hat{2}$.

5p **b)** Determinaţi perechile (a,b), cu $a,b\in\mathbb{Z}_3$, pentru care polinomul f este divizibil cu $X+\hat{2}$.

5p **c)** Arătați că, pentru orice $a,b\in\mathbb{Z}_3$, există $x,y\in\mathbb{Z}_3$, cu $x\neq y$, astfel încât $f(x)=f(y)$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{xe^x}{e^x+2}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{e^x\left(e^x+2x+2\right)}{\left(e^x+2\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că dreapta de ecuație $y=x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că funcția f are un unic punct de extrem.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2(x+3)}{\sqrt{x^2+4x+5}}$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\sqrt{x^2+4x+5}\,dx=7$.

5p **b)** Arătaţi că $\int_0^1\left(f^2(x)-4\right)dx=4\ln 2$.

5p **c)** Se consideră numerele reale a şi b, cu $0\le a<b$. Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_a^b f^n(x)\,dx$. Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=+\infty$.

Examenul naţional de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ cu $b_2=2$ şi $b_4=4$. Determinaţi b_6.

5p **2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x+m$, unde m este număr real. Determinați numărul real m pentru care vârful parabolei asociate funcției f este situat pe dreapta $y=3x$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $4^x-2^{x+1}-3=0$.

5p **4.** Determinați numărul de numere naturale de trei cifre care au exact două cifre egale.

5p **5.** Segmentele AB și $A'B'$ au același mijloc. Demonstrați că $\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{BA'}=\vec{0}$.

5p **6.** Demonstrați că, în orice triunghi ABC, are loc relația $AB+AC+BC=2R(\sin A+\sin B+\sin C)$, unde R este raza cercului circumscris triunghiului.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} ax+(a+1)y+(a+2)z=a \\ bx+(b+1)y+(b+2)z=b \\ y+z=1 \end{cases}$ și matricea $X(a,b)=\begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ b & b+1 & b+2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det(X(0,1))=1$.

5p **b)** Demonstrați că, pentru orice numere reale distincte a și b, sistemul de ecuații are soluție unică.

5p **c)** Demonstrați că, dacă (x_0,y_0,z_0) este soluție a sistemului de ecuații, atunci $y_0^2-z_0^2-2ax_0=3$, pentru orice număr real a.

2. Pe mulţimea $M=(2,+\infty)$ se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=(x-1)^{\log_3(y-1)}+1$.

5p **a)** Arătați că $5*10=17$.

5p **b)** Determinați elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Determinați $x\in M$ pentru care $x*x*x=x*x$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{e^{2x}+x^4+2}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{e^{2x}+2x^3}{\sqrt{e^{2x}+x^4+2}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Demonstrați că tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f, este paralelă cu dreapta de ecuație $x-\sqrt{3}y=0$.

5p **c)** Demonstrați că funcția f are un unic punct de extrem.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x^2+1}-\dfrac{1}{x^2+3}\right)$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1\left(2f(x)+\frac{1}{x^2+3}\right)dx=\frac{\pi}{4}$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă F a funcției f este strict crescătoare.

5p **c)** Arătați că, pentru orice numere reale a și b, cu $a<b$, $\int_a^b f(x)F^2(x)dx>0$, pentru orice primitivă F a funcției f.

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$8-6\sqrt{6}+6\left(\sqrt{6}-1\right)=8-6\sqrt{6}+6\sqrt{6}-6=$	**3p**
	$=8-6=2$	**2p**
2.	$f\left(0\right)=m$, $\left(f\circ f\right)\left(0\right)=4m$	**3p**
	$4m=4$, de unde obținem $m=1$	**2p**
3.	$3\cdot 4^x+4^x=4$, deci $4\cdot 4^x=4$	**3p**
	$x=0$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Deoarece cifra zecilor poate fi 1, 2, 3 sau 6, în mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt $4\cdot 10=40$ de numere care au cifra zecilor divizor al numărului 6, deci sunt 40 de cazuri favorabile, de unde obținem $p=\frac{40}{90}=\frac{4}{9}$	**3p**
5.	$a=3a-2$	**3p**
	$a=1$	**2p**
6.	$A=\frac{\pi}{2}$	**2p**
	$AC=AB\Rightarrow \mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{10\cdot 10}{2}=50$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A\left(1\right)=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(A\left(1\right)\right)=\begin{vmatrix}1&-1&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1+0+0-0-0-0=1$	**3p**
b)	$A\left(x\right)\cdot A\left(y\right)=\begin{pmatrix}1&-y-x&y^2+2xy+x^2\\0&1&-2y-2x\\0&0&1\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1&-\left(x+y\right)&\left(x+y\right)^2\\0&1&-2\left(x+y\right)\\0&0&1\end{pmatrix}=A\left(x+y\right)$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
c)	$A\left(n\right)\cdot A\left(n+1\right)\cdot A\left(n+2\right)\cdot A\left(n+3\right)=A\left(4n+6\right)$, pentru orice număr natural n	**3p**
	$4n+6=2n^2\Leftrightarrow n^2-2n-3=0$ și, cum n este număr natural, obținem $n=3$	**2p**
2.a)	$1*0=\frac{2\cdot 1}{0+2}+\frac{2\cdot 0}{1+2}=$	**3p**
	$=1+0=1$	**2p**

b)	$x*0=\frac{2x}{0+2}+\frac{2\cdot 0}{x+2}=x$, pentru orice $x\in M$	**2p**
	$0*x=\frac{2\cdot 0}{x+2}+\frac{2x}{0+2}=x$, pentru orice $x\in M$, deci $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**3p**
c)	$x*\frac{4}{x}=\frac{2x}{\frac{4}{x}+2}+\frac{\frac{8}{x}}{x+2}=\frac{x^2}{x+2}+\frac{8}{x(x+2)}=\frac{x^3+8}{x(x+2)}$, pentru orice $x\in M$, x nenul	**3p**
	$\frac{x^3+8}{x(x+2)}=x$ și, cum $x\in M$, x nenul, obținem $x=2$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{e^x-x-x(e^x-1)}{(e^x-x)^2}=$	**3p**
	$=\frac{e^x-xe^x}{(e^x-x)^2}=\frac{e^x(1-x)}{(e^x-x)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$; pentru orice $x\in(-\infty,1]$, $f'(x)\geq 0\Rightarrow f$ este crescătoare pe $(-\infty,1]$	**3p**
	Pentru orice $x\in[1,+\infty)$, $f'(x)\leq 0\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[1,+\infty)$	**2p**
c)	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$, $f(1)=2+\frac{1}{e-1}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$	**3p**
	Cum f este continuă, f este strict crescătoare pe $(-\infty,1)$ și f este strict descrescătoare pe $(1,+\infty)$, obținem că, pentru orice $m\in(1,2]$, ecuația $f(x)=m$ are soluție unică	**2p**
2.a)	$\int_1^5\left(f(x)-\sqrt{x^2+9}\right)dx=\int_1^5(3-x)dx=\left(3x-\frac{x^2}{2}\right)\Big\vert_1^5=$	**3p**
	$=15-\frac{25}{2}-3+\frac{1}{2}=0$	**2p**
b)	$\int_0^4\frac{x}{f(x)+x-3}dx=\int_0^4\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}dx=\int_0^4\frac{\left(x^2+9\right)'}{2\sqrt{x^2+9}}dx=\sqrt{x^2+9}\Big\vert_0^4=$	**3p**
	$=5-3=2$	**2p**
c)	$I_n=\int_0^1\frac{x^n}{f(x)}dx=\int_0^1\frac{x^n}{3-x+\sqrt{x^2+9}}dx$, pentru orice număr natural nenul n	**2p**
	$0\leq x\leq 1\Rightarrow 3-x+\sqrt{x^2+9}\geq 3-x\geq 2\Rightarrow 0\leq\frac{x^n}{3-x+\sqrt{x^2+9}}\leq\frac{x^n}{2}$, deci $0\leq I_n\leq\frac{1}{2(n+1)}$, pentru orice număr natural nenul n și, cum $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2(n+1)}=0$, obținem $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$	**3p**

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$5(1+2i)-2i(5-i)=5+10i-10i+2i^2=$	**3p**
	$=5+2\cdot(-1)=3$	**2p**
2.	$f(a)=a^2-2a-3$, deci $a^2-2a-3=1+a^2$	**3p**
	$-2a=4$, de unde obținem $a=-2$	**2p**
3.	$2x^2+1=3^2\Rightarrow x^2-4=0$	**3p**
	$x=-2$ sau $x=2$, care convin	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 20 de numere care au cifrele impare și distincte, deci sunt 20 de cazuri favorabile, de unde obținem $p=\frac{20}{90}=\frac{2}{9}$	**3p**
5.	$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Rightarrow ABCD$ este paralelogram, deci segmentele AC și BD au același mijloc	**2p**
	Mijlocul segmentului AC are coordonatele $(3,1)$, de unde obținem $D(5,-4)$	**3p**
6.	$\sin B=\frac{AC}{BC}$, $\sin C=\frac{AB}{BC}$, deci $AC=2AB$	**2p**
	Cum $AB^2+AC^2=100$, obținem $AB=2\sqrt{5}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}2&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+0+0-0-0-(-1)=1$	**3p**
b)	$A(x)-I_3=\begin{pmatrix}x&-x&0\\x&-x&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, pentru orice număr real x	**2p**
	$(A(x)-I_3)(A(x)-I_3)=\begin{pmatrix}x^2-x^2&-x^2+x^2&0\\x^2-x^2&-x^2+x^2&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=O_3$, pentru orice număr real x	**3p**
c)	$A(x)\cdot A(x)=2A(x)-I_3$, pentru orice număr real x	**2p**
	$2A(x)-I_3=xA(x)-(x-1)I_3\Leftrightarrow (x-2)(A(x)-I_3)=O_3$, de unde obținem $x=0$ sau $x=2$	**3p**

2.a)	$0*2=(0+2)^2-2(0-2)-3=$	**3p**
	$=4+4-3=5$	**2p**
b)	$x*(x+1)=4x^2+4x$, pentru orice număr real x	**2p**
	$4x^2+4x=8\Leftrightarrow x^2+x-2=0$, de unde obținem $x=-2$ sau $x=1$	**3p**
c)	$(m+n)^2-2(m-n)-3=2mn\Leftrightarrow m^2+n^2-2m+2n-3=0$	**2p**
	$(m-1)^2+(n+1)^2=5$ și, cum m și n sunt numere naturale, obținem perechile $(0,1)$, $(2,1)$ și $(3,0)$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=(2x-5)\sqrt{x}+\left(x^2-5x+10\right)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=$	**3p**
	$=\dfrac{5x^2-15x+10}{2\sqrt{x}}=\dfrac{5\left(x^2-3x+2\right)}{2\sqrt{x}}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$ sau $x=2$	**2p**
	$f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in(0,1]$, deci f este crescătoare pe $(0,1]$, $f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in[1,2]$, deci f este descrescătoare pe $[1,2]$ și $f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[2,+\infty)$, deci f este crescătoare pe $[2,+\infty)$	**3p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x^2\sqrt{x}}\right)^{\frac{x}{5}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-5x+10}{x^2}\right)^{\frac{x}{5}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(1+\dfrac{-5x+10}{x^2}\right)^{\frac{x^2}{-5x+10}}\right)^{\frac{-5x+10}{x^2}\cdot\frac{x}{5}}=$	**3p**
	$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-5x+10}{5x}}=e^{-1}=\dfrac{1}{e}$	**2p**
2.a)	$\int_0^2\left(f(x)-\dfrac{1}{e^x+1}\right)dx=\int_0^2\left(x+e^x\right)dx=\left(\dfrac{x^2}{2}+e^x\right)\Big\vert_0^2=$	**3p**
	$=2+e^2-1=e^2+1$	**2p**
b)	$\int_{-1}^1 e^x\left(f(x)-x-e^x\right)dx=\int_{-1}^1\dfrac{e^x}{e^x+1}dx=\int_{-1}^1\dfrac{\left(e^x+1\right)'}{e^x+1}dx=\ln\left(e^x+1\right)\Big\vert_{-1}^1=$	**3p**
	$=\ln(e+1)-\ln\dfrac{1+e}{e}=\ln e=1$	**2p**
c)	$\int_0^1 x\left(f(x)+f(-x)\right)dx=\int_0^1 x\left(e^x+e^{-x}+1\right)dx=\int_0^1 x\left(e^x-e^{-x}+x\right)'dx=x\left(e^x-e^{-x}+x\right)\Big\vert_0^1-$ $-\int_0^1\left(e^x-e^{-x}+x\right)dx=e-\dfrac{1}{e}+1-\left(e^x+e^{-x}+\dfrac{x^2}{2}\right)\Big\vert_0^1=\dfrac{5}{2}-\dfrac{2}{e}$	**3p**
	$\dfrac{5}{2}-\dfrac{2}{e}=\dfrac{m}{2}-\dfrac{2}{e}$, de unde obținem $m=5$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$5(1+2i)-2i(5-i)=5+10i-10i+2i^2=$	**3p**
	$=5+2\cdot(-1)=3$	**2p**
2.	$f(a)=a^2-2a-3$, deci $a^2-2a-3=1+a^2$	**3p**
	$-2a=4$, de unde obținem $a=-2$	**2p**
3.	$2x^2+1=3^2\Rightarrow x^2-4=0$	**3p**
	$x=-2$ sau $x=2$, care convin	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 20 de numere care au cifrele impare și distincte, deci sunt 20 de cazuri favorabile, de unde obținem $p=\frac{20}{90}=\frac{2}{9}$	**3p**
5.	$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Rightarrow ABCD$ este paralelogram, deci segmentele AC și BD au același mijloc	**2p**
	Mijlocul segmentului AC are coordonatele $(3,1)$, de unde obținem $D(5,-4)$	**3p**
6.	$\sin B=\frac{AC}{BC}$, $\sin C=\frac{AB}{BC}$, deci $AC=2AB$	**2p**
	Cum $AB^2+AC^2=100$, obținem $AB=2\sqrt{5}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}2&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+0+0-0-0-(-1)=1$	**3p**
b)	$A(x)-I_3=\begin{pmatrix}x&-x&0\\x&-x&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, pentru orice număr real x	**2p**
	$(A(x)-I_3)(A(x)-I_3)=\begin{pmatrix}x^2-x^2&-x^2+x^2&0\\x^2-x^2&-x^2+x^2&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=O_3$, pentru orice număr real x	**3p**
c)	$A(x)\cdot A(x)=2A(x)-I_3$, pentru orice număr real x	**2p**
	$2A(x)-I_3=xA(x)-(x-1)I_3\Leftrightarrow (x-2)(A(x)-I_3)=O_3$, de unde obținem $x=0$ sau $x=2$	**3p**

2.a)	$0*2=(0+2)^2-2(0-2)-3=$	**3p**
	$=4+4-3=5$	**2p**
b)	$x*(x+1)=4x^2+4x$, pentru orice număr real x	**2p**
	$4x^2+4x=8\Leftrightarrow x^2+x-2=0$, de unde obținem $x=-2$ sau $x=1$	**3p**
c)	$(m+n)^2-2(m-n)-3=2mn\Leftrightarrow m^2+n^2-2m+2n-3=0$	**2p**
	$(m-1)^2+(n+1)^2=5$ și, cum m și n sunt numere naturale, obținem perechile $(0,1)$, $(2,1)$ și $(3,0)$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=(2x-5)\sqrt{x}+\left(x^2-5x+10\right)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=$	**3p**
	$=\dfrac{5x^2-15x+10}{2\sqrt{x}}=\dfrac{5\left(x^2-3x+2\right)}{2\sqrt{x}}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$ sau $x=2$	**2p**
	$f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in(0,1]$, deci f este crescătoare pe $(0,1]$, $f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in[1,2]$, deci f este descrescătoare pe $[1,2]$ și $f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[2,+\infty)$, deci f este crescătoare pe $[2,+\infty)$	**3p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x^2\sqrt{x}}\right)^{\frac{x}{5}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-5x+10}{x^2}\right)^{\frac{x}{5}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(1+\dfrac{-5x+10}{x^2}\right)^{\frac{x^2}{-5x+10}}\right)^{\frac{-5x+10}{x^2}\cdot\frac{x}{5}}=$	**3p**
	$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-5x+10}{5x}}=e^{-1}=\dfrac{1}{e}$	**2p**
2.a)	$\int_0^2\left(f(x)-\dfrac{1}{e^x+1}\right)dx=\int_0^2\left(x+e^x\right)dx=\left(\dfrac{x^2}{2}+e^x\right)\Big\vert_0^2=$	**3p**
	$=2+e^2-1=e^2+1$	**2p**
b)	$\int_{-1}^1 e^x\left(f(x)-x-e^x\right)dx=\int_{-1}^1\dfrac{e^x}{e^x+1}dx=\int_{-1}^1\dfrac{\left(e^x+1\right)'}{e^x+1}dx=\ln\left(e^x+1\right)\Big\vert_{-1}^1=$	**3p**
	$=\ln(e+1)-\ln\dfrac{1+e}{e}=\ln e=1$	**2p**
c)	$\int_0^1 x\left(f(x)+f(-x)\right)dx=\int_0^1 x\left(e^x+e^{-x}+1\right)dx=\int_0^1 x\left(e^x-e^{-x}+x\right)'dx=x\left(e^x-e^{-x}+x\right)\Big\vert_0^1-$ $-\int_0^1\left(e^x-e^{-x}+x\right)dx=e-\dfrac{1}{e}+1-\left(e^x+e^{-x}+\dfrac{x^2}{2}\right)\Big\vert_0^1=\dfrac{5}{2}-\dfrac{2}{e}$	**3p**
	$\dfrac{5}{2}-\dfrac{2}{e}=\dfrac{m}{2}-\dfrac{2}{e}$, de unde obținem $m=5$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(6-3\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)=3\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)=3=$	**3p**
	$=\left(\sqrt{3}\right)^2$, deci numerele $6-2\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ și $2+\sqrt{3}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice	**2p**
2.	Axa Ox este tangentă graficului funcției $f \Leftrightarrow \Delta=0 \Leftrightarrow m^2-4=0$	**3p**
	$m=-2$ sau $m=2$	**2p**
3.	$25\cdot 5^x-5^x=24$, deci $5^x=1$	**3p**
	$x=0$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre distincte are 81 de elemente, deci sunt 81 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre distincte sunt $3\cdot 9=27$ de numere care au cifra zecilor multiplu de 3, deci sunt 27 de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{1}{3}$	**1p**
5.	$\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{MC}=\vec{0}$, deci $3\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right)+2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ și, cum $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MD}$, obținem $\overrightarrow{MD}=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$	**3p**
	Vectorii $\overrightarrow{MD}$ și $\overrightarrow{AB}$ sunt coliniari, deci dreptele MD și AB sunt paralele	**2p**
6.	Unghiul C are măsura egală cu $90°$, deci triunghiul ABC este dreptunghic în C	**2p**
	$\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ și, cum $AC=3$, obținem $AB=2\sqrt{3}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det B=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & i & 0\\ -2 & 0 & -1\end{vmatrix}=1\cdot i\cdot(-1)+0+0-(-2)\cdot i\cdot 1-0-0=$	**3p**
	$=-i+2i=i$	**2p**
b)	Cum $B\cdot B=-I_3$, $A(z_1)\cdot A(z_2)=(aI_3+bB)(cI_3+dB)=acI_3+adB+bcB+bdB\cdot B=$	**3p**
	$=(ac-bd)I_3+(ad+bc)B=A(z_1z_2)$, pentru orice $z_1=a+ib$ și $z_2=c+id$, cu a, b, c și d numere reale	**2p**
c)	$A(1+i)\cdot A(2+i)\cdot A(3+i)\cdot A(1-i)\cdot A(2-i)\cdot A(3-i)=A\left((1+i)(2+i)(3+i)(1-i)(2-i)(3-i)\right)=$	**2p**
	$=A\left((1+i)(1-i)(2+i)(2-i)(3+i)(3-i)\right)=A(2\cdot 5\cdot 10)=100I_3$, deci $n=100$	**3p**

2.a)	$x*y=\log_2\left(2^x\left(2^y-2\right)-2^{y+1}+4+2\right)=$	**3p**
	$=\log_2\left(2^x\left(2^y-2\right)-2\left(2^y-2\right)+2\right)=\log_2\left(\left(2^x-2\right)\left(2^y-2\right)+2\right)$, pentru orice $x,y\in M$	**2p**
b)	$x*e=x$ pentru orice $x\in M$, unde e este elementul neutru al legii de compoziție, deci $\left(2^x-2\right)\left(2^e-3\right)=0$ pentru orice $x\in M$, de unde obținem $e=\log_2 3\in M$	**3p**
	Cum $\left(\log_2 3\right)*x=x$ pentru orice $x\in M$, obținem că $e=\log_2 3$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**2p**
c)	$x*x*x=\log_2\left(\left(2^x-2\right)^3+2\right)$, pentru orice $x\in M$	**3p**
	$\left(x*x*x\right)-3x=\log_2\left(\dfrac{\left(2^x-2\right)^3+2}{2^{3x}}\right)=\log_2\left(1-\dfrac{6\left(2^x-1\right)^2}{2^{3x}}\right)<0$, pentru orice $x\in M$, de unde obținem că $x*x*x<3x$, pentru orice $x\in M$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(x^3+3x+1\right)'e^{-x}+\left(x^3+3x+1\right)\left(e^{-x}\right)'=\left(3x^2+3\right)e^{-x}-\left(x^3+3x+1\right)e^{-x}=$	**3p**
	$=\left(-x^3+3x^2-3x+2\right)e^{-x}=(2-x)\left(x^2-x+1\right)e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)-e^{-x}}{f(x)+e^{-x}}\right)^{f(x)e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3+3x}{x^3+3x+2}\right)^{x^3+3x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(1+\dfrac{-2}{x^3+3x+2}\right)^{\frac{x^3+3x+2}{-2}}\right)^{\frac{-2\left(x^3+3x+1\right)}{x^3+3x+2}}=$	**3p**
	$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2\left(x^3+3x+1\right)}{x^3+3x+2}}=e^{-2}$	**2p**
c)	$g(x)=\left\lvert x^3+3x\right\rvert=\begin{cases}-x^3-3x,\ x\in(-\infty,0)\\ x^3+3x,\ x\in[0,+\infty)\end{cases}$	**2p**
	g este continuă și, cum pentru orice $x\in(-\infty,0)$, $g'(x)=-3x^2-3<0\Rightarrow g$ este strict descrescătoare pe $(-\infty,0)$ și pentru orice $x\in(0,+\infty)$, $g'(x)=3x^2+3>0\Rightarrow g$ este strict crescătoare pe $(0,+\infty)$, obținem că funcția g are un singur punct de extrem	**3p**
2.a)	$\int_4^6\dfrac{f(x)}{\ln(x-1)}dx=\int_4^6 x\,dx=\dfrac{x^2}{2}\Big\rvert_4^6=$	**3p**
	$=18-8=10$	**2p**
b)	F este o primitivă a lui f, deci $F'(x)=f(x)=x\ln(x-1)$, de unde obținem că $F'(x)>0$, pentru orice $x\in(2,+\infty)$, deci F este strict crescătoare pe $(2,+\infty)$	**3p**
	Cum $2<\sqrt{7}<3$, obținem că $F\left(\sqrt{7}\right)<F(3)$	**2p**
c)	$\int_3^5 f(x)dx=\int_3^5\left(\dfrac{x^2-1}{2}\right)'\ln(x-1)dx=\dfrac{x^2-1}{2}\ln(x-1)\Big\rvert_3^5-\dfrac{1}{2}\int_3^5\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}dx=$	**3p**
	$=12\ln 4-4\ln 2-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2}{2}+x\right)\Big\rvert_3^5=20\ln 2-5=5(4\ln 2-1)$, de unde obținem $m=5$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(z_1+i)(z_2-1)=(1-2i+i)(2+i-1)=(1-i)(1+i)=$	**2p**
	$=1-i^2=2$	**3p**
2.	$\Delta<0$ și, cum $\Delta=16-4m$, obținem $16-4m<0$	**3p**
	$m\in(4,+\infty)$	**2p**
3.	$1+\log_2(x-2)=\log_2 x$, deci $\log_2\frac{x}{x-2}=1$, de unde obținem $\frac{x}{x-2}=2$	**3p**
	$x=4$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Numărul n din mulțimea A are exact doi multipli în mulțimea A dacă $2n\le 99<3n$, de unde obținem că numerele din mulțimea A care au exact doi multipli în mulțimea A sunt 34, 35, 36, ..., 49, deci sunt 16 cazuri favorabile și $p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{16}{90}=\frac{8}{45}$	**3p**
5.	$P(0,1)$, unde P este mijlocul segmentului AM	**2p**
	Segmentele AM și BN au același mijloc, de unde obținem $N(-3,1)$	**3p**
6.	$A+B=\pi-C$, deci $\sin C+\cos C=1$	**2p**
	$\sin^2 C+2\sin C\cos C+\cos^2 C=1\Rightarrow\sin 2C=0$ și, cum $C\in(0,\pi)$, obținem $C=\frac{\pi}{2}$, deci triunghiul ABC este dreptunghic	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(1))=\begin{vmatrix}1&3&1\\2&1&-1\\1&3&1\end{vmatrix}=1\cdot1\cdot1+2\cdot3\cdot1+3\cdot(-1)\cdot1-1\cdot1\cdot1-(-1)\cdot3\cdot1-2\cdot3\cdot1=$	**3p**
	$=1+6-3-1+3-6=0$	**2p**
b)	$B(a)=\begin{pmatrix}0&0&a\\0&0&0\\a&0&0\end{pmatrix}$, $B(a)\cdot B(a)=\begin{pmatrix}a^2&0&0\\0&0&0\\0&0&a^2\end{pmatrix}$, pentru orice număr real a	**2p**
	$B(a)\cdot B(a)\cdot B(a)=\begin{pmatrix}0&0&a^3\\0&0&0\\a^3&0&0\end{pmatrix}=a^3\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}=a^3B(1)$, pentru orice număr real a	**3p**

c)	$\det\left(A(a)\right)=0$; cum $\det\left(A(a)\right)=-a^2+3a-2$, obținem $a=1$, pentru care sistemul este incompatibil, deci nu convine, sau $a=2$, pentru care sistemul are o infinitate de soluții	**2p**
	Dacă $a=2$, soluția sistemului este $(x_0,y_0,z_0)=(\alpha-1,-\alpha+1,\alpha)$ și, cum α este număr real, obținem $x_0y_0+y_0z_0+z_0x_0=(\alpha-1)(-\alpha+1)+\alpha(-\alpha+1)+\alpha(\alpha-1)=-(\alpha-1)^2\leq 0$, pentru orice soluție (x_0,y_0,z_0) a sistemului de ecuații, cu x_0, y_0 și z_0 numere reale	**3p**
2.a)	$(-1)*2=\dfrac{-1+2}{4\cdot\lvert-1\cdot 2\rvert+1}=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{4\cdot 2+1}=\dfrac{1}{9}$	**2p**
b)	$z*0=\dfrac{z+0}{4\cdot\lvert z\cdot 0\rvert+1}=z$, pentru orice număr complex z	**2p**
	$0*z=\dfrac{0+z}{4\cdot\lvert 0\cdot z\rvert+1}=z$, pentru orice număr complex z, deci $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**3p**
c)	$z*z=\dfrac{2z}{4\cdot\lvert z^2\rvert+1}$, pentru orice număr complex z	**2p**
	$\left\lvert\dfrac{2z}{4\cdot\lvert z\rvert^2+1}\right\rvert=\lvert z\rvert$ și z este număr complex nenul, deci $4\cdot\lvert z\rvert^2+1=2$, de unde obținem $\lvert z\rvert=\dfrac{1}{2}$	**3p**
	și, de exemplu, numerele distincte nenule $\dfrac{1}{2}$, $-\dfrac{1}{2}$ și $\dfrac{i}{2}$ verifică egalitatea dată	

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{\dfrac{4x^3}{2\sqrt{x^4+16}}\cdot x-\sqrt{x^4+16}}{x^2}=\dfrac{2x^4-x^4-16}{x^2\sqrt{x^4+16}}=$	**3p**
	$=\dfrac{x^4-16}{x^2\sqrt{x^4+16}}=\dfrac{\left(x^2-4\right)\left(x^2+4\right)}{x^2\sqrt{x^4+16}}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^4+16}}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\dfrac{16}{x^4}}=1$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^4+16}-x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{16}{x\left(\sqrt{x^4+16}+x^2\right)}=0$, deci dreapta de ecuație $y=x$ este asimptota oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	**3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=2$; $f'(x)<0$, pentru orice $x\in(0,2)$ și $f'(x)>0$, pentru orice $x\in(2,+\infty)$	**2p**
	$g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)+f\left(\dfrac{4}{x}\right)=2f(x)$, deci g este strict descrescătoare pe $(0,2)$ și g este strict crescătoare pe $(2,+\infty)$ și, cum g este continuă, $g(2)=4\sqrt{2}$, $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=+\infty$ și $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$, obținem că ecuația $g(x)=m$ are exact două soluții pentru $m\in\left(4\sqrt{2},+\infty\right)$	**3p**

2.a)	$\int_0^3 e^x f(x)\,dx = \int_0^3 \left(x^2+1\right)dx = \left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Big\|_0^3 =$	**3p**
	$= \frac{27}{3}+3 = 12$	**2p**
b)	G este primitivă a funcției $g \Rightarrow G'(x) = g(x)$, deci $G''(x) = g'(x) =$	**2p**
	$= \frac{e^x (x-1)^2}{\left(x^2+1\right)^2} \geq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci funcția G este convexă	**3p**
c)	$\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{e^x f(x)}}\,dx = \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int_0^1 \frac{x^3+x-x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x^2+1\right)' \cdot \left(\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx =$	
	$= \frac{1}{2}\left(\frac{2\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}{3} - 2\sqrt{x^2+1}\right)\Big\|_0^1 = \frac{2-\sqrt{2}}{3}$	**3p**
	$\frac{2-\sqrt{2}}{3} = \frac{a-\sqrt{2}}{3}$, de unde obținem $a = 2$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2022

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $8-6\sqrt{6}+6\left(\sqrt{6}-1\right)=2$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+m$, unde m este număr real. Determinați numărul real m pentru care $(f\circ f)(0)=4$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3\cdot 2^{2x}+4^x=4$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra zecilor divizor al numărului 6.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuație $y=3x-2$ și punctul $A(a,a)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, știind că punctul A aparține dreptei d.

5p **6.** Se consideră triunghiul isoscel ABC, cu $AB=10$ și $\cos A=0$. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu 50.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & -x & x^2\\ 0 & 1 & -2x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=1$.

5p **b)** Arătați că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numărul natural n pentru care $A(n)\cdot A(n+1)\cdot A(n+2)\cdot A(n+3)=A\left(2n^2\right)$.

2. Pe mulțimea $M=[0,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x*y=\frac{2x}{y+2}+\frac{2y}{x+2}$.

5p **a)** Arătați că $1*0=1$.

5p **b)** Arătați că $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Determinați $x\in M$, x nenul, pentru care $x*\frac{4}{x}=x$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2+\frac{x}{e^x-x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{e^x(1-x)}{\left(e^x-x\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice $m\in(1,2]$, ecuația $f(x)=m$ are soluție unică.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3-x+\sqrt{x^2+9}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^5\left(f(x)-\sqrt{x^2+9}\right)dx=0$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^4\frac{x}{f(x)+x-3}dx=2$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{f(x)}dx$. Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$.

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $5(1+2i)-2i(5-i)=3$, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x-3$. Determinați numărul real a pentru care $f(a)=1+a^2$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3\left(2x^2+1\right)=2$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele impare și distincte.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,0)$, $B(1,6)$ și $C(4,2)$. Determinați coordonatele punctului D, știind că $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, astfel încât $BC=10$ și $\sin B=2\sin C$. Arătați că lungimea laturii AB este egală cu $2\sqrt{5}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $O_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}x+1&-x&0\\x&1-x&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=1$.

5p **b)** Arătați că $(A(x)-I_3)(A(x)-I_3)=O_3$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $A(x)\cdot A(x)=xA(x)-(x-1)I_3$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=(x+y)^2-2(x-y)-3$.

5p **a)** Arătați că $0*2=5$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $x*(x+1)=8$.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere naturale pentru care $m*n=2mn$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(x^2-5x+10\right)\sqrt{x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{5\left(x^2-3x+2\right)}{2\sqrt{x}}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

5p **c)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x^2\sqrt{x}}\right)^{\frac{x}{5}}=\dfrac{1}{e}$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+e^x+\dfrac{1}{e^x+1}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^2\left(f(x)-\frac{1}{e^x+1}\right)dx=e^2+1$.

5p **b)** Arătați că $\displaystyle\int_{-1}^1 e^x\left(f(x)-x-e^x\right)dx=1$.

5p **c)** Determinați numărul real m pentru care $\displaystyle\int_0^1 x\left(f(x)+f(-x)\right)dx=\frac{m}{2}-\frac{2}{e}$.

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $5(1+2i)-2i(5-i)=3$, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x-3$. Determinați numărul real a pentru care $f(a)=1+a^2$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3\left(2x^2+1\right)=2$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele impare și distincte.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,0)$, $B(1,6)$ și $C(4,2)$. Determinați coordonatele punctului D, știind că $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, astfel încât $BC=10$ și $\sin B=2\sin C$. Arătați că lungimea laturii AB este egală cu $2\sqrt{5}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $O_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}x+1&-x&0\\x&1-x&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=1$.

5p **b)** Arătați că $(A(x)-I_3)(A(x)-I_3)=O_3$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $A(x)\cdot A(x)=xA(x)-(x-1)I_3$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=(x+y)^2-2(x-y)-3$.

5p **a)** Arătați că $0*2=5$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $x*(x+1)=8$.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere naturale pentru care $m*n=2mn$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(x^2-5x+10\right)\sqrt{x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{5\left(x^2-3x+2\right)}{2\sqrt{x}}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

5p **c)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x^2\sqrt{x}}\right)^{\frac{x}{5}}=\dfrac{1}{e}$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+e^x+\dfrac{1}{e^x+1}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^2\left(f(x)-\frac{1}{e^x+1}\right)dx=e^2+1$.

5p **b)** Arătați că $\displaystyle\int_{-1}^1 e^x\left(f(x)-x-e^x\right)dx=1$.

5p **c)** Determinați numărul real m pentru care $\displaystyle\int_0^1 x\left(f(x)+f(-x)\right)dx=\frac{m}{2}-\frac{2}{e}$.

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că numerele $6-3\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ și $2+\sqrt{3}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+mx+1$, unde m este număr real. Determinați numerele reale m pentru care axa Ox este tangentă graficului funcției f.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{x+2}=5^x+24$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre distincte, acesta să aibă cifra zecilor multiplu de 3.

5p **5.** Se consideră triunghiul ABC, punctul D mijlocul laturii AC și punctul M astfel încât $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}=\vec{0}$. Arătați că dreptele MD și AB sunt paralele.

5p **6.** Calculați lungimea laturii AB a triunghiului ABC, în care $AC=3$ și măsurile unghiurilor A și B sunt de $30°$, respectiv $60°$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&i&0\\-2&0&-1\end{pmatrix}$ și $A(z)=aI_3+bB$, unde $z=a+ib$, cu a și b numere reale și $i^2=-1$.

5p **a)** Arătați că $\det B=i$.

5p **b)** Demonstrați că $A(z_1)\cdot A(z_2)=A(z_1z_2)$, pentru orice numere complexe z_1 și z_2.

5p **c)** Determinați numărul natural n pentru care $A(1+i)\cdot A(2+i)\cdot A(3+i)\cdot A(1-i)\cdot A(2-i)\cdot A(3-i)=nI_3$.

2. Pe $M=[1,+\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\log_2\left(2^{x+y}-2^{x+1}-2^{y+1}+6\right)$.

5p **a)** Arătați că $x*y=\log_2\left(\left(2^x-2\right)\left(2^y-2\right)+2\right)$, pentru orice $x,y\in M$.

5p **b)** Determinați elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Arătați că $x*x*x<3x$, pentru orice $x\in M$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(x^3+3x+1\right)e^{-x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=(2-x)\left(x^2-x+1\right)e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)-e^{-x}}{f(x)+e^{-x}}\right)^{f(x)\cdot e^x}=e^{-2}$.

5p **c)** Demonstrați că funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\left|\dfrac{f(x)}{e^{-x}}-1\right|$ are un singur punct de extrem.

2. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln(x-1)$.

5p **a)** Arătați că $\int_4^6 \frac{f(x)}{\ln(x-1)}dx=10$.

5p **b)** Demonstrați că $F(\sqrt{7})<F(3)$, pentru orice primitivă F a funcției f.

5p **c)** Determinați numărul real m, știind că $\int_3^5 f(x)dx=m(4\ln 2-1)$.

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numerele complexe $z_1 = 1-2i$ și $z_2 = 2+i$. Arătați că $(z_1+i)(z_2-1)=2$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+4x+m$, unde m este număr real. Determinați valorile reale ale lui m pentru care $f(x)>0$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $1+2\log_2\sqrt{x-2}=\log_2 x$.

5p **4.** Se consideră mulțimea A, a numerelor naturale de două cifre. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea A, acesta să aibă exact doi multipli în mulțimea A.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,-2)$, $B(3,1)$ și $M(2,4)$. Determinați coordonatele punctului N, știind că patrulaterul $ABMN$ este paralelogram.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, în care $\sin(A+B)+\cos C=1$. Arătați că triunghiul ABC este dreptunghic.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 3 & a\\ 2 & 1 & -1\\ a & 3 & 1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+3y+az=2\\ 2x+y-z=-1\\ ax+3y+z=1\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=0$.

5p **b)** Arătați că $B(a)\cdot B(a)\cdot B(a)=a^3B(1)$, pentru orice număr real a, unde $B(a)=A(a)-A(0)$.

5p **c)** Demonstrați că, dacă sistemul de ecuații are o infinitate de soluții, atunci $x_0y_0+y_0z_0+z_0x_0\le 0$, pentru orice soluție (x_0,y_0,z_0) a sistemului de ecuații, cu x_0, y_0 și z_0 numere reale.

2. Pe mulțimea numerelor complexe se definește legea de compoziție $z_1*z_2=\dfrac{z_1+z_2}{4\cdot|z_1z_2|+1}$.

5p **a)** Arătați că $(-1)*2=\dfrac{1}{9}$.

5p **b)** Arătați că $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Demonstrați că există cel puțin trei numere complexe distincte și nenule care verifică egalitatea $|z*z|=|z|$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^4+16}}{x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{(x^2-4)(x^2+4)}{x^2\sqrt{x^4+16}}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Determinați valorile reale ale lui m pentru care ecuația $f(x)+f\left(\frac{4}{x}\right)=m$ are exact două soluții.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+1}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^3 e^x f(x)\,dx=12$.

5p **b)** Arătați că orice primitivă G a funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ este convexă.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{e^x f(x)}}\,dx=\frac{a-\sqrt{2}}{3}$.

Examenul național de bacalaureat 2023

Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z(z-2i)=(3+i)(3-i)=3^2-i^2=$	**3p**
	$=9+1=10$	**2p**
2.	$f(2x)=10x+1$, pentru orice număr real x	**2p**
	$f(2x)-2f(x)=10x+1-2(5x+1)=10x+1-10x-2=-1$, pentru orice număr real x	**3p**
3.	$x^3-2x+2=x^3$, deci $-2x+2=0$	**3p**
	$x=1$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea A sunt 9 numere n pentru care $n+5$ este multiplu de 10, deci sunt 9 cazuri favorabile, de unde obținem $p=\frac{9}{90}=\frac{1}{10}$	**3p**
5.	$m_{AB}=4$ și, cum $d \parallel AB$, obținem $m_d=4$	**3p**
	Ecuația dreptei este $y-0=4(x-0)$, adică $y=4x$	**2p**
6.	$AD=\frac{BC}{2}$, unde AD este înălțime în triunghiul ABC	**3p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{AD\cdot BC}{2}=4$, de unde obținem $BC=4$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}2&1&2\\1&-1&0\\0&1&-2\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(0))=\begin{vmatrix}2&1&2\\1&-1&0\\0&1&-2\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=4+2+0-0-0+2=8$	**3p**
b)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix}2&1&2\\1&-1&a\\a&a+1&-2\end{vmatrix}=-a^2+2a+8$, pentru orice număr real a	**2p**
	$\det(A(a))=0\Leftrightarrow a=-2$ sau $a=4$, deci matricea $A(a)$ este inversabilă dacă și numai dacă $a\in\mathbb{R}\setminus\{-2,4\}$	**3p**
c)	Pentru $a=-2$, soluțiile sistemului de ecuații sunt de forma $(2,-2-2\alpha,\alpha)$, cu $\alpha\in\mathbb{C}$	**3p**
	$x_0z_0+y_0=2\alpha-2-2\alpha=-2$, pentru orice soluție (x_0,y_0,z_0) a sistemului de ecuații	**2p**
2.a)	$2\circ 3=2\cdot 3+(2^2-2)(2^3-2)=$	**3p**
	$=6+12=18$	**2p**

b)	$x\circ 1=x\cdot 1+\left(2^x-2\right)\left(2^1-2\right)=x+0=x$, pentru orice număr real x	**2p**
	$1\circ x=1\cdot x+\left(2^1-2\right)\left(2^x-2\right)=x+0=x$, pentru orice număr real x, deci $e=1$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”	**3p**
c)	$x\circ(-x)=-x^2+1-2\cdot 2^x-2\cdot 2^{-x}+4=$	**2p**
	$=-x^2+1-2\cdot\left(2^x-2+\dfrac{1}{2^x}\right)=1-x^2-2\cdot\left(\sqrt{2^x}-\dfrac{1}{\sqrt{2^x}}\right)^2\le 1$, pentru orice număr real x	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=1+3\left(\ln(x+3)-\ln(x-1)\right)'=1+\dfrac{3}{x+3}-\dfrac{3}{x-1}=$	**3p**
	$=\dfrac{x^2+2x-3+3x-3-3x-9}{(x+3)(x-1)}=\dfrac{x^2+2x-15}{(x+3)(x-1)}$, $x\in(1,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\ln\dfrac{x+3}{x-1}\right)=1$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3\ln\dfrac{x+3}{x-1}\right)=0$, deci dreapta de ecuație $y=x$ este asimptota oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	**3p**
c)	$f'(x)=0\Rightarrow x=3$; $f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(1,3]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(1,3]$ și $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[3,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[3,+\infty)$, deci $f(x)\ge f(3)$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$	**3p**
	$f(3)=3+3\ln 3$, deci $x+3\ln\dfrac{x+3}{x-1}\ge 3+3\ln 3$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$, de unde obținem $\ln\dfrac{x+3}{3(x-1)}\ge 1-\dfrac{x}{3}$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_0^3 f(x)e^x dx=\int_0^3\left(x^2+2x\right)dx=\left(\dfrac{x^3}{3}+x^2\right)\Big\vert_0^3=$	**3p**
	$=\dfrac{27}{3}+9=18$	**2p**
b)	$\int_0^1\dfrac{f(x)}{x+2}dx=\int_0^1 x\left(-e^{-x}\right)'dx=x\left(-e^{-x}\right)\Big\vert_0^1-e^{-x}\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=-\dfrac{1}{e}-\dfrac{1}{e}+1=\dfrac{e-2}{e}$	**2p**
c)	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}\int_0^x f(t)dt\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\int_0^x f(t)dt\right)'}{\left(x^2\right)'}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+2)e^{-x}}{2}=1$	**3p**

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(2-i)^2+i(4+i)=4-4i+i^2+4i+i^2=$	**3p**
	$=4-1-1=2$	**2p**
2.	$(f\circ f)(m)=m+6$, pentru orice număr real m	**3p**
	$m+6=2m$, de unde obținem $m=6$	**2p**
3.	$5\cdot 5^x-3\cdot 5^x=10$, deci $2\cdot 5^x=10$, de unde obținem $5^x=5$	**3p**
	$x=1$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Deoarece cifrele pot fi 7, 8 și 9, sunt $3\cdot 3=9$ numere naturale de două cifre care au cifrele mai mari sau egale cu 7, deci sunt 9 cazuri favorabile, de unde obținem $p=\frac{9}{90}=\frac{1}{10}$	**3p**
5.	$m_{AB}=-2$	**2p**
	$m_{OC}=\frac{1}{2}$, pentru orice număr real nenul a și, cum $m_{AB}\cdot m_{OC}=(-2)\cdot\frac{1}{2}=-1$, obținem că dreptele AB și OC sunt perpendiculare, pentru orice număr real nenul a	**3p**
6.	$\sin\frac{\pi}{2}=1$, $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$	**3p**
	$E\left(\frac{\pi}{2}\right)=1+4\cdot\frac{3}{4}=4$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&-2&0\\1&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(0))=\begin{vmatrix}0&-1&0\\1&-2&0\\1&1&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+0+0-0-0-(-1)=1$	**3p**
b)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix}a&-1&2a\\1&-2&a\\1&1&1-a\end{vmatrix}=(a+1)^2$, pentru orice număr real a	**2p**
	$\det(A(a))=0\Leftrightarrow a=-1$, deci sistemul de ecuații are soluție unică dacă și numai dacă $a\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$	**3p**
c)	Pentru $a=-1$, soluțiile sistemului de ecuații sunt de forma $(-\alpha,-\alpha,\alpha)$, cu $\alpha\in\mathbb{C}$	**2p**
	$x_0^2+y_0^2+z_0^2=3\alpha^2$, deci $3\alpha^2=3$, de unde obținem $\alpha=-1$ sau $\alpha=1$, deci soluțiile sunt $(1,1,-1)$ și $(-1,-1,1)$	**3p**

2.a)	$0*1=0^2\cdot 1^2-4(0+1)^2+1=$ $=0-4+1=-3$	**3p** **2p**
b)	$x*(-1)=-3x^2+8x-3=$ $=-3x^2+6x-3+2x=-3(x-1)^2+2x\leq 2x$, pentru orice număr real x	**2p** **3p**
c)	$m^2n^2-4(m+n)^2+1=1$ și, cum m și n sunt numere naturale nenule, obținem $mn-2m-2n=0$ $(m-2)(n-2)=4$ și, cum m și n sunt numere naturale nenule, cu $m\leq n$, perechile sunt $(3,6)$ și $(4,4)$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{1}{5}-\frac{2x+1}{x^2+x+5}=$ $=\frac{x^2+x+5-10x-5}{5(x^2+x+5)}=\frac{x^2-9x}{5(x^2+x+5)}$, $x\in\mathbb{R}$	**3p** **2p**
b)	Tangenta la graficul funcției f în punctul de coordonate $(a,f(a))$ este paralelă cu axa $Ox\Leftrightarrow f'(a)=0$ $a^2-9a=0$, de unde obținem $a=0$ sau $a=9$	**3p** **2p**
c)	$f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in(-\infty,0]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $(-\infty,0]$; $f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in[0,9]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[0,9]$, deci $f(x)\leq f(0)$, pentru orice $x\in(-\infty,9]$ $f'(x)>0$, pentru orice $x\in(9,+\infty)\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(9,+\infty)$ și, cum $f(0)=-\ln 5<0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ și f este continuă, obținem că ecuația $f(x)=0$ are soluție unică	**2p** **3p**
2.a)	$\int_0^2(x^3+8)f(x)dx=\int_0^2 4x\,dx=2x^2\Big|_0^2=$ $=8-0=8$	**3p** **2p**
b)	$\int_1^4 xf(x)dx=\int_1^4\frac{4x^2}{x^3+8}dx=\frac{4}{3}\int_1^4\frac{(x^3+8)'}{x^3+8}dx=\frac{4}{3}\cdot\ln(x^3+8)\Big|_1^4=$ $=\frac{4}{3}\ln 8=4\ln 2$	**3p** **2p**
c)	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^3}\int_0^x t\cdot f(t)dt\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x t\cdot f(t)dt\right)'}{(x^3)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot f(x)}{3x^2}=$ $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{4}{3(x^3+8)}=\frac{1}{6}$	**3p** **2p**

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$4r = a_5 - a_1 = 20$, deci $r = 5$, unde r este rația progresiei aritmetice	**3p**
	$a_6 = a_5 + r \Rightarrow a_6 = 28$	**2p**
2.	$f(m) = -1$, de unde obținem $m^2 - 6m + 9 = 0$	**3p**
	$m = 3$	**2p**
3.	$3^{2x-1} = 3^{x+3}$, de unde obținem $2x - 1 = x + 3$	**3p**
	$x = 4$	**2p**
4.	$C_5^1 + C_5^2 =$	**3p**
	$= 5 + 10 = 15$	**2p**
5.	$\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} + \vec{j}$, $\overrightarrow{BC} = (x_C - 4)\vec{i} + (y_C - 4)\vec{j}$	**3p**
	$x_C = 7$ și $y_C = 5$	**2p**
6.	Triunghiul ADB este dreptunghic în D, deci $BD = 3\sqrt{3}$	**2p**
	$BC = 4\sqrt{3}$, deci $R = 2\sqrt{3}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$	**2p**
	$= -1 - 1 - 1 + 1 + 1 + 1 = 0$	**3p**
b)	$A(x) \cdot A(y) - A(xy) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ y+x-2 & 0 & y+x-2 \\ -y-x+2 & 0 & -y-x+2 \end{pmatrix} =$	**3p**
	$= (y + x - 2)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (x + y - 2)A(0)$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
c)	$A(-1) \cdot A(3) \cdot A(x) = A(-3) \cdot A(x) = A(-3x) + (x - 5)A(0)$, pentru orice număr real x	**2p**
	$A(-3x) + (x - 5)A(0) = A(y)$, de unde obținem $x = 5$ și $y = -15$	**3p**
2.a)	$f = X^4 + 2X^3 - 8X^2 + 6X + 2 \Rightarrow f(1) = 1^4 + 2 \cdot 1^3 - 8 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 + 2 =$	**3p**
	$= 1 + 2 - 8 + 6 + 2 = 3$	**2p**
b)	$f = X^4 + 2X^3 - 8X^2 = X^2(X^2 + 2X - 8)$	**2p**
	Rădăcinile polinomului f sunt $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = -4$, $x_4 = 2$	**3p**
c)	Polinomul f are coeficienți raționali, deci $x_2 = 1 - \sqrt{3}$ este rădăcină a polinomului f	**2p**
	$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -2$ și $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = -8$, unde x_3 și x_4 sunt celelalte rădăcini ale polinomului f, de unde obținem $x_3 + x_4 = -4$ și $x_3x_4 = 2$ și, cum $x_1x_2x_3x_4 = m$, rezultă $m = -4$, care convine	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{3e^x\left(x^2+x+1\right)-3e^x(2x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{3e^x\left(x^2+x+1-2x-1\right)}{\left(x^2+x+1\right)^2}=\dfrac{3e^x\left(x^2-x\right)}{\left(x^2+x+1\right)^2},\ x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(2x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3e^{2x}}{4x^2+2x+1}\cdot\dfrac{x^2+x+1}{3e^x}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x\cdot\dfrac{x^2+x+1}{4x^2+2x+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x\cdot\dfrac{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{4+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=+\infty$	**3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$ sau $x=1$; pentru orice $x\in(-\infty,0)$, $f'(x)>0\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(-\infty,0)$; pentru orice $x\in(0,1)$, $f'(x)<0\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(0,1)$; pentru orice $x\in(1,+\infty)$, $f'(x)>0\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(1,+\infty)$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$, $f(0)=3$, $f(1)=e$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ și, cum f este continuă, obținem că ecuația $f(x)=m$ are exact trei soluții, pentru orice $m\in(e,3)$	**3p**
2.a)	$\int_1^2\left(f(x)-\ln(x+1)\right)dx=\int_1^2 6x\,dx=3x^2\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=12-3=9$	**2p**
b)	$\int_0^{e-1}\dfrac{f(x)-6x}{x+1}dx=\int_0^{e-1}\ln(x+1)\left(\ln(x+1)\right)'dx=\dfrac{\ln^2(x+1)}{2}\Big\vert_0^{e-1}=$	**3p**
	$=\dfrac{\ln^2 e}{2}-\dfrac{\ln^2 1}{2}=\dfrac{1}{2}$	**2p**
c)	$g(x)=6x^2+\ln\left(x^2+1\right)\Rightarrow\mathcal{A}=\int_0^1\lvert g(x)\rvert dx=2x^3\Big\vert_0^1+\int_0^1 x'\ln\left(x^2+1\right)dx=2+\ln 2-\int_0^1\dfrac{2x^2}{x^2+1}dx=$	**3p**
	$=2+\ln 2-2x\Big\vert_0^1+2\operatorname{arctg}x\Big\vert_0^1=\dfrac{\pi}{2}+\ln 2$, deci $\dfrac{\pi}{2}+\ln 2=a\pi+\ln 2$, de unde obținem $a=\dfrac{1}{2}$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a-b+(a+b)i=4$, de unde obținem $a-b=4$ și $a+b=0$	**3p**
	$a=2$ și $b=-2$	**2p**
2.	$m(m-x)^2-2(m-x)+m=m(m+x)^2-2(m+x)+m\Rightarrow x\left(m^2-1\right)=0$ și, cum egalitatea are loc pentru orice număr real x, obținem $m^2-1=0$	**3p**
	$m=-1$ sau $m=1$, care convin	**2p**
3.	$\log_2\left(2x^2\right)=\log_2\left(x^2+x+2\right)$, de unde obținem $x^2-x-2=0$	**3p**
	$x=-1$, care nu convine; $x=2$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea F are $4^4=256$ de elemente, deci sunt 256 de cazuri posibile	**2p**
	Pentru fiecare $n\in A$, $f(n)$ se poate alege în n moduri, deci sunt $1\cdot2\cdot3\cdot4=24$ de cazuri favorabile, de unde obținem $p=\dfrac{24}{256}=\dfrac{3}{32}$	**3p**
5.	$\overrightarrow{CM}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)$, unde M este mijlocul segmentului AB, de unde obținem $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{OC}$, deci punctul C este mijlocul segmentului OM	**3p**
	Cum $x_M=2$ și $y_M=4$, obținem $x_C=1$ și $y_C=2$	**2p**
6.	$\dfrac{AB}{\sin C}=2R\Rightarrow R=\dfrac{AB}{2\sin C}=\dfrac{8}{2\cdot\frac{1}{2}}=8$, unde R este raza cercului circumscris triunghiului ABC	**2p**
	Triunghiul OAB este echilateral cu latura egală cu 8, deci distanța de la punctul O la latura AB este $OM=4\sqrt{3}$, unde M este mijlocul segmentului AB	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}3&0&-2\\1&1&-1\\2&-2&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A(0)\right)=\begin{vmatrix}3&0&-2\\1&1&-1\\2&-2&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=3+4+0+4-6-0=5$	**3p**
b)	$\det\left(A(a)\right)=\begin{vmatrix}3&a&-2\\2a+1&1-a&-1\\a+2&-2&1\end{vmatrix}=5(1+a)(1-a)$, pentru orice număr real a	**2p**
	$\det\left(A(a)\right)=0\Leftrightarrow a=-1$ sau $a=1$, deci matricea $A(a)$ este inversabilă dacă și numai dacă $a\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$	**3p**

c)	Pentru $a\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, sistemul de ecuații este compatibil, oricare ar fi numerele reale b și c; pentru $a\in\{-1,1\}$, $\begin{vmatrix} a & -2 \\ 1-a & -1 \end{vmatrix}\neq 0$, deci sistemul este compatibil dacă și numai dacă $\begin{vmatrix} -1 & -2 & b \\ 2 & -1 & c \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0$ și $\begin{vmatrix} 1 & -2 & b \\ 0 & -1 & c \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0$	**3p**
	$b=2$ și $c=1$	**2p**
2.a)	$f(-1)=(-1)^4+a\cdot(-1)^3+a\cdot(-1)^2+8\cdot(-1)-8=$	**3p**
	$=1-a+a-8-8=-15$, pentru orice număr real a	**2p**
b)	Restul împărțirii polinomului f la polinomul g este egal cu $(a+8)X+a-7$, pentru orice număr real a	**3p**
	$(a+8)X+a-7=15X$, de unde obținem $a=7$	**2p**
c)	Presupunând că rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4 ale polinomului f sunt numere întregi, cum $x_1+x_2+x_3+x_4=-a$, obținem că $a\in\mathbb{Z}$	**2p**
	$x_1x_2x_3x_4=-8\Rightarrow\lvert x_1\rvert\cdot\lvert x_2\rvert\cdot\lvert x_3\rvert\cdot\lvert x_4\rvert=8$, de unde obținem că cel puțin o rădăcină a polinomului f are modulul egal cu 1 și, cum $f(-1)\neq 0$ pentru orice număr real a, obținem $f(1)=0$, deci $a=-\frac{1}{2}$, ceea ce este fals, deci polinomul f **nu** are toate rădăcinile numere întregi	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=-1-4x^3\operatorname{arctg}x-\left(x^4-1\right)\cdot\frac{1}{x^2+1}=$	**3p**
	$=-1-4x^3\operatorname{arctg}x-x^2+1=-x^2\left(4x\operatorname{arctg}x+1\right)$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	Tangenta la graficul funcției f în punctul $A(x_0,f(x_0))$ este paralelă cu axa $Ox\Leftrightarrow f'(x_0)=0$	**2p**
	$-x_0^{\,2}\left(4x_0\operatorname{arctg}x_0+1\right)=0$ și, cum $x_0\operatorname{arctg}x_0\geq 0$ pentru orice $x_0\in\mathbb{R}$, obținem $x_0=0$, deci ecuația tangentei la graficul funcției f care este paralelă cu axa Ox este $y-f(0)=f'(0)(x-0)$, adică $y=1$	**3p**
c)	$f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, deci funcția f este descrescătoare pe $\mathbb{R}$ și, cum $f(0)=1$ și $f(1)=0$, obținem $0\leq f(x)\leq 1$, pentru orice $x\in[0,1]$	**2p**
	Pentru $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\operatorname{tg}x-x$, $g'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}-1\geq 0$, pentru orice $x\in[0,1]$, deci g este crescătoare, de unde obținem $\operatorname{tg}x\geq x$, pentru orice $x\in[0,1]$, deci $\operatorname{tg}(f(x))\geq f(x)\geq f(\operatorname{tg}x)$, pentru orice $x\in[0,1]$	**3p**
2.a)	$\int_0^3\left(1+e^{-x}\right)f(x)\,dx=\int_0^3\left(x^2+e^x\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+e^x\right)\Big\rvert_0^3=$	**3p**
	$=\frac{27}{3}+e^3-0-1=8+e^3$	**2p**
b)	$\int_{-m}^{m}\frac{f(x)}{x^2+e^x}dx=\int_{-m}^{m}\frac{1}{1+e^{-x}}dx=\int_{-m}^{m}\frac{\left(e^x+1\right)'}{e^x+1}dx=$	**3p**
	$=\ln\left(1+e^x\right)\Big\rvert_{-m}^{m}=\ln\left(1+e^m\right)-\ln\left(\frac{1+e^m}{e^m}\right)=\ln e^m=m$, pentru orice $m\in(0,+\infty)$	**2p**

c)	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{e^{ax}-1}\int\limits_0^x f(t)\,dt\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\int\limits_0^x f(t)\,dt\right)'}{\left(e^{ax}-1\right)'}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{ae^{ax}}=\dfrac{1}{2a}$, de unde obținem $\dfrac{1}{2a}=1$, deci $a=\dfrac{1}{2}$, care convine	**3p**

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z_1^2+4z_2=(1+2i)^2+4(1-i)=1+4i+4i^2+4-4i=$	**3p**
	$=5+4\cdot(-1)=5-4=1$	**2p**
2.	$f(x)=g(x)\Rightarrow x^2-2x+m-1=0$	**2p**
	$\Delta=0$ și, cum $\Delta=8-4m$, obținem $8-4m=0$, deci $m=2$	**3p**
3.	$\lg(x^2+9)=\lg(10x^2)\Rightarrow x^2+9=10x^2$, de unde obținem $x^2-1=0$	**3p**
	$x=-1$, care nu convine; $x=1$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea A are 100 de elemente, deci sunt 100 de cazuri posibile	**2p**
	Numerele din mulțimea A, divizibile cu 9, sunt $9\cdot0$, $9\cdot1$, $9\cdot2$, ... $9\cdot11$, deci sunt 12 cazuri favorabile, de unde obținem $p=\frac{12}{100}=\frac{3}{25}$	**3p**
5.	$\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}$ și $\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BE}$	**2p**
	$\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}+\vec{0}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CB}$	**3p**
6.	$2\sin x\cos x=2\cos^2 x\Leftrightarrow 2\cos x(\sin x-\cos x)=0$	**2p**
	Cum $x\in[0,\pi]$, obținem $x=\frac{\pi}{2}$ sau $x=\frac{\pi}{4}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(0))=\begin{vmatrix}0&1&2\\1&0&-1\\2&2&1\end{vmatrix}=0\cdot0\cdot1+1\cdot(-1)\cdot2+1\cdot2\cdot2-2\cdot0\cdot2-1\cdot1\cdot1-(-1)\cdot2\cdot0=$	**3p**
	$=0-2+4-0-1-0=1$	**2p**
b)	$\det(A(a))=(a-1)^2$, pentru orice număr real a	**3p**
	$\det(A(a))=0\Leftrightarrow a=1$, deci sistemul are soluție unică pentru $a\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$	**2p**
c)	Pentru $a=1$, soluțiile sistemului de ecuații sunt $(\alpha,2-\alpha,-2)$, unde $\alpha\in\mathbb{C}$	**2p**
	Cum α este număr întreg și $\alpha>2-\alpha>-2$, obținem $\alpha=2$ sau $\alpha=3$, deci soluțiile sunt $(2,0,-2)$ și $(3,-1,-2)$	**3p**

2.a)	$1*\frac{1}{2}=\frac{1\cdot\frac{1}{2}}{1+\sqrt{\left(1-1^2\right)\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)}}=$	**3p**
	$=\frac{\frac{1}{2}}{1+\sqrt{0}}=\frac{1}{2}$	**2p**
b)	$x*(-x)=\frac{-x^2}{1+\lvert 1-x^2\rvert}=\frac{-x^2}{2-x^2}$, pentru orice $x\in M$	**3p**
	$(x*(-x))+x^2=\frac{x^2\left(1-x^2\right)}{2-x^2}\geq 0$, deci $x*(-x)\geq -x^2$, pentru orice $x\in M$	**2p**
c)	$a*b=1\Rightarrow\sqrt{\left(1-a^2\right)\left(1-b^2\right)}=ab-1$, deci $ab\geq 1$	**3p**
	Cum $a, b\in M$, obținem $ab=1$, deci perechile sunt $(-1,-1)$ și $(1,1)$, care convin	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=1-\frac{1}{e^x+x^2}\cdot\left(e^x+2x\right)=$	**3p**
	$=\frac{x^2-2x}{e^x+x^2}=\frac{x(x-2)}{e^x+x^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	Tangenta la graficul funcției f în punctul de coordonate $(a,f(a))$ este paralelă cu axa $Ox\Leftrightarrow f'(a)=0$	**3p**
	$\frac{a(a-2)}{e^a+a^2}=0\Leftrightarrow a=0$ sau $a=2$	**2p**
c)	Pentru orice $x\in(-\infty,0]$, $f'(x)\geq 0$, deci f este crescătoare pe $(-\infty,0]$; pentru orice $x\in[0,2]$, $f'(x)\leq 0$, deci f este descrescătoare pe $[0,2]$; pentru orice $x\in[2,+\infty)$, $f'(x)\geq 0$, deci f este crescătoare pe $[2,+\infty)$	**2p**
	Cum f este continuă, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $f(0)=-1$ și $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-1$, imaginea funcției f este $(-\infty,-1]$	**3p**
2.a)	$\int_0^3 f(x)\sqrt{x+3}\,dx=\int_0^3\left(x^2+1\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Big\rvert_0^3=$	**3p**
	$=9+3=12$	**2p**
b)	$\int_{-2}^{1}\frac{f(x)}{x^2+1}dx=\int_{-2}^{1}\frac{(x+3)'}{\sqrt{x+3}}dx=2\sqrt{x+3}\Big\rvert_{-2}^{1}=$	**3p**
	$=4-2=2$	**2p**
c)	$\frac{1}{f(x)}=\frac{\sqrt{x+3}}{x^2+1}\leq\frac{2}{x^2+1}$, pentru orice $x\in[0,1]$, de unde obținem $\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx\leq 2\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx=$	**3p**
	$=2\operatorname{arctg}x\Big\rvert_0^1=\frac{\pi}{2}$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numărul complex $z=3+i$. Arătați că $z(z-2i)=10$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5x+1$. Arătați că $f(2x)-2f(x)=-1$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{x^3-2x+2}=x$.

5p **4.** Se consideră mulțimea A, a numerelor naturale de două cifre. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea A, numărul $n+5$ să fie multiplu de 10.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,0)$ și $B(5,4)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul O și este paralelă cu dreapta AB.

5p **6.** Se consideră triunghiul isoscel ABC, dreptunghic în A, cu aria egală cu 4. Arătați că $BC=4$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 1 & -1 & a\\ a & a+1 & -2\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}2x+y+2z=2\\ x-y+az=4\\ ax+(a+1)y-2z=a\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=8$.

5p **b)** Determinați mulțimea numerelor reale a pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.

5p **c)** Pentru $a=-2$, arătați că $x_0z_0+y_0=-2$, pentru orice soluție (x_0,y_0,z_0) a sistemului de ecuații.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=xy+(2^x-2)(2^y-2)$.

5p **a)** Arătați că $2\circ 3=18$.

5p **b)** Arătați că $e=1$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

5p **c)** Demonstrați că $x\circ(-x)\le 1$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+3\ln\dfrac{x+3}{x-1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{x^2+2x-15}{(x-1)(x+3)}$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Arătați că $\ln\dfrac{x+3}{3(x-1)}\ge 1-\dfrac{x}{3}$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2+2x)e^{-x}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^3 f(x)e^x\,dx=18$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 \frac{f(x)}{x+2}dx = \frac{e-2}{e}$.

5p **c)** Demonstrați că $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)dt\right) = 1$.

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $(2-i)^2+i(4+i)=2$, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+3$. Determinați numărul real m pentru care $(f\circ f)(m)=2m$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{x+1}-3\cdot 5^x=10$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele mai mari sau egale cu 7.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,4)$, $B(3,-2)$ și $C(2a,a)$, unde a este număr real nenul. Arătați că dreptele AB și OC sunt perpendiculare, pentru orice număr real nenul a.

5p **6.** Se consideră expresia $E(x)=\sin x+4\cos\frac{x}{3}\sin\frac{2x}{3}$, unde x este număr real. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{2}\right)=4$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & -1 & 2a \\ 1 & -2 & a \\ 1 & 1 & 1-a \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax-y+2az=0 \\ x-2y+az=0 \\ x+y+(1-a)z=0 \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=1$.

5p **b)** Determinați mulțimea numerelor reale a pentru care sistemul de ecuații are soluție unică.

5p **c)** Pentru $a=-1$, determinați soluțiile (x_0,y_0,z_0) ale sistemului pentru care $x_0^2+y_0^2+z_0^2=3$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=x^2y^2-4(x+y)^2+1$.

5p **a)** Arătați că $0*1=-3$.

5p **b)** Arătați că $x*(-1)\le 2x$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere naturale nenule, cu $m\le n$, pentru care $m*n=1$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{5}-\ln\left(x^2+x+5\right)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x^2-9x}{5\left(x^2+x+5\right)}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați abscisele punctelor situate pe graficul funcției f în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu axa Ox.

5p **c)** Demonstrați că ecuația $f(x)=0$ are soluție unică.

2. Se consideră funcția $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{4x}{x^3+8}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^2\left(x^3+8\right)f(x)\,dx=8$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^4 xf(x)dx = 4\ln 2$.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^3}\int_0^x t\cdot f(t)dt\right)$.

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați termenul a_6 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, cu $a_1=3$ și $a_5=23$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-6x+8$. Determinați numărul real m, știind că punctul $A(m,-1)$ aparține graficului funcției f.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{2x-1}=9\cdot 3^{x+1}$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $A=\{1,2,3,4,5\}$. Determinați numărul submulțimilor nevide ale mulțimii A, care au cel mult două elemente.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,1)$ și $B(4,4)$. Determinați coordonatele punctului C, știind că $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BC}$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $AB=6$ și înălțimea $AD=3$. Arătați că raza cercului circumscris triunghiului ABC este egală cu $2\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x & x & x \\ 1 & x & 1 \\ -1 & -x & -1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=0$.

5p **b)** Arătați că $A(x)\cdot A(y)-A(xy)=(x+y-2)A(0)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale x și y pentru care $A(-1)\cdot A(3)\cdot A(x)=A(y)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^4+2X^3-8X^2+3mX+m$, unde m este număr real.

5p **a)** Pentru $m=2$, arătați că $f(1)=3$.

5p **b)** Pentru $m=0$, determinați rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Determinați numărul rațional m pentru care polinomul f are rădăcina $x_1=1+\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{3e^x}{x^2+x+1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{3e^x\left(x^2-x\right)}{\left(x^2+x+1\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(2x)}{f(x)}=+\infty$.

5p **c)** Demonstrați că ecuația $f(x)=m$ are exact trei soluții, pentru orice $m\in(e,3)$.

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=6x+\ln(x+1)$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2\left(f(x)-\ln(x+1)\right)dx=9$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^{e-1} \frac{f(x)-6x}{x+1}dx=\frac{1}{2}$.

5p **c)** Determinați numărul real a, știind că aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f\left(x^2\right)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$ este egală cu $a\pi+\ln 2$.

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați numerele reale a și b pentru care $(a+bi)(1+i)=4$, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx^2-2x+m$, unde m este număr real nenul. Determinați numerele reale m pentru care $f(m-x)=f(m+x)$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2\log_2(2x)-1=\log_2(x^2+x+2)$.

5p **4.** Se consideră mulțimile $A=\{1,2,3,4\}$ și $F=\{f\,|\,f:A\to A\}$. Determinați probabilitatea ca, alegând un element f din mulțimea F, acesta să verifice inegalitatea $f(n)\le n$, pentru orice $n\in A$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,3)$ și $B(-1,5)$. Determinați coordonatele punctului C, știind că $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{OC}$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, cu $AB=8$, măsura unghiului C de $30°$ și punctul O, centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Determinați distanța de la punctul O la latura AB.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 3 & a & -2 \\ 2a+1 & 1-a & -1 \\ a+2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} 3x+ay-2z=b \\ (2a+1)x+(1-a)y-z=c \\ (a+2)x-2y+z=-1 \end{cases}$, unde a, b și c sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=5$.

5p **b)** Determinați numerele reale a pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.

5p **c)** Determinați numerele reale b și c pentru care sistemul de ecuații este compatibil, oricare ar fi numărul real a.

2. Se consideră polinomul $f=X^4+aX^3+aX^2+8X-8$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(-1)=-15$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care restul împărțirii polinomului f la polinomul $g=X^2-1$ este egal cu $15X$.

5p **c)** Arătați că, pentru orice număr real a, polinomul f **nu** are toate rădăcinile numere întregi.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-x-(x^4-1)\operatorname{arctg}x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=-x^2(4x\operatorname{arctg}x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f care este paralelă cu axa Ox.

5p **c)** Demonstrați că $\operatorname{tg}(f(x))\ge f(x)\ge f(\operatorname{tg}x)$, pentru orice $x\in[0,1]$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+e^x}{1+e^{-x}}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^3\left(1+e^{-x}\right)f(x)\,dx=8+e^3$.

5p **b)** Arătați că $\displaystyle\int_{-m}^{m}\frac{f(x)}{x^2+e^x}\,dx=m$, pentru orice $m\in(0,+\infty)$.

5p **c)** Determinați numărul real nenul a pentru care $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^{ax}-1}\int_0^x f(t)\,dt\right)=1$.

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Se consideră numerele complexe $z_1 = 1 + 2i$ și $z_2 = 1 - i$. Arătați că $z_1^2 + 4z_2 = 1$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 1$ și $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + x + m$, unde m este număr real. Determinați numărul real m pentru care graficele funcțiilor f și g au exact un punct comun.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg\left(x^2 + 9\right) = 2\lg\left(x\sqrt{10}\right)$.

5p **4.** Se consideră mulțimea A, a numerelor naturale de cel mult două cifre. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea A, acesta să fie divizibil cu 9.

5p **5.** În triunghiul ABC, punctul M este mijlocul laturii AC, iar punctele D și E aparțin segmentului AB, astfel încât $AD = BE$. Arătați că $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} = \overrightarrow{CB}$.

5p **6.** Determinați $x \in [0, \pi]$ pentru care $\sin 2x = 1 + \cos 2x$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & a & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax + y + 2z = -2 \\ x + ay - z = 4 \\ 2x + 2y + z = 2 \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(0)\right) = 1$.

5p **b)** Determinați mulțimea numerelor reale a pentru care sistemul de ecuații are soluție unică.

5p **c)** Pentru $a = 1$, determinați soluțiile (x_0, y_0, z_0) ale sistemului pentru care x_0, y_0 și z_0 sunt numere întregi și $x_0 > y_0 > z_0$.

2. Pe mulțimea $M = [-1, 1]$ se definește legea de compoziție $x * y = \dfrac{xy}{1 + \sqrt{\left(1 - x^2\right)\left(1 - y^2\right)}}$.

5p **a)** Arătați că $1 * \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

5p **b)** Arătați că $x * (-x) \geq -x^2$, pentru orice $x \in M$.

5p **c)** Determinați perechile (a, b) de numere din mulțimea M pentru care $a * b = 1$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 1 - \ln\left(e^x + x^2\right)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x) = \dfrac{x(x-2)}{e^x + x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați numerele reale a pentru care tangenta la graficul funcției f în punctul de coordonate $\left(a, f(a)\right)$ este paralelă cu axa Ox.

5p **c)** Determinați imaginea funcției f.

2. Se consideră funcția $f:(-3,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x+3}}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^3 f(x)\sqrt{x+3}\,dx=12$.

5p **b)** Arătați că $\displaystyle\int_{-2}^1 \frac{f(x)}{x^2+1}\,dx=2$.

5p **c)** Demonstrați că $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,dx\le\frac{\pi}{2}$.

Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_2=\frac{a_1+a_3}{2}\Rightarrow 14=\frac{a_1+18}{2}$	**3p**
	$a_1=10$	**2p**
2.	$f(5)=7$	**2p**
	$(f\circ f)(5)=f(f(5))=f(7)=9$	**3p**
3.	$x^2+2x+1=1-x$, de unde obținem $x^2+3x=0$	**3p**
	$x=-3$ sau $x=0$	**2p**
4.	Cifra unităților se poate alege în 4 moduri	**2p**
	Pentru fiecare alegere a cifrei unităților, cifra zecilor se poate alege în câte 4 moduri, deci se pot forma $4\cdot 4=16$ numere	**3p**
5.	$\overrightarrow{OA}=2\vec{i}+\vec{j}$, $\overrightarrow{AB}=(x_B-2)\vec{i}+(y_B-1)\vec{j}$, unde $B(x_B,y_B)$	**3p**
	$(x_B-2)\vec{i}+(y_B-1)\vec{j}=4\vec{i}+2\vec{j}$, de unde obținem $x_B=6$ și $y_B=3$	**2p**
6.	$AB=6$, $AC=6\sqrt{3}$	**2p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{6\cdot 6\sqrt{3}}{2}=18\sqrt{3}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$B(1)=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(B(1))=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=2+0+0-0-2-0=0$	**3p**
b)	$B(x)\cdot B(y)-B(x+y)=\begin{pmatrix}2^{x+y}&0&0\\0&1+xy&y+x\\0&x+y&xy+1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2^{x+y}&0&0\\0&1&x+y\\0&x+y&1\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&xy&0\\0&0&xy\end{pmatrix}=xyA$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
c)	$B(x)\cdot B(x+1)=B(2x+1)+(x^2+x)A$, $B(2x)\cdot B(1)=B(2x+1)+2xA$, de unde obținem $B(x)\cdot B(x+1)-B(2x)\cdot B(1)=(x^2-x)A$, pentru orice număr real x	**3p**
	$(x^2-x)A=xA$, de unde obținem $x=0$ sau $x=2$	**2p**
2.a)	$f(1)=1^3+a\cdot 1^2+1+2-a=$	**3p**
	$=1+a+1+2-a=4$, pentru orice număr real a	**2p**

b)	$f=X^3+2X^2+X=X\left(X^2+2X+1\right)$	**2p**
	Rădăcinile polinomului sunt $x_1=x_2=-1$ și $x_3=0$	**3p**
c)	$x_1x_2x_3=-2+a$, $\left(x_1-x_1^2\right)\left(x_2-x_2^2\right)\left(x_3-x_3^2\right)=x_1x_2x_3(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)=(-2+a)f(1)$	**3p**
	$4(-2+a)=4$, de unde obținem $a=3$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(x^2-2\right)'e^{2x}+\left(x^2-2\right)\left(e^{2x}\right)'=$	**2p**
	$=2xe^{2x}+\left(x^2-2\right)\cdot 2e^{2x}=2e^{2x}\left(x^2+x-2\right)$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{f'(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-2}{2\left(x^2+x-2\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\left(1-\dfrac{2}{x^2}\right)}{2x^2\left(1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\dfrac{2}{x^2}}{2\left(1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)}=\dfrac{1}{2}$	**2p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-2$ sau $x=1$; pentru orice $x\in(-\infty,-2]$, $f'(x)\geq 0$, deci f este crescătoare pe $(-\infty,-2]$; pentru orice $x\in[-2,1]$, $f'(x)\leq 0$, deci f este descrescătoare pe $[-2,1]$ și pentru orice $x\in[1,+\infty)$, $f'(x)\geq 0$, deci f este crescătoare pe $[1,+\infty)$	**3p**
	Cum $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, $f(1)=-e^2$ și f este continuă, imaginea funcției f este $\left[-e^2,+\infty\right)$	**2p**
2.a)	$\int_{-1}^{1}\left(f(x)-6x^2\right)dx=\int_{-1}^{1}\left(x^4+1\right)dx=\left(\dfrac{x^5}{5}+x\right)\Big\vert_{-1}^{1}=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{5}+1+\dfrac{1}{5}+1=\dfrac{12}{5}$	**2p**
b)	$\int_{1}^{6}\dfrac{x^3}{f(x)-1}dx=\int_{1}^{6}\dfrac{x}{x^2+6}dx=\dfrac{1}{2}\int_{1}^{6}\dfrac{\left(x^2+6\right)'}{x^2+6}dx=\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+6\right)\Big\vert_{1}^{6}=$	**3p**
	$=\dfrac{\ln 42}{2}-\dfrac{\ln 7}{2}=\dfrac{\ln 6}{2}$	**2p**
c)	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^3}\int_{0}^{x}\left(f(2t)-f(t)\right)dt\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\int_{0}^{x}\left(f(2t)-f(t)\right)dt\right)'}{\left(x^3\right)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)-f(x)}{3x^2}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{15x^4+18x^2}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left(5x^2+6\right)=6$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_2=\frac{a_1+a_3}{2}\Rightarrow 12=\frac{2+a_3}{2}$	**3p**
	$a_3=22$	**2p**
2.	$f(1+m)=m-7$, pentru orice număr real m	**2p**
	$m-7=1-m$, de unde obținem $m=4$	**3p**
3.	$x^2-3x+5=5$, de unde obținem $x^2-3x=0$	**3p**
	$x=0$ sau $x=3$, care convin	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 7 numere n pentru care numărul $\sqrt{n+1}$ este natural, deci sunt 7 cazuri favorabile, de unde obținem $p=\frac{7}{90}$	**3p**
5.	$m_{OA}=2$	**2p**
	$m_{BC}=\frac{a}{2}$ și, cum $m_{OA}=m_{BC}$, obținem $a=4$	**3p**
6.	$\text{tg}B=\frac{AC}{AB}$, deci $\sqrt{3}=\frac{9}{AB}$	**3p**
	$AB=\frac{9}{\sqrt{3}}=3\sqrt{3}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2)=\begin{pmatrix}1&2&2\\0&0&1\\2&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(2))=\begin{vmatrix}1&2&2\\0&0&1\\2&1&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+0+4-0-1-0=3$	**3p**
b)	$A(1)=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}$, $A(x)\cdot A(1)=\begin{pmatrix}1+x&1+x&1+x\\x-1&x-1&x-1\\x+1&x+1&x+1\end{pmatrix}$, pentru orice număr real x	**3p**
	$\begin{pmatrix}1+x&1+x&1+x\\x-1&x-1&x-1\\x+1&x+1&x+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2x&2x\\0&0&2x-2\\2x&2&2\end{pmatrix}$, de unde obținem $x=1$	**2p**
c)	$\det(A(x))=(x-1)^2(x+1)$ și $\det(A(x))\neq 0$, deci $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$	**3p**
	Cum $-x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, obținem $\det(A(-x))\neq 0$, deci $A(-x)$ este inversabilă	**2p**
2.a)	$1\circ 1=1\cdot 1+\frac{2\cdot 1+2\cdot 1-1}{4}=$	**3p**
	$=1+\frac{3}{4}=\frac{7}{4}$	**2p**

b)	$x\circ\frac{1}{2}=x\cdot\frac{1}{2}+\frac{2x+2\cdot\frac{1}{2}-1}{4}=\frac{x}{2}+\frac{x}{2}=x$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\frac{1}{2}\circ x=\frac{1}{2}\cdot x+\frac{2\cdot\frac{1}{2}+2x-1}{4}=\frac{x}{2}+\frac{x}{2}=x$, pentru orice număr real x, deci $e=\frac{1}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”	**3p**
c)	$\left(\frac{1}{2}-x\right)\circ\left(\frac{1}{2}+x\right)=\frac{1}{2}-x^2$, $\left(\frac{1}{2}-x\right)\circ\left(\frac{1}{2}+x\right)\circ\left(\frac{1}{2}+x^2\right)=\frac{1}{2}-x^4$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\frac{1}{2}-x^4=\frac{1}{2}-x^2$, de unde obținem $x=-1$ sau $x=0$ sau $x=1$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{12x^2(x-1)^2-4x^3\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}=$	**3p**
	$=\frac{12x^3-12x^2-8x^3}{(x-1)^3}=\frac{4x^2(x-3)}{(x-1)^3}$, $x\in(1,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x^2}{(x-1)^2}=4$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-4x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{8x^2-4x}{(x-1)^2}=8$, deci dreapta de ecuație $y=4x+8$ este asimptota oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	**3p**
c)	$f'(x)=0\Rightarrow x=3$; $f'(x)<0$, pentru orice $x\in(1,3)$, deci f este strict descrescătoare pe $(1,3)$ și $f'(x)>0$, pentru orice $x\in(3,+\infty)$, deci f este strict crescătoare pe $(3,+\infty)$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to1}f(x)=+\infty$, $f(3)=27$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ și f este continuă, deci ecuația $f(x)=m$ are exact două soluții pentru orice $m\in(27,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\int_1^3(f(x)-x\ln x)dx=\int_1^3(x+1)dx=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big\vert_1^3=$	**3p**
	$=\frac{15}{2}-\frac{3}{2}=6$	**2p**
b)	$\int_1^e(f(x)-x-1)dx=\int_1^e\left(\frac{x^2}{2}\right)'\ln x dx=\frac{x^2}{2}\ln x\Big\vert_1^e-\frac{x^2}{4}\Big\vert_1^e=$	**3p**
	$=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{e^2+1}{4}$	**2p**
c)	$g(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$, $x\in[1,3]$, deci $V=\pi\int_1^3 g^2(x)dx=\pi\int_1^3\frac{1}{(x+1)^4}dx=\pi\left(-\frac{1}{3(x+1)^3}\right)\Big\vert_1^3=\frac{7\pi}{192}$	**3p**
	$\frac{7\pi}{192}=\frac{7\pi}{24a}$, de unde obținem $a=8$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2\lg 100+\lg 2+\lg 5=2\cdot 2+\lg 10=$	**3p**
	$=4+1=5$	**2p**
2.	$f(a)=a-6$, $f(3a)=3a-6$	**3p**
	$a-6+3a-6=0$, de unde obținem $a=3$	**2p**
3.	$5^{3x+2}=5^x$, de unde obținem $3x+2=x$	**3p**
	$x=-1$	**2p**
4.	În mulțimea A sunt 4 numere pare	**2p**
	Sunt $C_4^2=\dfrac{4!}{2!\cdot 2!}=6$ submulțimi cu două elemente, ambele numere pare	**3p**
5.	$\overrightarrow{AC}=(x_C-3)\vec{i}+(y_C-1)\vec{j}$, $\overrightarrow{OB}=3\vec{i}$	**3p**
	$(x_C-3)\vec{i}+(y_C-1)\vec{j}=3\vec{i}$, de unde obținem $x_C=6$ și $y_C=1$	**2p**
6.	$AB=AC$	**2p**
	$\dfrac{AB\cdot AB}{2}=18$, deci $AB^2=36$, de unde obținem $AB=6$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$M(1)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&1\\0&2&3\end{pmatrix}\Rightarrow \det(M(1))=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&3&1\\0&2&3\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=9+0+0-0-0-2=7$	**3p**
b)	$M(2)=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&2\\0&4&4\end{pmatrix}$, $M(x)\cdot M(2)=\begin{pmatrix}2x&0&0\\0&8x+8&6x+4\\0&12x+8&8x+8\end{pmatrix}$, pentru orice număr real x	**3p**
	$\begin{pmatrix}2x&0&0\\0&8x+8&6x+4\\0&12x+8&8x+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-1&0&0\\0&x+1&x-1\\0&2x-2&x+1\end{pmatrix}$, de unde obținem $x=-1$	**2p**
c)	$\det(M(n))=n\left(-n^2+4n+4\right)$, $\det(M(2n))=2n\left(-4n^2+8n+4\right)$, pentru orice număr natural n	**2p**
	$2n\left(-n^2+4n+4\right)\le 2n\left(-4n^2+8n+4\right)$, de unde obținem $n^2(3n-4)\le 0$ și, cum n este număr natural, obținem $n=0$ și $n=1$	**3p**
2.a)	$f(2)=2^3-2\cdot 2^2-a\cdot 2+2a=$	**3p**
	$=8-8-2a+2a=0$, pentru orice număr real a	**2p**

b)	$f=X^3-2X^2-X+2\Rightarrow f(-1)=(-1)^3-2(-1)^2-(-1)+2=$	**3p**
	$=-1-2+1+2=0$, deci polinomul f este divizibil cu polinomul $g=X+1$	**2p**
c)	$f=(X-2)\left(X^2-a\right)$; $x_1=2$ și $\lvert x_2\rvert=\lvert x_3\rvert=\sqrt{a}$, deci $\lvert x_1\rvert+\lvert x_2\rvert+\lvert x_3\rvert=2+2\sqrt{a}$	**3p**
	$2+2\sqrt{a}=8$, de unde obținem $a=9$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=e^x(2x-4)+2e^x+2x-2=$	**3p**
	$=e^x(2x-2)+2x-2=2(x-1)\left(e^x+1\right)$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	Cum $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$, rezultă $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{1-e^x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{\left(1-e^x\right)'}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2(x-1)\left(e^x+1\right)}{-e^x}=4$	**2p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$; pentru orice $x\in(-\infty,1)$, $f'(x)<0$, deci f este strict descrescătoare pe $(-\infty,1)$ și, pentru orice $x\in(1,+\infty)$, $f'(x)>0$, deci f este strict crescătoare pe $(1,+\infty)$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$, $f(1)=3-2e<0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ și f este continuă, deci ecuația $f(x)=0$ are exact două soluții	**3p**
2.a)	$\int_3^4 f(x)\left(3x^2+1\right)dx=\int_3^4 4xdx=2x^2\Big\rvert_3^4=$	**3p**
	$=32-18=14$	**2p**
b)	$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\dfrac{4x}{3x^2+1}dx=\dfrac{2}{3}\int_0^1\dfrac{\left(3x^2+1\right)'}{3x^2+1}dx=\dfrac{2}{3}\ln\left(3x^2+1\right)\Big\rvert_0^1=$	**3p**
	$=\dfrac{2}{3}\ln4-\dfrac{2}{3}\ln1=\dfrac{4}{3}\ln2$	**2p**
c)	$g(x)=\dfrac{\left(3x^2+1\right)\ln x}{x}$, $x\in(0,+\infty)$, deci $\mathcal{A}=\int_1^e\lvert g(x)\rvert dx=\int_1^e\left(3x+\dfrac{1}{x}\right)\ln xdx=\int_1^e\left(\dfrac{3x^2}{2}\right)'\ln xdx+$	**3p**
	$+\dfrac{\ln^2x}{2}\Big\rvert_1^e=$	
	$=3\left(\dfrac{x^2\ln x}{2}-\dfrac{x^2}{4}\right)\Big\rvert_1^e+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3e^2}{4}+\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3e^2+5}{4}$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2(1-2i)+i(4+i)=2-4i+4i+i^2=$	**3p**
	$=2+(-1)=1$	**2p**
2.	$f(3)=-3\Rightarrow 9+3a-a=-3$	**3p**
	$a=-6$	**2p**
3.	$x^2+8=8-2x$, de unde obținem $x^2+2x=0$	**3p**
	$x=-2$ sau $x=0$, care convin	**2p**
4.	Cifra zecilor se poate alege în 2 moduri	**2p**
	Pentru fiecare alegere a cifrei zecilor, cifra unităților se poate alege în câte 4 moduri, deci se pot forma $2\cdot 4=8$ numere	**3p**
5.	$\overrightarrow{OA}=3\vec{j}$, $\overrightarrow{OB}=4\vec{i}$	**2p**
	$\overrightarrow{OC}=4\vec{i}+3\vec{j}$, deci punctul C are coordonatele $(4,3)$	**3p**
6.	$DC=4$	**2p**
	$BD=3$, deci $BC=BD+DC=3+4=7$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&-1&1\\1&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}0&0&1\\1&-1&1\\1&0&0\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+0+0-(-1)-0-0=1$	**3p**
b)	$A(a)\cdot A(b)=\begin{pmatrix}1&0&0\\-b+a&1&a-b\\0&0&1\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}0&0&0\\a-b&0&a-b\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=A(a)-A(b)+I_3$, pentru orice numere reale a și b	**2p**
c)	$(A(1))^{-1}=A(1)$, $(A(0))^{-1}=A(0)$	**2p**
	$X=(A(1))^{-1}\cdot(A(0))^{-1}$, de unde obținem $X=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$	**3p**
2.a)	$3\circ 5=m(3-3)(5-3)+3=$	**3p**
	$=m\cdot 0\cdot 2+3=3$, pentru orice $m\in(0,+\infty)$	**2p**

b)	$x\circ\frac{7}{2}=2\left(x-3\right)\left(\frac{7}{2}-3\right)+3=x-3+3=x$, pentru orice $x\in M$	**2p**
	$\frac{7}{2}\circ x=2\left(\frac{7}{2}-3\right)\left(x-3\right)+3=x-3+3=x$, pentru orice $x\in M$, deci $e=\frac{7}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”	**3p**
c)	$f\left(x\circ y\right)=3+\sqrt{\left(x-3\right)\left(y-3\right)+3-3}=3+\sqrt{\left(x-3\right)\left(y-3\right)}=$	**2p**
	$=3+\left(3+\sqrt{x-3}-3\right)\left(3+\sqrt{y-3}-3\right)=\left(f\left(x\right)-3\right)\left(f\left(y\right)-3\right)+3=f\left(x\right)\circ f\left(y\right)$, pentru orice $x,y\in M$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'\left(x\right)=1-\frac{-e^{-x}\left(x-1\right)-e^{-x}}{\left(x-1\right)^2}=$	**3p**
	$=1+\frac{xe^{-x}}{\left(x-1\right)^2}=\frac{\left(x-1\right)^2+xe^{-x}}{\left(x-1\right)^2}$, $x\in\left(1,+\infty\right)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{e^{-x}}{x\left(x-1\right)}\right)=1$	**3p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f\left(x\right)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{e^{-x}}{x-1}\right)=0$, deci dreapta de ecuație $y=x$ este asimptota oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	$f'\left(x\right)>0$, pentru orice $x\in\left(1,+\infty\right)\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $\left(1,+\infty\right)$, deci f este injectivă	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to1}f\left(x\right)=-\infty$ și f este continuă, deci f este surjectivă, de unde obținem că f este bijectivă	**3p**
2.a)	$\int_1^3 f\left(x\right)\left(x^2+1\right)^2dx=\int_1^3 xdx=\frac{x^2}{2}\Big\vert_1^3=$	**3p**
	$=\frac{9}{2}-\frac{1}{2}=4$	**2p**
b)	$\int_0^1 f\left(x\right)dx=\int_0^1\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2}dx=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$	**2p**
c)	$I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{xf\left(x\right)}dx=\int_0^1\frac{x^{n+1}}{x^2+1}dx$, pentru orice număr natural nenul n	**2p**
	$I_n-I_{n+4}=\int_0^1\frac{x^{n+1}\left(1-x^4\right)}{x^2+1}dx=\int_0^1 x^{n+1}\left(1-x^2\right)dx=\frac{x^{n+2}}{n+2}\Big\vert_0^1-\frac{x^{n+4}}{n+4}\Big\vert_0^1=\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+4}=$ $=\frac{2}{\left(n+2\right)\left(n+4\right)}$, pentru orice număr natural nenul n	**3p**

Examenul național de bacalaureat 2024

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(3+\lg\frac{1}{10}\right)\cdot\lg\sqrt{10}=2\cdot\lg\sqrt{10}=$	**3p**
	$=2\cdot\frac{1}{2}=1$	**2p**
2.	$f(1)=a$, $(f\circ f)(1)=2a^2-1$	**2p**
	$2a^2-1=1$, de unde obținem $a=-1$ sau $a=1$	**3p**
3.	$2^{x+1}\cdot 2^{3x}=32$, deci $2^{4x+1}=2^5$, de unde obținem $4x+1=5$	**3p**
	$x=1$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Cum $110\le n+100\le 199$ și $n+100$ este pătratul unui număr natural, obținem 4 numere: 21, 44, 69 și 96, deci $p=\frac{4}{90}=\frac{2}{45}$	**3p**
5.	$\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\left(3\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{i}-2\vec{j}\right)=3\vec{i}$	**3p**
	Coordonatele punctului D sunt $x_D=3$ și $y_D=0$	**2p**
6.	$\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$, $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$	**3p**
	$E\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}-4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\sqrt{3}-\sqrt{3}=0$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A(0)\right)=\begin{vmatrix}1&-1&0\\-1&0&0\\0&0&-1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+0+0-0-0-(-1)=1$	**3p**
b)	$A(x)\cdot A(x)=\begin{pmatrix}2+x^2&-1&0\\-1&1&-x\\0&-x&x^2+1\end{pmatrix}$, $A(x)\cdot A(x)-I_3=\begin{pmatrix}1+x^2&-1&0\\-1&0&-x\\0&-x&x^2\end{pmatrix}$	**3p**
	$\det\left(A(x)\cdot A(x)-I_3\right)=-x^2\left(1+x^2\right)-x^2=-x^2\left(2+x^2\right)\le 0$, pentru orice număr real x	**2p**
c)	$X=B\cdot A(0)\cdot A(0)$	**2p**
	$X=\begin{pmatrix}2&-1&1\\-1&1&0\end{pmatrix}$	**3p**

2.a)	$1*2=\dfrac{1^2+2^2+1+2}{1+2+1}=$	**3p**
	$=\dfrac{8}{4}=2$	**2p**
b)	$x*0=\dfrac{x^2+0^2+x+0}{x+0+1}=\dfrac{x(x+1)}{x+1}=x$, pentru orice $x\in M$	**2p**
	$0*x=\dfrac{0^2+x^2+0+x}{0+x+1}=\dfrac{x(x+1)}{x+1}=x$, pentru orice $x\in M$, deci $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**3p**
c)	$\dfrac{m^2+n^2+m+n}{m+n+1}=5$, de unde obținem $(m-2)^2+(n-2)^2=13$	**3p**
	Cum m și n sunt numere naturale, obținem perechile $(0,5)$, $(4,5)$, $(5,0)$ și $(5,4)$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\sqrt{x^2+4}+(x+6)\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+4}}=$	**3p**
	$=\dfrac{2x^2+6x+4}{\sqrt{x^2+4}}=\dfrac{2(x^2+3x+2)}{\sqrt{x^2+4}}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-2$ sau $x=-1$	**2p**
	$f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in(-\infty,-2]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $(-\infty,-2]$, $f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in[-2,-1]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[-2,-1]$ și $f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[-1,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[-1,+\infty)$	**3p**
c)	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $f(-2)=\sqrt{128}$, $f(-1)=\sqrt{125}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, f este continuă și $11<\sqrt{125}<\sqrt{128}<12$	**3p**
	Cum f este strict crescătoare pe $(-\infty,-2)$, f este descrescătoare pe $[-2,-1]$ și f este strict crescătoare pe $(-1,+\infty)$, obținem că ecuația $f(x)=m$ are soluție unică, pentru orice număr întreg m	**2p**
2.a)	$\int_0^4 e^x f(x)\,dx=\int_0^4(x+1)\,dx=\left(\dfrac{x^2}{2}+x\right)\Big\vert_0^4=$	**3p**
	$=8+4=12$	**2p**
b)	$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1(x+1)\left(-e^{-x}\right)'dx=(x+1)\left(-e^{-x}\right)\Big\vert_0^1-e^{-x}\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=-\dfrac{2}{e}+1-\dfrac{1}{e}+1=\dfrac{2e-3}{e}$	**2p**
c)	$I_n=\int_0^1\dfrac{x^{n-1}e^{x^n}}{x^n+1}dx=\dfrac{1}{n}\int_0^1\dfrac{(x^n)'e^{x^n}}{x^n+1}dx=\dfrac{1}{n}\int_0^1\dfrac{e^t}{t+1}dt$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$	**3p**
	$I_n\geq\dfrac{1}{n}\int_0^1\dfrac{1}{t+1}dt=\dfrac{1}{n}\ln(t+1)\Big\vert_0^1=\dfrac{\ln 2}{n}$, pentru orice număr natural nenul n, $n\geq 2$ și $I_n\leq\dfrac{1}{n}\int_0^1 e^t\,dt=\dfrac{e-1}{n}$, pentru orice număr natural nenul n, $n\geq 2$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați termenul a_1 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, cu $a_2=14$ și $a_3=18$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2$. Arătați că $(f\circ f)(5)=9$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{x^2+2x+1}=\sqrt[3]{1-x}$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale impare, de două cifre distincte, se pot forma cu elementele mulțimii $A=\{1,2,3,7,9\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(2,1)$. Determinați coordonatele punctului B pentru care $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{OA}$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $BC=12$ și $AB=\frac{BC}{2}$. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu $18\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}2^x&0&0\\0&1&x\\0&x&1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(B(1))=0$.

5p **b)** Arătați că $B(x)\cdot B(y)-B(x+y)=xyA$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $B(x)\cdot B(x+1)-B(2x)\cdot B(1)=xA$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+aX^2+X+2-a$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(1)=4$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Pentru $a=2$, determinați rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $\left(x_1-x_1^2\right)\left(x_2-x_2^2\right)\left(x_3-x_3^2\right)=4$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(x^2-2\right)e^{2x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=2e^{2x}\left(x^2+x-2\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

5p **c)** Determinați imaginea funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4+6x^2+1$.

5p **a)** Arătați că $\int_{-1}^{1}\left(f(x)-6x^2\right)dx=\dfrac{12}{5}$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^6 \frac{x^3}{f(x)-1}dx = \frac{\ln 6}{2}$.

5p **c)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^3}\int_0^x \left(f(2t)-f(t)\right)dt\right) = 6$.

Examenul național de bacalaureat 2024

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați termenul a_3 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, în care $a_1=2$ și $a_2=12$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-8$. Determinați numărul real m pentru care $f(1+m)=1-m$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg(x^2-3x+5)=\lg 5$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale de două cifre, numărul $\sqrt{n+1}$ să fie natural.

5p **5.** În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,2)$, $B(3,0)$ și $C(5,a)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, știind că dreptele OA și BC sunt paralele.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $AC=9$ și $B=\frac{\pi}{3}$. Arătați că $AB=3\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x & x\\ 0 & 0 & x-1\\ x & 1 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(2))=3$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $A(x)\cdot A(1)=2A(x)$.

5p **c)** Arătați că, dacă matricea $A(x)$ este inversabilă, atunci și matricea $A(-x)$ este inversabilă.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=xy+\frac{2x+2y-1}{4}$.

5p **a)** Arătați că $1\circ 1=\frac{7}{4}$.

5p **b)** Arătați că $e=\frac{1}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $\left(\frac{1}{2}-x\right)\circ\left(\frac{1}{2}+x\right)\circ\left(\frac{1}{2}+x^2\right)=\frac{1}{2}-x^2$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{4x^3}{(x-1)^2}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{4x^2(x-3)}{(x-1)^3}$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Arătați că ecuația $f(x)=m$ are exact două soluții, pentru orice $m\in(27,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1+x\ln x$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^3 \left(f(x)-x\ln x\right)dx=6$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^e \left(f(x)-x-1\right)dx=\frac{e^2+1}{4}$.

5p **c)** Determinați numărul real nenul a pentru care volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,3]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{1}{\left(f(x)-x\ln x\right)^2}$ este egal cu $\frac{7\pi}{24a}$.

Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $2\lg 100+\lg 2+\lg 5=5$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-6$. Determinați numărul real a pentru care $f(a)+f(3a)=0$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{3x}\cdot 5^2=5^x$.

5p **4.** Determinați câte submulțimi cu două elemente, ambele numere pare, are mulțimea $A=\{1,2,4,6,8,9\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,1)$ și $B(3,0)$. Determinați coordonatele punctului C pentru care $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu aria egală cu 18 și $B=\frac{\pi}{4}$. Arătați că $AB=6$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $M(x)=\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x+2 & x \\ 0 & 2x & x+2 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(M(1))=7$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $M(x)\cdot M(2)=M(x-1)$.

5p **c)** Determinați numerele naturale n pentru care $2\det(M(n))\le\det(M(2n))$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-2X^2-aX+2a$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(2)=0$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Pentru $a=1$, arătați că polinomul f este divizibil cu polinomul $g=X+1$.

5p **c)** Determinați $a\in(0,+\infty)$ pentru care $|x_1|+|x_2|+|x_3|=8$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x(2x-4)+x^2-2x+4$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=2(x-1)(e^x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-e^x}=4$.

5p **c)** Arătați că ecuația $f(x)=0$ are exact două soluții.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{4x}{3x^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_3^4 f(x)(3x^2+1)\,dx=14$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{4}{3}\ln 2$.

5p **c)** Arătați că aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{4\ln x}{f(x)}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=e$ este egală cu $\frac{3e^2+5}{4}$.

Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $2(1-2i)+i(4+i)=1$, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+ax-a$, unde a este număr real. Determinați numărul real a pentru care punctul $A(3,-3)$ aparține graficului funcției f.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2\left(x^2+8\right)=\log_2(8-2x)$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale de două cifre distincte, cu cifra zecilor pară, se pot forma cu elementele mulțimii $A=\{1,2,3,4,5\}$.

5p **5.** În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,3)$ și $B(4,0)$. Determinați coordonatele punctului C pentru care $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC, cu $AB=5$, $C=\frac{\pi}{4}$ și înălțimea $AD=4$. Arătați că $BC=7$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}0&0&1\\a&-1&a\\1&0&0\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=1$.

5p **b)** Arătați că $A(a)\cdot A(b)=A(a)-A(b)+I_3$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pentru care $A(1)\cdot X\cdot A(0)=I_3$.

2. Pe mulțimea $M=[3,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x\circ y=m(x-3)(y-3)+3$, unde $m\in(0,+\infty)$.

5p **a)** Arătați că $3\circ 5=3$, pentru orice $m\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Pentru $m=2$, arătați că $e=\frac{7}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

5p **c)** Se consideră funcția $f:M\to M$, $f(x)=3+\sqrt{x-3}$. Pentru $m=1$, arătați că $f(x\circ y)=f(x)\circ f(y)$, pentru orice $x,y\in M$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\frac{e^{-x}}{x-1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{(x-1)^2+xe^{-x}}{(x-1)^2}$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este bijectivă.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{\left(x^2+1\right)^2}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_1^3 f(x)\left(x^2+1\right)^2\,dx=4$.

5p **b)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{4}$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\displaystyle\int_0^1 x^n\sqrt{xf(x)}\,dx$. Arătați că $I_n-I_{n+4}=\dfrac{2}{(n+2)(n+4)}$, pentru orice număr natural nenul n.

Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\left(3+\lg\frac{1}{10}\right)\cdot\lg\sqrt{10}=1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+ax-1$, unde a este număr real. Determinați numerele reale a pentru care $(f\circ f)(1)=1$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{x+1}\cdot 8^x=32$.

5p **4.** Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale de două cifre, numărul $\sqrt{n+100}$ să fie natural.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,4)$, $B(4,6)$ și $C(4,2)$. Determinați coordonatele punctului D, știind că $\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$.

5p **6.** Se consideră expresia $E(x)=\operatorname{tg}x-4\cos\frac{x}{2}\cdot\cos x$, unde $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}1&-1&x\\-1&0&0\\x&0&-1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=1$.

5p **b)** Arătați că $\det(A(x)\cdot A(x)-I_3)\le 0$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Se consideră matricea $B\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, $B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$. Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ pentru care $X\cdot(A(0))^{-1}=B\cdot A(0)$, unde $(A(0))^{-1}$ este inversa matricei $A(0)$.

2. Pe mulțimea $M=[0,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x*y=\frac{x^2+y^2+x+y}{x+y+1}$.

5p **a)** Arătați că $1*2=2$.

5p **b)** Arătați că $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere naturale pentru care $m*n=5$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+6)\sqrt{x^2+4}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{2(x^2+3x+2)}{\sqrt{x^2+4}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

5p **c)** Demonstrați că ecuația $f(x)=m$ are soluție unică, pentru orice număr întreg m.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+1}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^4 e^x f(x)\,dx=12$.

5p **b)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=\dfrac{2e-3}{e}$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural n, $n\geq 2$, se consideră numărul $I_n=\displaystyle\int_0^1 \dfrac{x^{n-1}}{f\left(x^n\right)}\,dx$. Demonstrați că $\dfrac{\ln 2}{n}\leq I_n\leq\dfrac{e-1}{n}$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$.

Examenul de bacalaureat naţional 2017

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z_1z_2+2z_1+z_2=(2+3i)(4-6i)+2(2+3i)+4-6i=$	**2p**
	$=8-12i+12i-18i^2+4+6i+4-6i=34$, care este număr real	**3p**
2.	$g(0)=1$	**2p**
	$(f\circ g)(0)=f(g(0))=f(1)=1$	**3p**
3.	$x^2-4=5x-8\Rightarrow x^2-5x+4=0$	**3p**
	$x=1$, care nu verifică ecuaţia; $x=4$, care verifică ecuaţia	**2p**
4.	Sunt 90 de numere naturale de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	Sunt 13 numere naturale de două cifre, multipli de 7, deci sunt 13 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{13}{90}$	**2p**
5.	Dreapta paralelă cu dreapta d are panta egală cu 3	**2p**
	Ecuaţia paralelei duse prin punctul A la dreapta d este $y=3x-3$	**3p**
6.	$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)\sin x+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)\cos x=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x-x\right)=$	**3p**
	$=\cos\dfrac{\pi}{2}=0$, pentru orice număr real x	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2)=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(2))=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=4$	**3p**
b)	$A(x)+B(x)=\begin{pmatrix}x&0&x\\0&2x&0\\2&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(x)+B(x))=\begin{vmatrix}x&0&x\\0&2x&0\\2&0&1\end{vmatrix}=2x^2-4x^2=$	**3p**
	$=-2x^2=\det(B(x))$, pentru orice număr real x	**2p**
c)	$A(n)B(p)=\begin{pmatrix}n&0&0\\0&n&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&p\\0&p&0\\2&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&np\\0&np&0\\2&0&0\end{pmatrix}$, $B(3)=\begin{pmatrix}0&0&3\\0&3&0\\2&0&0\end{pmatrix}$	**2p**
	$A(n)B(p)=B(3)\Leftrightarrow np=3$ şi, cum n şi p sunt numere naturale, obţinem $n=1$, $p=3$ sau $n=3$, $p=1$	**3p**
2.a)	$f(1)=0\Leftrightarrow 1^3+a\cdot 1^2+8\cdot 1+3=0$	**2p**
	$a=-12$	**3p**

b)	$a=6\Rightarrow f=X^3+6X^2+8X+3$ şi câtul este $X+1$	**3p**
	Restul este 0	**2p**
c)	$x_1+x_2+x_3=-a$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=8\Rightarrow x_1^2+x_2^2+x_3^2=a^2-16$	**3p**
	Pentru $a\in(-4,4)$, obţinem $a^2-16<0$, deci $x_1^2+x_2^2+x_3^2<0$, adică polinomul f nu are toate rădăcinile reale	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(x^{2018}\right)'+(2018x)'+2'=$	**2p**
	$=2018x^{2017}+2018=2018\left(x^{2017}+1\right)$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	Ecuaţia tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)$, adică $y=2018x+2$	**3p**
	$2020=2018a+2\Leftrightarrow a=1$	**2p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1$	**2p**
	Cum $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$, $f(-1)=-2015$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, ecuaţia $f(x)=0$ are exact două soluţii reale distincte	**3p**
2.a)	$\int_0^1\left(x^2+2x+2\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+2\cdot\frac{x^2}{2}+2x\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=\frac{1}{3}+1+2=\frac{10}{3}$	**2p**
b)	$I_{n+1}+2I_n+2I_{n-1}=\int_0^1\frac{x^{n+1}+2x^n+2x^{n-1}}{x^2+2x+2}dx=$	**2p**
	$=\int_0^1\frac{x^{n-1}\left(x^2+2x+2\right)}{x^2+2x+2}dx=\int_0^1x^{n-1}dx=\frac{x^n}{n}\Big\vert_0^1=\frac{1}{n}$, pentru orice număr natural n, $n\geq2$	**3p**
c)	$I_{n+1}-I_n=\int_0^1\frac{x^n(x-1)}{x^2+2x+2}dx\leq0$, deci $I_{n+1}\leq I_n$, pentru orice număr natural nenul n	**1p**
	$5I_{n+1}\leq I_{n+1}+2I_n+2I_{n-1}\leq5I_{n-1}\Rightarrow5I_{n+1}\leq\frac{1}{n}\leq5I_{n-1}$, pentru orice număr natural n, $n\geq2$	**2p**
	Pentru orice număr natural n, $n\geq2$, $\frac{n}{5(n+1)}\leq nI_n\leq\frac{n}{5(n-1)}$, deci $\lim\limits_{n\to+\infty}nI_n=\frac{1}{5}$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2017
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numerele complexe $z_1=2+3i$ şi $z_2=4-6i$. Arătaţi că numărul $z_1z_2+2z_1+z_2$ este real.

5p **2.** Calculaţi $(f\circ g)(0)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2+x+1$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_5(x^2-4)=\log_5(5x-8)$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie multiplu de 7.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuaţie $y=3x-2017$ şi punctul $A(1,0)$. Determinaţi ecuaţia paralelei duse prin punctul A la dreapta d.

5p **6.** Arătaţi că $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\sin x+\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\cos x=0$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A(x)=\begin{pmatrix}x&0&0\\0&x&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi $B(x)=\begin{pmatrix}0&0&x\\0&x&0\\2&0&0\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Calculaţi $\det(A(2))$.

5p **b)** Demonstraţi că $\det(A(x)+B(x))=\det(B(x))$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinaţi numerele naturale n şi p, ştiind că $A(n)B(p)=B(3)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+aX^2+8X+3$, unde a este număr real.

5p **a)** Determinaţi numărul real a, ştiind că $f(1)=0$.

5p **b)** Pentru $a=6$, determinaţi câtul şi restul împărţirii polinomului f la polinomul X^2+5X+3.

5p **c)** Demonstraţi că, dacă $a\in(-4,4)$, atunci polinomul f **nu** are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{2018}+2018x+2$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=2018\left(x^{2017}+1\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi numărul real a, ştiind că punctul $A(a,2020)$ aparţine tangentei la graficul funcţiei f care trece prin punctul de abscisă $x=0$ situat pe graficul funcţiei f.

5p **c)** Demonstraţi că ecuaţia $f(x)=0$ are exact două soluţii reale distincte.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{x^2+2x+2}dx$.

5p **a)** Calculaţi $\int_0^1\left(x^2+2x+2\right)dx$.

5p **b)** Demonstraţi că $I_{n+1}+2I_n+2I_{n-1}=\frac{1}{n}$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$.

5p **c)** Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to+\infty}nI_n=\frac{1}{5}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2014
Proba E. c) – 2 iulie 2014
Matematică *M_şt-nat*
Barem de evaluare şi de notare

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z=3+2-2i=$	**3p**
	$=5-2i$, deci partea reală a numărului z este egală cu 5	**2p**
2.	$x_1+x_2=3,\ x_1x_2=10$	**3p**
	$x_1+x_2+2x_1x_2=3+2\cdot 10=23$	**2p**
3.	$x^2+x+1=1\Rightarrow x^2+x=0$	**3p**
	$x_1=-1$ și $x_2=0$ care verifică ecuația	**2p**
4.	Cifra unităților poate fi aleasă în 2 moduri	**2p**
	Cum cifrele sunt distincte, cifra zecilor poate fi aleasă în 2 moduri, iar cifra sutelor poate fi aleasă într-un singur mod	**2p**
	Se pot forma $2\cdot 2\cdot 1=4$ numere	**1p**
5.	$a-1=2$	**3p**
	$a=3$	**2p**
6.	$A=\dfrac{\pi}{2}$	**2p**
	$R=\dfrac{5}{2}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det\left(A(2)\right)=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=2\cdot 2-1\cdot 1=$	**3p**
	$=3$	**2p**
b)	$A(x)\cdot A(-x)=\begin{pmatrix}x & 1\\ 1 & x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-x & 1\\ 1 & -x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x^2+1 & 0\\ 0 & -x^2+1\end{pmatrix}$	**3p**
	$\begin{pmatrix}-x^2+1 & 0\\ 0 & -x^2+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Leftrightarrow x=0$	**2p**
c)	$A(1)+A(2)+\cdots+A(n)=\begin{pmatrix}1+2+\ldots+n & n\\ n & 1+2+\ldots+n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{n(n+1)}{2} & n\\ n & \dfrac{n(n+1)}{2}\end{pmatrix}$	**2p**
	$\begin{vmatrix}\dfrac{n(n+1)}{2} & n\\ n & \dfrac{n(n+1)}{2}\end{vmatrix}=\dfrac{n(n+1)}{2}\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}-n\cdot n=\dfrac{n^2(n-1)(n+3)}{4}$ pentru orice număr natural nenul n	**3p**
2.a)	$2*4=4(2+4-3)-2\cdot 4=$	**3p**
	$=12-8=4$	**2p**

b)	$x*y=4x+4y-12-xy=4-xy+4x+4y-16=$ $=4-x(y-4)+4(y-4)=4-(x-4)(y-4)$ pentru orice numere reale x şi y	**2p** **3p**
c)	$x*x=4-(x-4)^2\Rightarrow x*x*x=4+(x-4)^3$ $(x-4)^3=x-4\Rightarrow x=3$ sau $x=4$ sau $x=5$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to e} f(x)=\lim\limits_{x\to e}(x\ln x-x+1)=$ $=e\ln e-e+1=1$	**2p** **3p**
b)	$f'(x)=(x\ln x-x+1)'=\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}-1=$ $=\ln x+1-1=\ln x,\ x\in(0,+\infty)$	**3p** **2p**
c)	$f'(1)=0$, $f'(x)<0$ pentru $x\in(0,1)$ şi $f'(x)>0$ pentru $x\in(1,+\infty)$ $f(x)\geq f(1)\Rightarrow f(x)\geq 0$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**3p** **2p**
2.a)	$\int_0^{2014}(x+3)(x+5)f(x)dx=\int_0^{2014}1dx=$ $=x\Big\vert_0^{2014}=2014$	**2p** **3p**
b)	$\int_{-1}^{1}f(x)\cdot f'(x)dx=\dfrac{1}{2}f^2(x)\Big\vert_{-1}^{1}=\dfrac{1}{2}\left(f^2(1)-f^2(-1)\right)=$ $=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{576}-\dfrac{1}{64}\right)=-\dfrac{1}{144}$	**3p** **2p**
c)	$\mathcal{A}=\int_0^a\vert f(x)\vert dx=\int_0^a\dfrac{1}{(x+4)^2-1}dx=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x+3}{x+5}\Big\vert_0^a=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{5(a+3)}{3(a+5)}$ $\dfrac{5(a+3)}{3(a+5)}=\dfrac{10}{9}\Rightarrow a=1$	**3p** **2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2014
Proba E. c) – 2 iulie 2014
Matematică *M_şt-nat*
Barem de evaluare şi de notare

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z^2=(2+i)^2=4+4i+i^2=$	**3p**
	$=3+4i$	**2p**
2.	$f(m)=1$	**2p**
	$m-3=1\Leftrightarrow m=4$	**3p**
3.	$x-3=9$	**3p**
	$x=12$ care verifică ecuația	**2p**
4.	Numărul submulțimilor cu un număr impar de elemente ale unei mulțimi cu 4 elemente este egal cu $C_4^1+C_4^3=$	**3p**
	$=8$	**2p**
5.	$\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}$	**2p**
	$\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}\Rightarrow\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{AB}$	**3p**
6.	$\cos C=\sin B$, $\sin C=\cos B$	**2p**
	$\sin B\cdot\cos C+\sin C\cdot\cos B=\sin^2 B+\cos^2 B=1$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}0 & 2014\\ 1 & -1\end{vmatrix}=0\cdot(-1)-1\cdot 2014=$	**3p**
	$=-2014$	**2p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}0 & 2014\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2014\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2014 & -2014\\ -1 & 2015\end{pmatrix}$	**3p**
	$A+A\cdot A=\begin{pmatrix}0 & 2014\\ 1 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2014 & -2014\\ -1 & 2015\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2014 & 0\\ 0 & 2014\end{pmatrix}=2014I_2$	**2p**
c)	$A^{-1}=\frac{1}{2014}\begin{pmatrix}1 & 2014\\ 1 & 0\end{pmatrix}$	**3p**
	$X=2014\,A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2014\\ 1 & 0\end{pmatrix}$	**2p**
2.a)	$f(0)=0^3-6\cdot 0^2+m\cdot 0-6=$	**2p**
	$=-6$	**3p**
b)	$x_1+x_2+x_3=6$, $x_1x_2x_3=6$	**2p**
	$\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_1x_3}+\frac{1}{x_2x_3}=\frac{x_1+x_2+x_3}{x_1x_2x_3}=\frac{6}{6}=1$	**3p**
c)	f are rădăcinile $x_1=k-1$, $x_2=k$ și $x_3=k+1$ unde $k\in\mathbb{Z}\Rightarrow x_1+x_2+x_3=3k\Rightarrow k=2$	**2p**
	$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=1\cdot 2+1\cdot 3+2\cdot 3\Rightarrow m=11$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{x'\left(x^2+1\right)-x\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2}=$	**2p**
	$=\dfrac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\dfrac{(1-x)(1+x)}{\left(x^2+1\right)^2},\ x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$y-f(1)=f'(1)(x-1)$	**2p**
	$f(1)=\dfrac{1}{2}$, $f'(1)=0$, deci ecuaţia tangentei este $y=\dfrac{1}{2}$	**3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$ sau $x=-1$	**2p**
	$f'(x)<0$ pentru $x\in(-\infty,-1)$, $f'(x)>0$ pentru $x\in(-1,1)$, $f'(x)<0$ pentru $x\in(1,+\infty)$	**2p**
	Punctele de extrem sunt $x=-1$ şi $x=1$	**1p**
2.a)	$\displaystyle\int_0^1\left(f(x)-\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)dx=\int_0^1\frac{1}{x+1}dx=$	**2p**
	$=\ln(x+1)\Big\vert_0^1=\ln 2$	**3p**
b)	F este o primitivă a lui $f\Rightarrow F''(x)=f'(x)=-\dfrac{1}{(x+1)^2}-\dfrac{1}{(x+2)^2}-\dfrac{1}{(x+3)^2}$	**2p**
	$F''(x)<0$ pentru orice $x\in(-1,+\infty)$, deci F este concavă pe $(-1,+\infty)$	**3p**
c)	$\mathcal{A}=\displaystyle\int_0^n\left\vert f(x)\right\vert dx=\int_0^n\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}\right)dx=\ln\big((x+1)(x+2)(x+3)\big)\Big\vert_0^n=$	**2p**
	$=\ln\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}$	**1p**
	$n\geq 1\Rightarrow(n+1)(n+2)(n+3)\geq 24\Rightarrow\mathcal{A}\geq\ln 4$ pentru orice număr natural nenul n	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2014
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Barem de evaluare şi de notare

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$x+2=\dfrac{2+10}{2}$	**3p**
	$x=4$	**2p**
2.	$\Delta=44$	**2p**
	Valoarea minimă a funcției f este egală cu $-\dfrac{\Delta}{4a}=-11$	**3p**
3.	$x^2-2x-8=0$	**3p**
	$x_1=-2$ și $x_2=4$, care verifică ecuația	**2p**
4.	Sunt 45 de numere pare de două cifre, deci sunt 45 de cazuri favorabile	**2p**
	Sunt 90 de numere de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{45}{90}=\dfrac{1}{2}$	**2p**
5.	$\vec{u}=-\vec{v}\Leftrightarrow a-2=-3$	**3p**
	$a=-1$	**2p**
6.	$\cos A=\dfrac{16+25-36}{2\cdot4\cdot5}=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{8}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det B=\begin{vmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{vmatrix}=0+0+0-1-0-0=$	**3p**
	$=-1$	**2p**
b)	$AB=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$	**2p**
	$BA=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow AB=BA$	**3p**
c)	$\det\left(B+xA\right)=\begin{vmatrix}0&x&1\\x&1&x\\1&x&0\end{vmatrix}=2x^2-1$	**3p**
	$2x^2-1=1\Leftrightarrow x_1=-1$ și $x_2=1$	**2p**
2.a)	$4*5=4\cdot5-4\left(4+5-5\right)=$	**3p**
	$=4$	**2p**

b)	$x*y=xy-4x-4y+16+4=$	**2p**
	$=x(y-4)-4(y-4)+4=(x-4)(y-4)+4$ pentru orice numere reale x și y	**3p**
c)	$x*4=4*x=4$ pentru orice număr real x	**2p**
	$1*2*3*...*2014=(1*2*3)*4*(5*...*2014)=4*(5*...*2014)=4$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-3}{x^2+3}=$	**2p**
	$=1$	**3p**
b)	$f'(x)=\dfrac{\left(x^2-3\right)'\cdot\left(x^2+3\right)-\left(x^2-3\right)\cdot\left(x^2+3\right)'}{\left(x^2+3\right)^2}=$	**2p**
	$=\dfrac{2x\left(x^2+3\right)-2x\left(x^2-3\right)}{\left(x^2+3\right)^2}=\dfrac{12x}{\left(x^2+3\right)^2},\ x\in\mathbb{R}$	**3p**
c)	$f''(x)=\dfrac{36\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+3\right)^3},\ x\in\mathbb{R}$	**3p**
	$f''(x)>0$ pentru orice $x\in(-1,1)\Rightarrow f$ este convexă pe intervalul $(-1,1)$	**2p**
2.a)	$\int_1^e f(x)\cdot f'(x)dx=\dfrac{1}{2}f^2(x)\Big\|_1^e=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{2}\left(f^2(e)-f^2(1)\right)=\dfrac{1}{2}$	**2p**
b)	$\int_1^e x^3 f(x)dx=\int_1^e\left(\dfrac{x^4}{4}\right)'\ln x\,dx=\dfrac{x^4}{4}\ln x\Big\|_1^e-\int_1^e\dfrac{x^4}{4}\cdot\dfrac{1}{x}dx=$	**2p**
	$=\dfrac{e^4}{4}-\dfrac{x^4}{16}\Big\|_1^e=\dfrac{3e^4+1}{16}$	**3p**
c)	$\mathcal{A}=\int_1^e\|f(x)\|dx=\int_1^e\ln x\,dx=(x\ln x-x)\Big\|_1^e=$	**3p**
	$=(e\ln e-e)-(\ln 1-1)=1$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2014
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Barem de evaluare şi de notare

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z^2=2^2+2\cdot 2\cdot 3i+(3i)^2=$	**3p**
	$=-5+12i$	**2p**
2.	$f(x)=0\Rightarrow (x-3)^2=0$	**3p**
	$x=3$ şi $y=0$	**2p**
3.	$x^2+5=9\Rightarrow x^2-4=0$	**3p**
	$x_1=-2$ şi $x_2=2$, care verifică ecuaţia	**2p**
4.	Sunt 7 numere de două cifre divizibile cu 13, deci sunt 7 cazuri favorabile	**2p**
	Sunt 90 de numere de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{7}{90}$	**2p**
5.	$AB=4$, $CO=3$ şi CO este înălţime	**3p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\dfrac{4\cdot 3}{2}=6$	**2p**
6.	$E\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\dfrac{\pi}{2}+\sin\dfrac{\pi}{4}=$	**3p**
	$=0+\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(1))=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=3\cdot 2-1\cdot 0=$	**3p**
	$=6$	**2p**
b)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix}2a+1 & 1\\ 1-a & 2\end{vmatrix}=5a+1$	**3p**
	$5a+1=1\Rightarrow a=0$	**2p**
c)	$A(0)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$; $\det(A(0))=1$	**2p**
	$(A(0))^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$	**3p**
2.a)	$1\circ 2=2\cdot 1\cdot 2-3\cdot 1-3\cdot 2+6=$	**3p**
	$=1$	**2p**
b)	$x\circ y=2\left(xy-\dfrac{3}{2}x-\dfrac{3}{2}y+\dfrac{9}{4}+\dfrac{3}{4}\right)=$	**2p**
	$=2\left(x\left(y-\dfrac{3}{2}\right)-\dfrac{3}{2}\left(y-\dfrac{3}{2}\right)\right)+\dfrac{3}{2}=2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)\left(y-\dfrac{3}{2}\right)+\dfrac{3}{2}$ pentru orice numere reale x şi y	**3p**

c)	$2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{2}=2\Rightarrow\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$	**3p**
	$x_1=1$ şi $x_2=2$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^{-x}}{x-2}=\frac{e^{-1}}{1-2}=$	**3p**
	$=-\frac{1}{e}$	**2p**
b)	$f'(x)=\frac{\left(e^{-x}\right)'\cdot(x-2)-e^{-x}\cdot(x-2)'}{(x-2)^2}=\frac{-e^{-x}\cdot(x-2)-e^{-x}}{(x-2)^2}$	**3p**
	$=\frac{-e^{-x}\cdot(x-1)}{(x-2)^2}=\frac{(1-x)e^{-x}}{(x-2)^2}$, $x\in(-\infty,2)$	**2p**
c)	$f'(1)=0$, $f'(x)>0$ pentru orice $x\in(-\infty,1)$ şi $f'(x)<0$ pentru orice $x\in(1,2)$	**3p**
	$f(x)\le f(1)\Rightarrow f(x)\le-\frac{1}{e}$ pentru orice $x\in(-\infty,2)$	**2p**
2.a)	$\int_1^2(x+1)f(x)\,dx=\int_1^2\ln x\,dx=x\ln x\Big\vert_1^2-\int_1^2 1\,dx=$	**3p**
	$=2\ln 2-x\Big\vert_1^2=2\ln 2-1$	**2p**
b)	$\int_1^e\left(f(x)+(x+1)\cdot f'(x)\right)dx=\int_1^e\left((x+1)\cdot f(x)\right)'dx=$	**3p**
	$=(x+1)f(x)\Big\vert_1^e=\ln e=1$	**2p**
c)	$V=\pi\cdot\int_2^3 g^2(x)\,dx=\pi\cdot\int_2^3(x+1)^2\,dx=$	**2p**
	$=\pi\cdot\frac{(x+1)^3}{3}\Big\vert_2^3=\frac{37\pi}{3}$	**3p**

Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c) – 2 iulie 2014
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinaţi partea reală a numărului complex $z=3+2(1-i)$.

5p **2.** Arătați că $x_1+x_2+2x_1x_2=23$ ştiind că x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2-3x+10=0$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2+x+1}=1$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale impare de trei cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $\{1, 2, 3\}$.

5p **5.** Determinaţi numărul real a pentru care dreptele de ecuații $y=(a-1)x+1$ și $y=2x-3$ sunt paralele.

5p **6.** Determinați raza cercului circumscris triunghiului ABC în care $AB=3$, $AC=4$ și $BC=5$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Calculați $\det(A(2))$.

5p **b)** Determinaţi numărul real x pentru care $A(x)\cdot A(-x)=I_2$, unde $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **c)** Arătați că $\det(A(1)+A(2)+\cdots+A(n))=\dfrac{n^2(n-1)(n+3)}{4}$ pentru orice număr natural nenul n.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=4(x+y-3)-xy$.

5p **a)** Calculaţi $2*4$.

5p **b)** Arătaţi că $x*y=4-(x-4)(y-4)$ pentru orice numere reale x şi y.

5p **c)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x*x*x=x$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln x-x+1$.

5p **a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to e} f(x)=1$.

5p **b)** Arătați că $f'(x)=\ln x$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **c)** Arătați că $f(x)\geq 0$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:(-3,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x^2+8x+15}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^{2014}(x+3)(x+5)f(x)\,dx=2014$.

5p **b)** Arătați că $\int_{-1}^{1} f(x)\cdot f'(x)\,dx=-\dfrac{1}{144}$.

5p **c)** Determinați numărul real a, $a>0$ știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=a$, are aria egală cu $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{10}{9}$.

Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c) – 2 iulie 2014
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numărul complex $z=2+i$. Calculaţi z^2.

5p **2.** Determinaţi numărul real m ştiind că punctul $M(m,1)$ aparţine graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-3$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(x-3)=2$.

5p **4.** Determinaţi numărul submulţimilor cu număr impar de elemente ale mulţimii $A=\{1, 2, 3, 4\}$.

5p **5.** În dreptunghiul $ABCD$ se notează cu M mijlocul laturii AD. Arătaţi că $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{AB}$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A. Arătaţi că $\sin B\cdot\cos C+\sin C\cdot\cos B=1$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0 & 2014\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculaţi $\det A$.

5p **b)** Arătaţi că $A+A\cdot A=2014I_2$.

5p **c)** Rezolvaţi în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuaţia matriceală $A\cdot X=2014\ I_2$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-6X^2+mX-6$, unde m este număr real.

5p **a)** Calculaţi $f(0)$.

5p **b)** Arătaţi că $\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_1x_3}+\frac{1}{x_2x_3}=1$ ştiind că x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Determinaţi numărul real m ştiind că rădăcinile polinomului f sunt trei numere întregi consecutive.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{(1-x)(1+x)}{\left(x^2+1\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=1$, situat pe graficul funcţiei f.

5p **c)** Determinaţi punctele de extrem ale funcţiei f.

2. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^1\left(f(x)-\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)dx=\ln 2$.

5p **b)** Arătaţi că orice primitivă a funcţiei f este concavă pe intervalul $(-1,+\infty)$.

5p **c)** Arătaţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=n$, are aria mai mare sau egală cu $\ln 4$, pentru orice număr natural nenul n.

Examenul de bacalaureat naţional 2014
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinaţi numărul real x pentru care numerele 2, $x+2$ şi 10 sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **2.** Determinaţi valoarea minimă a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x-10$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2\left(x^2-2x\right)=3$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie par.

5p **5.** Determinaţi numărul real a pentru care vectorii $\vec{u}=(a-2)\vec{i}-2\vec{j}$ şi $\vec{v}=3\vec{i}+2\vec{j}$ sunt opuşi.

5p **6.** Calculaţi cosinusul unghiului A al triunghiului ABC în care $AB=4$, $AC=5$ şi $BC=6$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculaţi $\det B$.

5p **b)** Arătaţi că $AB=BA$.

5p **c)** Determinaţi numerele reale x pentru care $\det(B+xA)=1$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=xy-4(x+y-5)$.

5p **a)** Calculaţi $4*5$.

5p **b)** Arătaţi că $x*y=(x-4)(y-4)+4$ pentru orice numere reale x şi y.

5p **c)** Calculaţi $1*2*3*\cdots*2014$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-3}{x^2+3}$.

5p **a)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

5p **b)** Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{12x}{\left(x^2+3\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Arătaţi că funcţia f este convexă pe intervalul $(-1,1)$.

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_1^e f(x)\cdot f'(x)\,dx=\dfrac{1}{2}$.

5p **b)** Arătaţi că $\int_1^e x^3 f(x)\,dx=\dfrac{3e^4+1}{16}$.

5p **c)** Determinaţi aria suprafaţei plane delimitate de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=1$ şi $x=e$.

Examenul de bacalaureat naţional 2014
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numărul complex $z=2+3i$. Calculaţi z^2.

5p **2.** Determinaţi coordonatele punctului de intersecţie cu axa Ox a graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-6x+9$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_9\left(x^2+5\right)=1$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 13.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,0)$, $B(2,0)$ şi $C(0,3)$. Calculaţi aria triunghiului ABC.

5p **6.** Se consideră $E(x)=\cos x+\sin\frac{x}{2}$, unde x este număr real. Calculaţi $E\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2a+1 & 1\\ 1-a & 2\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Calculaţi $\det(A(1))$.

5p **b)** Determinaţi numărul real a ştiind că $\det(A(a))=1$.

5p **c)** Determinaţi inversa matricei $A(0)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=2xy-3x-3y+6$.

5p **a)** Calculați $1\circ 2$.

5p **b)** Arătaţi că $x\circ y=2\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(y-\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{2}$ pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x\circ x=2$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(-\infty,2)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^{-x}}{x-2}$.

5p **a)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

5p **b)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{(1-x)e^{-x}}{(x-2)^2}$, $x\in(-\infty,2)$.

5p **c)** Arătaţi că $f(x)\le-\frac{1}{e}$ pentru orice $x\in(-\infty,2)$.

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{x+1}$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_1^2(x+1)f(x)\,dx=2\ln 2-1$.

5p **b)** Arătaţi că $\int_1^e\left(f(x)+(x+1)f'(x)\right)dx=1$.

5p **c)** Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:[2,3]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{\ln x}{f(x)}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2015

Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_2 = a_1 + r = 1 + 2 =$	**3p**
	$= 3$	**2p**
2.	$f(m) = 0 \Leftrightarrow m + 1 = 0$	**3p**
	$m = -1$	**2p**
3.	$x^2 + 4 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 4$	**2p**
	$x_1 = -2$ şi $x_2 = 2$, care verifică ecuaţia	**3p**
4.	Mulţimea M are 8 elemente, deci sunt 8 cazuri posibile	**1p**
	În mulţimea M sunt 2 numere divizibile cu 3, deci sunt 2 cazuri favorabile	**2p**
	$p = \dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$	**2p**
5.	$\dfrac{a+1}{1} = \dfrac{4}{2}$	**3p**
	$a = 1$	**2p**
6.	Cum $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, obţinem $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$	**2p**
	$\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2014) = \begin{pmatrix} 2014 & 3 \\ 2013 & 2 \end{pmatrix}$, $A(2016) = \begin{pmatrix} 2016 & 3 \\ 2015 & 2 \end{pmatrix}$, $A(2015) = \begin{pmatrix} 2015 & 3 \\ 2014 & 2 \end{pmatrix}$	**3p**
	$A(2014) + A(2016) = \begin{pmatrix} 4030 & 6 \\ 4028 & 4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2015 & 3 \\ 2014 & 2 \end{pmatrix} = 2A(2015)$	**2p**
b)	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} a & 3 \\ a-1 & 2 \end{vmatrix} = 3 - a$	**3p**
	$3 - a = 0 \Leftrightarrow a = 3$	**2p**
c)	$A(2) + xA(3) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3x & 3+3x \\ 1+2x & 2+2x \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(2) + xA(3)) = x + 1$	**3p**
	$x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$	**2p**
2.a)	$(-1) * 1 = -(-1) \cdot 1 - (-1) - 1 - 2 =$	**3p**
	$= 1 + 1 - 1 - 2 = -1$	**2p**
b)	$x * y = -xy - x - y - 1 - 1 =$	**2p**
	$= -x(y+1) - (y+1) - 1 = -(x+1)(y+1) - 1$, pentru orice numere reale x şi y	**3p**

c)	$(x+2)*(2x-3)=-(x+3)(2x-2)-1$	**2p**
	$x^2+2x=0 \Leftrightarrow x_1=-2$ și $x_2=0$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=4x^3-16x=$	**3p**
	$=4x\left(x^2-4\right)=4x(x-2)(x+2),\ x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-x^4}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-8x^2+16}{x^2+1}=$	**2p**
	$=-8$	**3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x(x-2)(x+2)=0$	**2p**
	Coordonatele punctelor sunt $x_1=-2,\ y_1=0$; $x_2=0,\ y_2=16$ și $x_3=2,\ y_3=0$	**3p**
2.a)	$\int_1^2 x f(x)\,dx=\int_1^2 (x+2)\,dx=\left(\dfrac{x^2}{2}+2x\right)\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=6-\dfrac{5}{2}=\dfrac{7}{2}$	**2p**
b)	$F'(x)=(x+2\ln x+2015)'=1+\dfrac{2}{x}=$	**3p**
	$=\dfrac{x+2}{x}=f(x)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci F este o primitivă a funcției f	**2p**
c)	$\mathcal{A}=\int_1^e \lvert g(x)\rvert\,dx=\int_1^e \dfrac{2}{x}\ln x\,dx=\ln^2 x\Big\vert_1^e=$	**3p**
	$=\ln^2 e-\ln^2 1=1$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2015

Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z_1z_2=(3+i)(3-i)=9-i^2=$	**3p**
	$=10$, care este număr real	**2p**
2.	$f(1)=1\Leftrightarrow 1+a=1$	**3p**
	$a=0$	**2p**
3.	$x^3+2x-4=x^3\Leftrightarrow 2x-4=0$	**3p**
	$x=2$	**2p**
4.	Mulțimea A are 80 de elemente, deci sunt 80 de cazuri posibile	**1p**
	În mulțimea A sunt 11 numere divizibile cu 7, deci sunt 11 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{11}{80}$	**2p**
5.	$m_{OA}=2$ și $m_{OB}=\dfrac{a}{2}$	**2p**
	$m_{OA}=m_{OB}\Leftrightarrow a=4$	**3p**
6.	$E\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos\dfrac{\pi}{6}+\sin\dfrac{\pi}{3}=$	**2p**
	$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(0))=\begin{vmatrix}2&0\\0&2\end{vmatrix}=2\cdot2-0\cdot0=$	**3p**
	$=4-0=4$	**2p**
b)	$A(1)=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$, $A(3)=\begin{pmatrix}2&3\\3&2\end{pmatrix}$, $A(2)=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}$	**3p**
	$\begin{pmatrix}4&4\\4&4\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}\Leftrightarrow a=2$	**2p**
c)	$A(x)A(y)=\begin{pmatrix}4+xy&2x+2y\\2x+2y&4+xy\end{pmatrix}$	**2p**
	$2A(x+y)+xyI_2=2\begin{pmatrix}2&x+y\\x+y&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}xy&0\\0&xy\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+xy&2(x+y)\\2(x+y)&4+xy\end{pmatrix}=A(x)A(y)$, pentru orice numere reale x și y	**3p**

2.a)	$2*(-2)=3\cdot 2\cdot(-2)+6\cdot 2+6\cdot(-2)+10=$	**3p**
	$=-12+12-12+10=-2$	**2p**
b)	$x*y=3xy+6x+6y+12-2=$	**2p**
	$=3x(y+2)+6(y+2)-2=3(x+2)(y+2)-2$, pentru orice numere reale x şi y	**3p**
c)	$x*x*x=9(x+2)^3-2$	**2p**
	$9(x+2)^3-2=x\Leftrightarrow x_1=-\frac{7}{3},\ x_2=-2,\ x_3=-\frac{5}{3}$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=(x+1)'\cdot e^x+(x+1)\cdot\left(e^x\right)'=$	**2p**
	$=e^x+(x+1)e^x=(x+2)e^x,\ x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$f(0)=1,\ f'(0)=2$	**2p**
	Ecuaţia tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)\Rightarrow y=2x+1$	**3p**
c)	$f''(x)=(x+3)e^x,\ x\in\mathbb{R}$	**2p**
	$f''(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[-3,+\infty)$, deci f este convexă pe intervalul $[-3,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\int_{-1}^{1}\left(x^2+1\right)\cdot\frac{x^3+3x}{x^2+1}dx=\int_{-1}^{1}\left(x^3+3x\right)dx=\left(\frac{x^4}{4}+3\cdot\frac{x^2}{2}\right)\Big\vert_{-1}^{1}=$	**3p**
	$=\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\right)=0$	**2p**
b)	$\int_{0}^{1}\frac{x^3+3x}{x^2+1}dx=\int_{0}^{1}\left(x+\frac{2x}{x^2+1}\right)dx=$	**2p**
	$=\left(\frac{x^2}{2}+\ln\left(x^2+1\right)\right)\Big\vert_{0}^{1}=\frac{1}{2}+\ln 2$	**3p**
c)	$\mathcal{A}=\int_{0}^{m}\lvert g(x)\rvert dx=\int_{0}^{m}\frac{2x}{x^2+1}dx=\ln\left(x^2+1\right)\Big\vert_{0}^{m}=\ln\left(m^2+1\right)$	**3p**
	$\ln\left(m^2+1\right)=\ln 2\Leftrightarrow m^2+1=2$ şi, cum $m>0$, obţinem $m=1$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2015

Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(2-3i)(2+3i)=4-9i^2=$	**3p**
	$=13$	**2p**
2.	$f(3)=5$	**2p**
	$f(f(3))=f(5)=9$	**3p**
3.	$x^2+17=81\Leftrightarrow x^2=64$	**2p**
	$x_1=-8$ şi $x_2=8$, care verifică ecuaţia	**3p**
4.	Sunt 90 numere naturale de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	Sunt 18 numere naturale de două cifre, divizibile cu 5, deci sunt 18 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{18}{90}=\frac{1}{5}$	**2p**
5.	$m_{AB}=\frac{2-a}{2}$ şi $m_{BC}=1$	**2p**
	$m_{AB}=m_{BC}\Leftrightarrow a=0$	**3p**
6.	$E\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{4}=$	**2p**
	$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}$, $A(-1)=\begin{pmatrix}1&-2\\-2&4\end{pmatrix}$, $A(0)=\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix}$	**3p**
	$A(1)+A(-1)=\begin{pmatrix}2&0\\0&8\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix}=2A(0)$	**2p**
b)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix}1&2a\\2a&4\end{vmatrix}=4-4a^2$	**3p**
	$4-4a^2=0\Leftrightarrow a_1=-1$ şi $a_2=1$	**2p**
c)	$A(2)=\begin{pmatrix}1&4\\4&4\end{pmatrix}$, $\det(A(2))=-12\neq 0\Rightarrow (A(2))^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&-\frac{1}{12}\end{pmatrix}$	**3p**
	$X=(A(2))^{-1}\cdot A(8)\Rightarrow X=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&-\frac{1}{12}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&16\\16&4\end{pmatrix}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}5&-4\\-1&5\end{pmatrix}$	**2p**

2.a)	$(-3)\circ 3=2\cdot(-3)\cdot 3-6\cdot(-3)-6\cdot 3+21=$	**3p**
	$=-18+18-18+21=3$	**2p**
b)	$x\circ y=2xy-6x-6y+18+3=$	**2p**
	$=2x(y-3)-6(y-3)+3=2(x-3)(y-3)+3$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
c)	$x\circ 3=3$ și $3\circ y=3$, pentru x și y numere reale	**2p**
	$1\circ\sqrt{2}\circ\sqrt{3}\circ\ldots\circ\sqrt{2015}=\left(1\circ\sqrt{2}\circ\sqrt{3}\circ\ldots\circ\sqrt{8}\right)\circ 3\circ\left(\sqrt{10}\circ\sqrt{11}\circ\ldots\circ\sqrt{2015}\right)=$	**3p**
	$=3\circ\left(\sqrt{10}\circ\sqrt{11}\circ\ldots\circ\sqrt{2015}\right)=3$	

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$	**2p**
	$f'(x)=3e^x+2x$ și $f'(0)=3\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=3$	**3p**
b)	$f(0)=3$, $f'(0)=3$	**2p**
	Ecuaţia tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)\Rightarrow y=3x+3$	**3p**
c)	$f''(x)=3e^x+2$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
	$f''(x)>0$, pentru orice număr real x, deci f este convexă pe $\mathbb{R}$	**3p**
2.a)	$\int_1^3\left(f(x)-\dfrac{1}{x}\right)dx=\int_1^3 x\,dx=\dfrac{1}{2}x^2\Big\vert_1^3=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{2}(9-1)=4$	**2p**
b)	$\int_1^2\left(f(x)-\dfrac{1}{x}\right)e^x dx=\int_1^2 xe^x dx=xe^x\Big\vert_1^2-\int_1^2 e^x dx=$	**3p**
	$=2e^2-e-e^x\Big\vert_1^2=e^2$	**2p**
c)	$\mathcal{A}=\int_1^a\lvert f(x)\rvert dx=\int_1^a\left(x+\dfrac{1}{x}\right)dx=\left(\dfrac{x^2}{2}+\ln x\right)\Big\vert_1^a=\dfrac{a^2-1}{2}+\ln a$	**3p**
	$\dfrac{a^2-1}{2}+\ln a=4+\ln a\Leftrightarrow a^2=9$ și cum $a>1$, obţinem $a=3$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2015

Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(1+i)^2=1+2i+i^2=2i$	**3p**
	$z^2-2i=2i-2i=0$	**2p**
2.	$f(3)=0$	**2p**
	$(g\circ f)(3)=g(f(3))=g(0)=2015$	**3p**
3.	$x^2-5x=3-3x\Leftrightarrow x^2-2x-3=0$	**3p**
	$x_1=-1$ şi $x_2=3$	**2p**
4.	$C_5^4=\frac{5!}{4!\cdot 1!}=$	**3p**
	$=5$	**2p**
5.	Panta dreptei d este egală cu 2	**2p**
	Ecuaţia dreptei d este $y=2x+4$	**3p**
6.	$\mathcal{A}_{\Delta MNP}=\frac{12\cdot 3\cdot \sin 30^\circ}{2}=\frac{6\cdot 3}{2}=$	**3p**
	$=9$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(0))=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1\cdot 1-0\cdot 0=1$	**3p**
b)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix}1 & -a\\ -a & 1\end{vmatrix}=1-a^2$	**3p**
	$1-a^2=0\Leftrightarrow a_1=-1$ şi $a_2=1$	**2p**
c)	$A(a)A(b)=\begin{pmatrix}1+ab & -b-a\\ -a-b & ab+1\end{pmatrix}$, $A(a+b)=\begin{pmatrix}1 & -a-b\\ -a-b & 1\end{pmatrix}$, $abI_2=\begin{pmatrix}ab & 0\\ 0 & ab\end{pmatrix}$	**3p**
	$A(a+b)+abI_2=\begin{pmatrix}1+ab & -a-b\\ -a-b & 1+ab\end{pmatrix}=A(a)A(b)$, pentru orice numere reale a şi b	**2p**
2.a)	$f(0)=0^3-m\cdot 0+2=$	**3p**
	$=0-0+2=2$	**2p**
b)	Restul este $(3-m)X$	**3p**
	$3-m=0\Leftrightarrow m=3$	**2p**
c)	$x_1+x_2+x_3=0$	**2p**
	$x_1^3+x_2^3+x_3^3=m(x_1+x_2+x_3)-6=m\cdot 0-6=-6$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$	**2p**
	$f'(x)=e^x-1$ şi $f'(0)=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=0$	**3p**
b)	$e^x\le 1\Leftrightarrow x\le 0$	**2p**
	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(-\infty,0]$, deci f este descrescătoare pe intervalul $(-\infty,0]$	**3p**
c)	$f'(0)=0$ şi $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$, deci f este crescătoare pe intervalul $[0,+\infty)$	**2p**
	Cum f este descrescătoare pe intervalul $(-\infty,0]$, obţinem $f(x)\ge f(0)\Rightarrow e^x\ge x+1$, pentru orice număr real x	**3p**
2.a)	$\int_0^1\left(f(x)+2x-5\right)dx=\int_0^1\left(x^2-2x+5+2x-5\right)dx=\int_0^1 x^2dx=$	**2p**
	$=\dfrac{x^3}{3}\Big\vert_0^1=\dfrac{1}{3}$	**3p**
b)	$\int_0^2\dfrac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln\left(x^2-2x+5\right)\Big\vert_0^2=$	**3p**
	$=\ln 5-\ln 5=0$	**2p**
c)	$f(x)=(x-1)^2+4\ge 4$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\int_{2014}^{2015}\dfrac{1}{f(x)}dx\le\int_{2014}^{2015}\dfrac{1}{4}dx=\dfrac{1}{4}x\Big\vert_{2014}^{2015}=\dfrac{1}{4}$	**3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2015

Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$r=a_4-a_3=8-6=$	**3p**
	$=2$	**2p**
2.	Valoarea minimă a funcției este $-\frac{\Delta}{4a}=$	**2p**
	$=-\frac{36}{4}=-9$	**3p**
3.	$x^2+3=(x+1)^2\Leftrightarrow 3=2x+1$	**3p**
	$x=1$, care verifică ecuația	**2p**
4.	$C_7^2=\frac{7!}{2!\cdot 5!}=$	**3p**
	$=21$	**2p**
5.	$\frac{y-1}{3-1}=\frac{x-2}{0-2}$	**3p**
	$y=-x+3$	**2p**
6.	$\frac{AB}{\sin C}=2R\Rightarrow R=\frac{8}{2\cdot\frac{1}{2}}=$	**3p**
	$=8$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=1\cdot 4-2\cdot 3=$	**3p**
	$=4-6=-2$	**2p**
b)	$B(x)+I_2=\begin{pmatrix}x+1 & 2\\ 3 & 7\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(B(x)+I_2\right)=7x+1$	**3p**
	$7x+1=8\Leftrightarrow x=1$	**2p**
c)	$A\cdot B(x)=\begin{pmatrix}x+6 & 14\\ 3x+12 & 30\end{pmatrix}$	**2p**
	$B(x)\cdot A=\begin{pmatrix}x+6 & 2x+8\\ 21 & 30\end{pmatrix}$	**2p**
	$\begin{pmatrix}x+6 & 14\\ 3x+12 & 30\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+6 & 2x+8\\ 21 & 30\end{pmatrix}\Leftrightarrow x=3$	**1p**
2.a)	$(-7)*7=(-7)\cdot 7-7\cdot(-7)-7\cdot 7+56=$	**3p**
	$=-49+49-49+56=7$	**2p**
b)	$x*y=xy-7x-7y+49+7=$	**2p**
	$=x(y-7)-7(y-7)+7=(x-7)(y-7)+7$, pentru orice numere reale x și y	**3p**

c)	$x*7=7$ şi $7*y=7$, pentru x şi y numere reale	**2p**
	$1*2*3*\cdots*2015=(1*2*\cdots*6)*7*(8*9*\cdots*2015)=7*(8*9*\cdots*2015)=7$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$	**2p**
	$f'(x)=e^x-\dfrac{1}{x}+1$ şi $f'(1)=e\Rightarrow\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=e$	**3p**
b)	$f(1)=e+1$, $f'(1)=e$	**2p**
	Ecuaţia tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Rightarrow y=ex+1$	**3p**
c)	$f''(x)=e^x+\dfrac{1}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
	$f''(x)>0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci f este convexă pe intervalul $(0,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\int_0^1\dfrac{1}{f(x)}dx=\int_0^1(x+1)dx=\left(\dfrac{x^2}{2}+x\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{3}{2}$	**2p**
b)	$\int_0^1 x^2f(x)dx=\int_0^1\dfrac{x^2}{x+1}dx=\int_0^1\left(x-1+\dfrac{1}{x+1}\right)dx=\left(\dfrac{x^2}{2}-x+\ln(x+1)\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{2}-1+\ln 2=-\dfrac{1}{2}+\ln 2$	**2p**
c)	$V=\pi\int_0^1 g^2(x)dx=\pi\int_0^1\dfrac{1}{(x+1)^2}dx=\pi\cdot\dfrac{-1}{x+1}\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=\pi\left(-\dfrac{1}{2}+1\right)=\dfrac{\pi}{2}$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2015
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_1+a_2+a_3=3+(3+2)+(3+2\cdot 2)=$	**3p**
	$=15$	**2p**
2.	$-\dfrac{b}{2a}=-1$	**2p**
	$-\dfrac{\Delta}{4a}=-\dfrac{12}{4}=-3$	**3p**
3.	$x^2-4x+4=0$	**3p**
	$x=2$ care verifică ecuația	**2p**
4.	Numărul submulţimilor cu 3 elemente ale unei mulţimi cu 5 elemente este egal cu $C_5^3=$	**3p**
	$=10$	**2p**
5.	$M(-2,3)$	**2p**
	$AM=4$	**3p**
6.	$\cos a=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$	**3p**
	$\operatorname{ctg} a=2\sqrt{2}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(3))=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 3\end{vmatrix}=2\cdot 3-1\cdot 3=$	**3p**
	$=3$	**2p**
b)	$A(-2015)=\begin{pmatrix}2 & -2015\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $A(2015)=\begin{pmatrix}2 & 2015\\ 1 & 3\end{pmatrix}$	**2p**
	$A(-2015)+A(2015)=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 2 & 6\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix}=2A(0)$	**3p**
c)	$\det(A(x))=\begin{vmatrix}2 & x\\ 1 & 3\end{vmatrix}=6-x$	**2p**
	$x^2+x-6=0\Leftrightarrow x_1=-3$ şi $x_2=2$	**3p**
2.a)	$f(\hat{0})=\hat{0}^3+a\cdot\hat{0}=$	**2p**
	$=\hat{0}$	**3p**
b)	$f(\hat{3})=\hat{2}+a\cdot\hat{3}$	**2p**
	$\hat{2}+a\cdot\hat{3}=\hat{3}\Rightarrow a=\hat{2}$	**3p**
c)	$\hat{1}+a=\hat{3}+a\cdot\hat{2}\Rightarrow a=\hat{3}$	**2p**
	$f(\hat{3})=\hat{1}$ şi $f(\hat{4})=\hat{1}\Rightarrow f(\hat{3})=f(\hat{4})$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{(x+\ln x)'\cdot x-(x+\ln x)\cdot x'}{x^2}=$	**2p**
	$=\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\cdot x-x-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2},\ x\in(0,+\infty)$	**3p**
b)	$y-f(1)=f'(1)(x-1)$	**2p**
	$f(1)=1$, $f'(1)=1$, deci ecuaţia tangentei este $y=x$	**3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=e$	**1p**
	$f'(x)\geq 0$ pentru orice $x\in(0,e]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $(0,e]$	**2p**
	$f'(x)\leq 0$ pentru orice $x\in[e,+\infty)\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[e,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_0^1\left(f(x)-\dfrac{1}{x+1}\right)dx=\int_0^1\left(x+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+1}\right)dx=\int_0^1 x\,dx=$	**3p**
	$=\dfrac{x^2}{2}\Big\vert_0^1=\dfrac{1}{2}$	**2p**
b)	$\int_0^1 xf(x)\,dx=\int_0^1\left(x^2+\dfrac{x}{x+1}\right)dx=\int_0^1\left(x^2+1-\dfrac{1}{x+1}\right)dx=$	**2p**
	$=\left(\dfrac{x^3}{3}+x-\ln(x+1)\right)\Big\vert_0^1=\dfrac{4}{3}-\ln 2$	**3p**
c)	$\mathcal{A}=\int_0^1\vert f(x)\vert\,dx=\int_0^1\left(x+\dfrac{1}{x+1}\right)dx=\left(\dfrac{x^2}{2}+\ln(x+1)\right)\Big\vert_0^1=\dfrac{1}{2}+\ln 2$	**3p**
	$\dfrac{1}{2}+\ln 2=\dfrac{1}{2}+\ln(n^2+n)\Rightarrow n=-2$ nu este număr natural şi $n=1$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați al doilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1=1$ și rația $r=2$.

5p **2.** Determinaţi numărul real m, știind că punctul $A(m,0)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2\left(x^2+4\right)=\log_2 8$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $M=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, acesta să fie divizibil cu 3.

5p **5.** Determinaţi numărul real a, știind că vectorii $\vec{u}=(a+1)\vec{i}+4\vec{j}$ și $\vec{v}=\vec{i}+2\vec{j}$ sunt coliniari.

5p **6**. Arătați că $\sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, știind că $\sin x=\frac{1}{2}$ și $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 3 \\ a-1 & 2 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $A(2014)+A(2016)=2A(2015)$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care $\det(A(a))=0$.

5p **c)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\det(A(2)+xA(3))=0$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=-xy-x-y-2$.

5p **a)** Arătați că $(-1)*1=-1$.

5p **b)** Arătaţi că $x*y=-(x+1)(y+1)-1$, pentru orice numere reale x şi y.

5p **c)** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $(x+2)*(2x-3)=5$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4-8x^2+16$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=4x(x-2)(x+2)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-x^4}{x^2+1}$.

5p **c)** Determinaţi coordonatele punctelor situate pe graficul funcției f, în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu axa Ox.

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+2}{x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2 xf(x)\,dx=\frac{7}{2}$.

5p **b)** Demonstrați că funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=x+2\ln x+2015$ este o primitivă a funcției f.

5p **c)** Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=(f(x)-1)\ln x$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=1$ și $x=e$ are aria egală cu 1.

Examenul de bacalaureat naţional 2015

Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numerele complexe $z_1 = 3 + i$ şi $z_2 = 3 - i$. Arătaţi că numărul $z_1 z_2$ este real.

5p **2.** Determinaţi numărul real a, ştiind că punctul $A(1, 1)$ aparţine graficului funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + a$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt[3]{x^3 + 2x - 4} = x$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea $A = \{1, 2, 3, ..., 80\}$, acesta să fie divizibil cu 7.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0, 0)$, $A(1, 2)$ şi $B(2, a)$. Determinaţi numărul real a, ştiind că punctele O, A şi B sunt coliniare.

5p **6.** Se consideră $E(x) = \cos\frac{x}{2} + \sin x$, unde x este număr real. Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 2 & x \\ x & 2 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\det(A(0)) = 4$.

5p **b)** Determinaţi numărul real a, ştiind că $A(1) + A(3) = a\,A(2)$.

5p **c)** Arătaţi că $A(x)A(y) = 2A(x + y) + xyI_2$, pentru orice numere reale x şi y, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x * y = 3xy + 6x + 6y + 10$.

5p **a)** Arătaţi că $2 * (-2) = -2$.

5p **b)** Arătaţi că $x * y = 3(x + 2)(y + 2) - 2$, pentru orice numere reale x şi y.

5p **c)** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x * x * x = x$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x + 1)e^x$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x) = (x + 2)e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcţiei f.

5p **c)** Arătaţi că funcţia f este convexă pe intervalul $[-3, +\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x}{x^2 + 1}$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_{-1}^{1} \left(x^2 + 1\right) f(x)\,dx = 0$.

5p **b)** Arătaţi că $\int_{0}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{2} + \ln 2$.

5p **c)** Determinaţi numărul real m, $m > 0$, ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - x$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = 0$ şi $x = m$, are aria egală cu $\ln 2$.

Examenul de bacalaureat naţional 2015

Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculaţi $(2-3i)(2+3i)$, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Calculaţi $f(f(3))$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3\left(x^2+17\right)=\log_3 81$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 5.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,a)$, $B(3,2)$ şi $C(2,1)$. Determinaţi numărul real a pentru care punctele A, B şi C sunt coliniare.

5p **6.** Se consideră $E(x)=\sin\frac{x}{3}+\cos\frac{x}{2}$, unde x este număr real. Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 2a\\ 2a & 4\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $A(1)+A(-1)=2A(0)$.

5p **b)** Determinaţi numerele reale a pentru care $\det(A(a))=0$.

5p **c)** Rezolvaţi în mulţimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuaţia $A(2)\cdot X=A(8)$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x\circ y=2xy-6x-6y+21$.

5p **a)** Arătaţi că $(-3)\circ 3=3$.

5p **b)** Arătaţi că $x\circ y=2(x-3)(y-3)+3$, pentru orice numere reale x şi y.

5p **c)** Calculaţi $1\circ\sqrt{2}\circ\sqrt{3}\circ\ldots\circ\sqrt{2015}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3e^x+x^2$.

5p **a)** Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=3$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcţiei f.

5p **c)** Arătaţi ca funcţia f este convexă pe $\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\frac{1}{x}$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_1^3\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)dx=4$.

5p **b)** Arătaţi că $\int_1^2\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)e^x dx=e^2$.

5p **c)** Determinaţi numărul real a, $a>1$, ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=1$ şi $x=a$, are aria egală cu $4+\ln a$.

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numărul complex $z=1+i$. Arătați că $z^2-2i=0$.

5p **2.** Calculați $(g\circ f)(3)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-3$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x+2015$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^{x^2-5x}=5^{3-3x}$.

5p **4.** Determinaţi numărul submulțimilor cu patru elemente ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(0,4)$. Determinaţi ecuaţia dreptei d care trece prin punctul A şi este paralelă cu dreapta de ecuaţie $y=2x+7$.

5p **6.** Determinaţi aria triunghiului MNP, ştiind că $MN=12$, $MP=3$ și $m(\sphericalangle M)=30°$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & -a\\ -a & 1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=1$.

5p **b)** Determinați numerele reale a, pentru care $\det(A(a))=0$.

5p **c)** Arătați că $A(a)A(b)=A(a+b)+abI_2$, pentru orice numere reale a și b, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-mX+2$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(0)=2$.

5p **b)** Determinați numărul real m, știind că restul împărțirii lui f la polinomul $g=X^2+X-2$ este egal cu 0.

5p **c)** Demonstrați că $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-6$, pentru orice număr real m, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-x-1$.

5p **a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=0$.

5p **b)** Arătați că funcția f este descrescătoare pe intervalul $(-\infty,0]$.

5p **c)** Demonstrați că $e^x\geq x+1$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x+5$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1\left(f(x)+2x-5\right)dx=\dfrac{1}{3}$.

5p **b)** Calculaţi $\int_0^2\dfrac{f'(x)}{f(x)}dx$.

5p **c)** Arătați că $\int_{2014}^{2015}\dfrac{1}{f(x)}dx\leq\dfrac{1}{4}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2015

Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculaţi raţia progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $a_3=6$ şi $a_4=8$.

5p **2.** Determinaţi valoarea minimă a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-9$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2+3}=x+1$.

5p **4.** Determinaţi numărul submulţimilor cu două elemente ale mulţimii $\{1,2,3,4,5,6,7\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,1)$ şi $B(0,3)$. Determinaţi ecuaţia dreptei AB.

5p **6.** Calculaţi lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC în care $AB=8$ şi $C=\frac{\pi}{6}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ şi $B(x)=\begin{pmatrix}x & 2\\ 3 & 6\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\det A=-2$.

5p **b)** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\det(B(x)+I_2)=8$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **c)** Determinaţi numărul real x pentru care $A\cdot B(x)=B(x)\cdot A$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=xy-7x-7y+56$.

5p **a)** Arătaţi că $(-7)*7=7$.

5p **b)** Arătaţi că $x*y=(x-7)(y-7)+7$, pentru orice numere reale x şi y.

5p **c)** Calculaţi $1*2*3*\cdots*2015$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-\ln x+x$.

5p **a)** Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=e$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcţiei f.

5p **c)** Arătaţi că funcţia f este convexă pe intervalul $(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx=\frac{3}{2}$.

5p **b)** Arătaţi că $\int_0^1 x^2 f(x)dx=-\frac{1}{2}+\ln 2$.

5p **c)** Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$.

Examenul de bacalaureat naţional 2015
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculaţi suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $a_1=3$ şi raţia $r=2$.

5p **2.** Determinaţi coordonatele vârfului parabolei asociate funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x-2$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2-4x+5}=1$.

5p **4.** Determinaţi numărul submulţimilor cu trei elemente ale mulţimii $\{1,2,3,4,5\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3)$, $B(-2,1)$ şi $C(-2,5)$. Determinaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{AM}$, ştiind că M este mijlocul segmentului BC.

5p **6.** Calculaţi $\operatorname{ctg} a$, ştiind că $\sin a=\frac{1}{3}$ şi $a\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}2 & x\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Calculaţi $\det(A(3))$.

5p **b)** Arătaţi că $A(-2015)+A(2015)=2A(0)$.

5p **c)** Determinaţi numerele reale x pentru care $\det(A(x))=x^2$.

2. În $\mathbb{Z}_5[X]$ se consideră polinomul $f=X^3+aX$, unde $\mathbb{Z}_5=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4}\}$ şi $a\in\mathbb{Z}_5$.

5p **a)** Calculaţi $f(\hat{0})$.

5p **b)** Determinaţi $a\in\mathbb{Z}_5$, ştiind că $f(\hat{3})=\hat{3}$.

5p **c)** Arătaţi că, dacă $f(\hat{1})=f(\hat{2})$, atunci $f(\hat{3})=f(\hat{4})$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+\ln x}{x}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=1$, situat pe graficul funcţiei f.

5p **c)** Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.

2. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\frac{1}{x+1}$.

5p **a)** Calculaţi $\int_0^1\left(f(x)-\frac{1}{x+1}\right)dx$.

5p **b)** Arătaţi că $\int_0^1 xf(x)\,dx=\frac{4}{3}-\ln 2$.

5p **c)** Determinaţi numărul natural nenul n, ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=0$, $x=1$, are aria egală cu $\frac{1}{2}+\ln(n^2+n)$.

Examenul de bacalaureat naţional 2016
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 01

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(\sqrt{5}+2\right)^2=9+4\sqrt{5}$	**3p**
	$9+4\sqrt{5}-4\sqrt{5}=9$	**2p**
2.	$f(m)=4\Rightarrow m+2=4$	**3p**
	$m=2$	**2p**
3.	$x^2+9=25\Rightarrow x^2-16=0$	**2p**
	$x=-4$ sau $x=4$, care verifică ecuația	**3p**
4.	Mulțimea M are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile	**1p**
	În mulțimea M sunt 4 numere divizibile cu 2, deci sunt 4 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{4}{9}$	**2p**
5.	$\dfrac{a-1}{2}=\dfrac{-3}{-6}$	**3p**
	$a=2$	**2p**
6.	Cum $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, obținem $\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	**2p**
	$\sin 2x=2\sin x\cos x=2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A(0)\right)=\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1\cdot1-0\cdot0=1$	**3p**
b)	$A(x)A(y)=\begin{pmatrix}1+3x&2x\\-6x&1-4x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+3y&2y\\-6y&1-4y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+3x+3y-3xy&2x+2y-2xy\\-6x-6y+6xy&1-4x-4y+4xy\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1+3(x+y-xy)&2(x+y-xy)\\-6(x+y-xy)&1-4(x+y-xy)\end{pmatrix}=A(x+y-xy)$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
c)	$A\left(2^x+2^x-2^x\cdot2^x\right)=A(1)\Leftrightarrow2^x+2^x-2^x\cdot2^x=1$	**3p**
	$\left(2^x-1\right)^2=0\Leftrightarrow x=0$	**2p**
2.a)	$f(-1)=(-1)^3-(-1)^2+a\cdot(-1)+2=-a$	**2p**
	$f(1)=1^3-1^2+a\cdot1+2=a+2\Rightarrow f(-1)+f(1)=-a+a+2=2$, pentru orice număr real a	**3p**
b)	Restul împărțirii polinomului f la polinomul X^2-2X+2 este aX	**3p**
	Polinomul f este divizibil cu polinomul $X^2-2X+2\Leftrightarrow a=0$	**2p**

c)	$x_1+x_2+x_3=1,\ x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=a \Rightarrow x_1^2+x_2^2+x_3^2=1-2a$	**3p**
	$x_1^3+x_2^3+x_3^3=\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)-a\left(x_1+x_2+x_3\right)-6=1-2a-a-6=-3a-5$	**1p**
	$x_1^3+x_2^3+x_3^3+3\left(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3\right)=-3a-5+3a=-5$, pentru orice număr real a	**1p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{(2x+2)(x-3)-\left(x^2+2x-11\right)}{(x-3)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}=\dfrac{(x-1)(x-5)}{(x-3)^2},\ x\in(3,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2x-11}{x(x-3)}=1$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2x-11-x^2+3x}{x-3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x-11}{x-3}=5$, deci dreapta de ecuație $y=x+5$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	**3p**
c)	$f'(x)<0$, pentru orice $x\in(3,5)\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(3,5)$	**3p**
	Cum $3<\pi<4$ şi $f(4)=13$, obținem $f(\pi)>13$	**2p**
2.a)	$\int_0^1\dfrac{1}{e^x}f(x)\,dx=\int_0^1(3x+1)\,dx=$	**2p**
	$=\left(\dfrac{3x^2}{2}+x\right)\Big\vert_0^1=\dfrac{3}{2}+1=\dfrac{5}{2}$	**3p**
b)	$F'(x)=(3x+m)'e^x+(3x+m)\left(e^x\right)'=3e^x+(3x+m)e^x=(3x+m+3)e^x$	**3p**
	$F'(x)=f(x)\Leftrightarrow(3x+m+3)e^x=(3x+1)e^x$, pentru orice număr real x, deci $m=-2$	**2p**
c)	$\int_0^a(3x+1)e^x\,dx=(3x-2)e^x\Big\vert_0^a=(3a-2)e^a+2$	**2p**
	$(3a-2)e^a+2=3a\Leftrightarrow(3a-2)\left(e^a-1\right)=0$ şi, cum a este număr real nenul, obținem $a=\dfrac{2}{3}$	**3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2016
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$b_2 = b_1 \cdot q = 4 \cdot 2 =$	**3p**
	$= 8$	**2p**
2.	$x_V = 1$	**2p**
	$y_V = -1$	**3p**
3.	$2x + 1 = 5 \Rightarrow 2x = 4$	**3p**
	$x = 2$, care verifică ecuația	**2p**
4.	$C_5^2 = \dfrac{5!}{2! \cdot 3!} =$	**3p**
	$= 10$	**2p**
5.	$0 = m \cdot 1 - 2$	**3p**
	$m = 2$	**2p**
6.	$\dfrac{AB}{\sin C} = 2R \Rightarrow R = \dfrac{\sqrt{2}}{2 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}} =$	**3p**
	$= 1$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(2)) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} =$	**2p**
	$= 0 - 1 = -1$	**3p**
b)	$A(a) + A(-a) = \begin{pmatrix} 2-a & 1 \\ 1 & 2-a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2+a & 1 \\ 1 & 2+a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} =$	**3p**
	$= 2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2A(0)$, pentru orice număr real a	**2p**
c)	$A(x)A(x) = \begin{pmatrix} x^2 - 4x + 5 & 4 - 2x \\ 4 - 2x & x^2 - 4x + 5 \end{pmatrix}$, $2A(1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$	**3p**
	$\begin{cases} x^2 - 4x + 5 = 2 \\ 4 - 2x = 2 \end{cases}$, de unde obținem $x = 1$	**2p**
2.a)	$f(-1) = (-1)^3 - 4 \cdot (-1)^2 + m \cdot (-1) + 4 = -m - 1$	**2p**
	$f(1) = 1^3 - 4 \cdot 1^2 + m \cdot 1 + 4 = m + 1 \Rightarrow f(-1) + f(1) = -m - 1 + m + 1 = 0$, pentru orice număr real m	**3p**
b)	$m = -1 \Rightarrow f(-1) = f(1) = 0$	**3p**
	$X - 1$ divide f și $X + 1$ divide f, deci polinomul f se divide cu polinomul $X^2 - 1$	**2p**

c)	$x_1+x_2+x_3=4$, $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=m \Rightarrow x_1^2+x_2^2+x_3^2=16-2m$	**3p**
	Cum $x_1x_2x_3=-4$ şi $x_1^2+x_2^2+x_3^2-\dfrac{4\left(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1\right)}{x_1x_2x_3}=16-2m-\dfrac{4m}{-4}=16-m$, obţinem $m=16$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{(2x-1)(x-1)-\left(x^2-x+1\right)}{(x-1)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}=\dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$, $x\in(1,+\infty)$	**2p**
b)	$f(2)=3$, $f'(2)=0$	**2p**
	Ecuaţia tangentei este $y-f(2)=f'(2)(x-2)$, adică $y=3$	**3p**
c)	$f'(x)>0$, pentru orice $x\in(2,+\infty)\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(2,+\infty)$	**2p**
	Cum $2<e<3$ şi $f(3)=\dfrac{7}{2}$, obţinem $f(e)<\dfrac{7}{2}$	**3p**
2.a)	$\displaystyle\int_1^2 x^2 f(x)\,dx=\int_1^2 e^x\,dx=e^x\Big|_1^2=$	**3p**
	$=e^2-e=e(e-1)$	**2p**
b)	F este o primitivă a funcţiei $f\Rightarrow F'(x)=f(x)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p**
	$F''(x)=\dfrac{e^x(x-2)}{x^3}\geq 0$, pentru orice $x\in[2,+\infty)$, deci funcţia F este convexă pe $[2,+\infty)$	**3p**
c)	$\mathcal{A}=\displaystyle\int_1^2\left|f(x)\right|dx=\int_1^2\frac{e^x}{x^2}dx$	**2p**
	Cum $x\geq 1\Rightarrow x^2\geq 1\Rightarrow \dfrac{1}{x^2}\leq 1$, obţinem $\dfrac{e^x}{x^2}\leq e^x$, deci $\mathcal{A}\leq\displaystyle\int_1^2 e^x\,dx$, adică $\mathcal{A}\leq e(e-1)$	**3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2016
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z^2=(1-i)^2=1-2i+i^2=$	**2p**
	$=1-2i-1=-2i$	**3p**
2.	$f(0)=2016$	**2p**
	$(g\circ f)(0)=g(f(0))=g(2016)=0$	**3p**
3.	$x^2-3x=x-4\Leftrightarrow x^2-4x+4=0$	**3p**
	$x=2$	**2p**
4.	Mulțimea M are 100 de elemente, deci sunt 100 de cazuri posibile	**1p**
	În mulțimea M sunt 10 pătrate perfecte, deci sunt 10 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{10}{100}=\frac{1}{10}$	**2p**
5.	Panta unei drepte paralele cu dreapta d este egală cu 3	**2p**
	Ecuația dreptei care trece prin punctul A și este paralelă cu dreapta d este $y=3x+1$	**3p**
6.	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{6\cdot 4\cdot \sin\frac{\pi}{6}}{2}=\frac{6\cdot 4\cdot \frac{1}{2}}{2}=$	**3p**
	$=6$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & -2\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(0))=\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 2 & -2\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=2-(-2)=4$	**3p**
b)	$A(1+m)+A(1-m)=\begin{pmatrix}1+m-1 & -1\\ 2 & 1+m-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1-m-1 & -1\\ 2 & 1-m-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 4 & -2\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=2\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}=2A(1)$, pentru orice număr real m	**2p**
c)	$\det(A(m))=\begin{vmatrix}m-1 & -1\\ 2 & m-2\end{vmatrix}=m^2-3m+4$	**2p**
	Pentru orice număr real m, $m^2-3m+4\neq 0$, deci matricea $A(m)$ este inversabilă	**3p**
2.a)	$x*y=-3xy+9x+9y-27+3=$	**2p**
	$=-3x(y-3)+9(y-3)+3=-3(x-3)(y-3)+3$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
b)	$(x*y)*z=(-3(x-3)(y-3)+3)*z=9(x-3)(y-3)(z-3)+3$	**2p**
	$x*(y*z)=x*(-3(y-3)(z-3)+3)=9(x-3)(y-3)(z-3)+3=(x*y)*z$, pentru orice numere reale x, y și z, deci legea de compoziție „$*$” este asociativă	**3p**

c)	$(x*x)*x=9(x-3)^3+3$	**2p**
	$9(x-3)^3+3=12\Leftrightarrow(x-3)^3=1\Leftrightarrow x=4$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=3x^2-\frac{3}{x}=$	**3p**
	$=\frac{3x^3-3}{x}=\frac{3\left(x^3-1\right)}{x},\ x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(x^3-3\ln x\right)=+\infty$	**2p**
	Dreapta de ecuație $x=0$ este asimptotă verticală la graficul funcției f	**3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$	**1p**
	$x\in(0,1]\Rightarrow f'(x)\le 0$, deci f este descrescătoare pe $(0,1]$	**1p**
	$x\in[1,+\infty)\Rightarrow f'(x)\ge 0$, deci f este crescătoare pe $[1,+\infty)$	**1p**
	Cum $f(1)=1$, obținem $f(x)\ge 1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_1^2\left(x^2+3x+3\right)f(x)\,dx=\int_1^2(2x+3)\,dx=\left(x^2+3x\right)\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=10-4=6$	**2p**
b)	$\mathcal{A}=\int_0^3\vert f(x)\vert dx=\int_0^3\frac{2x+3}{x^2+3x+3}\,dx=\ln\left(x^2+3x+3\right)\Big\vert_0^3=$	**3p**
	$=\ln 21-\ln 3=\ln 7$	**2p**
c)	$\int_{-1}^0 f'(x)\,f(x)\,dx=\frac{1}{2}f^2(x)\Big\vert_{-1}^0=$	**3p**
	$=\frac{1}{2}\left(f^2(0)-f^2(-1)\right)=\frac{1}{2}(1-1)=0$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2016
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$q=\frac{b_4}{b_3}=\frac{10}{5}=$	**3p**
	$=2$	**2p**
2.	$x\le 5\Rightarrow x-3\le 2$	**2p**
	$f(x)\le 2$, deci valoarea maximă a funcției este 2	**3p**
3.	$x^2+12=(x+2)^2\Rightarrow 4x-8=0$	**3p**
	$x=2$, care verifică ecuația	**2p**
4.	$C_7^2=\frac{7!}{2!\cdot 5!}=$	**3p**
	$=21$	**2p**
5.	$\frac{y-0}{4-0}=\frac{x-1}{3-1}$	**3p**
	$y=2x-2$	**2p**
6.	$\frac{AB}{\sin C}=2R\Rightarrow R=\frac{6}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=$	**3p**
	$=2\sqrt{3}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(0))=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1-0=1$	**3p**
b)	$A(x)A(y)=\begin{pmatrix}1+x & -x\\ 2x & 1-2x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+y & -y\\ 2y & 1-2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+x+y-xy & -y-x+xy\\ 2x+2y-2xy & 1-2y-2x+2xy\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1+(x+y-xy) & -(x+y-xy)\\ 2(x+y-xy) & 1-2(x+y-xy)\end{pmatrix}=A(x+y-xy)$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
c)	$A(x)A(x)=I_2$ și, cum $I_2=A(0)$, obținem $A(x+x-x^2)=A(0)$	**3p**
	$2x-x^2=0\Leftrightarrow x=0$ sau $x=2$	**2p**
2.a)	$x\circ y=2xy-6x-6y+18+3=$	**2p**
	$=2x(y-3)-6(y-3)+3=2(x-3)(y-3)+3$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
b)	$1\circ 2\circ 3\circ 4=((1\circ 2)\circ 3)\circ 4=$	**3p**
	$=3\circ 4=3$	**2p**

c)	$x\circ x=2(x-3)^2+3,\ x\circ x\circ x=4(x-3)^3+3$	**2p**
	$4(x-3)^3+3=x\Leftrightarrow x=\frac{5}{2}$ sau $x=3$ sau $x=\frac{7}{2}$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=x'-(\ln x)'=$	**2p**
	$=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x},\ x\in(0,+\infty)$	**3p**
b)	$f''(x)=\frac{1}{x^2},\ x\in(0,+\infty)$	**2p**
	$f''(x)>0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)\Rightarrow f$ este convexă pe intervalul $(0,+\infty)$	**3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$	**1p**
	$x\in(0,1]\Rightarrow f'(x)\le 0$, deci f este descrescătoare pe $(0,1]$	**1p**
	$x\in[1,+\infty)\Rightarrow f'(x)\ge 0$, deci f este crescătoare pe $[1,+\infty)$	**1p**
	Cum $f(1)=1$, obţinem $f(x)\ge 1$, deci $\ln x\le x-1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_0^1\left(x^2+1\right)f(x)dx=\int_0^1\left(x^2+1\right)\cdot\frac{1}{x^2+1}dx=\int_0^1 1dx=x\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=1-0=1$	**2p**
b)	$\int_0^1 x^2 f(x)dx=\int_0^1\frac{x^2}{x^2+1}dx=\int_0^1 1dx-\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx=$	**2p**
	$=x\Big\vert_0^1-\operatorname{arctg}x\Big\vert_0^1=1-\operatorname{arctg}1=1-\frac{\pi}{4}$	**3p**
c)	$\int_n^{n+1}2xf(x)dx=\int_n^{n+1}\frac{2x}{x^2+1}dx=\ln\left(x^2+1\right)\Big\vert_n^{n+1}=\ln\frac{(n+1)^2+1}{n^2+1}$	**3p**
	$\ln\frac{(n+1)^2+1}{n^2+1}=\ln 2\Leftrightarrow n^2-2n=0\Leftrightarrow n=0$ sau $n=2$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2016

Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$b_1 \cdot q^4 = 48$ şi $b_1 \cdot q^7 = 384 \Rightarrow q = 2$	**3p**
	$b_1 = 3$	**2p**
2.	$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1$ şi $x_2 = 6$, deci graficul funcţiei f intersectează axa Ox în punctele $(1,0)$ şi $(6,0)$	**3p**
	Distanţa dintre punctele de intersecţie a graficului funcţiei f cu axa Ox este egală cu 5	**2p**
3.	$\left(2^5\right)^x = 2^4 \cdot 2^x \Leftrightarrow 5x = 4 + x$	**3p**
	$x = 1$	**2p**
4.	Mulţimea $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ are 5 elemente, deci sunt 5 cazuri posibile	**1p**
	În mulţimea $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ sunt 2 numere care verifică egalitatea, deci sunt 2 cazuri favorabile	**2p**
	$p = \dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \dfrac{2}{5}$	**2p**
5.	$\dfrac{a+1}{6} = \dfrac{a-1}{2} \Leftrightarrow 2a + 2 = 6a - 6$	**3p**
	$a = 2$	**2p**
6.	$(2\sin x + \cos x)^2 = 4\sin^2 x + 4\sin x \cos x + \cos^2 x$	**2p**
	$(\sin x + 2\cos x)^2 = \sin^2 x + 4\sin x \cos x + 4\cos^2 x \Rightarrow (2\sin x + \cos x)^2 + (\sin x + 2\cos x)^2 - 4\sin 2x = 5\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) + 8\sin x \cos x - 4 \cdot 2\sin x \cos x = 5$, pentru orice număr real x	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$, $\det(2A) = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} =$	**3p**
	$= 2 \cdot 2 - 4 \cdot 8 = 4 - 32 = -28$	**2p**
b)	$A + 2B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2x \\ 2y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2+2x \\ 4+2y & 1 \end{pmatrix}$	**2p**
	$\begin{pmatrix} 1 & 2+2x \\ 4+2y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x = -1$ şi $y = -2$	**3p**
c)	$AB = \begin{pmatrix} 2y & x \\ y & 4x \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 4x & x \\ y & 2y \end{pmatrix}$	**2p**
	$AB = BA \Leftrightarrow y = 2x$, deci $\det B = \begin{vmatrix} 0 & x \\ 2x & 0 \end{vmatrix} = -2x^2 \leq 0$, pentru orice număr real x	**3p**

2.a)	$(-1)\circ 1=3\cdot(-1)\cdot 1+3\cdot(-1)+3\cdot 1+2=$	**3p**
	$=-3-3+3+2=-1$	**2p**
b)	$3x^2+3x+3x+2=x\Leftrightarrow 3x^2+5x+2=0$	**3p**
	$x_1=-\frac{2}{3}$ şi $x_2=-1$	**2p**
c)	$3ab+3a+3b+3-1=8\Leftrightarrow (a+1)(b+1)=3$	**3p**
	Cum a şi b sunt numere întregi, obţinem $(-4,-2)$, $(-2,-4)$, $(0,2)$ şi $(2,0)$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=(x-2)'e^x+(x-2)(e^x)'=$	**2p**
	$=e^x+(x-2)e^x=(x-1)e^x,\ x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x-2)e^x=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-2}{e^{-x}}=0$	**3p**
	Dreapta de ecuaţie $y=0$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ la graficul funcţiei f	**2p**
c)	$f''(x)=xe^x$, $f''(x)=0\Leftrightarrow x=0$	**2p**
	$f''(x)\le 0$, pentru orice $x\in(-\infty,0]\Rightarrow f'$ este descrescătoare pe $(-\infty,0]$	**1p**
	$f''(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[0,+\infty)\Rightarrow f'$ este crescătoare pe $[0,+\infty)\Rightarrow f'(x)\ge f'(0)=-1$, pentru orice număr real x	**2p**
2.a)	$\int_1^2\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)dx=\int_1^2 2x\,dx=x^2\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=4-1=3$	**2p**
b)	$F'(x)=\left(x^2+\ln x+2016\right)'=2x+\frac{1}{x}=$	**2p**
	$=\frac{2x^2+1}{x}=f(x)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci F este o primitivă a funcţiei f	**3p**
c)	$V=\pi\int_1^2 g^2(x)dx=\pi\int_1^2\left(\frac{2x^2+1}{x}\right)^2dx=\pi\int_1^2\left(4x^2+4+\frac{1}{x^2}\right)dx=$	**2p**
	$=\pi\left(\frac{4x^3}{3}+4x-\frac{1}{x}\right)\Big\vert_1^2=\frac{83\pi}{6}<14\pi$	**3p**

Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 01

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\left(\sqrt{5}+2\right)^2-4\sqrt{5}=9$.

5p **2.** Determinați numărul real m, știind că punctul $M(m,4)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_4\left(x^2+9\right)=\log_4 25$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $M=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, acesta să fie divizibil cu 2.

5p **5.** Determinaţi numărul real a, pentru care vectorii $\vec{u}=(a-1)\vec{i}-3\vec{j}$ și $\vec{v}=2\vec{i}-6\vec{j}$ sunt coliniari.

5p **6.** Dacă $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x=\frac{1}{2}$, arătați că $\sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1+3x & 2x\\ -6x & 1-4x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=1$.

5p **b)** Demonstrați că $A(x)A(y)=A(x+y-xy)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numărul real x, știind că $A\left(2^x\right)A\left(2^x\right)=A(1)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-X^2+aX+2$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(-1)+f(1)=2$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Determinați numărul real a, pentru care polinomul f este divizibil cu polinomul X^2-2X+2.

5p **c)** Demonstrați că $x_1^3+x_2^3+x_3^3+3x_1x_2+3x_2x_3+3x_1x_3=-5$, pentru orice număr real a, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(3,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+2x-11}{x-3}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{(x-1)(x-5)}{(x-3)^2}$, $x\in(3,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $f(\pi)>13$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(3x+1)e^x$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^1\frac{1}{e^x}f(x)\,dx=\frac{5}{2}$.

5p **b)** Determinați numărul real m, pentru care funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=(3x+m)e^x$ este o primitivă a funcției f.

5p **c)** Determinați numărul real nenul a, știind că $\int_0^a f(x)\,dx=3a$.

Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați al doilea termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_1=4$ și rația $q=2$.

5p **2.** Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuația $\log_3(2x+1)=\log_3 5$.

5p **4.** Determinați numărul submulțimilor cu două elemente ale mulțimii $\{0,1,2,3,4\}$.

5p **5.** Determinați numărul real m, știind că punctul $M(1,0)$ aparține dreptei de ecuație $y=mx-2$.

5p **6.** Calculați lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC, în care $AB=\sqrt{2}$ și $C=\frac{\pi}{4}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2-a & 1\\ 1 & 2-a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(2))=-1$.

5p **b)** Demonstrați că $A(a)+A(-a)=2A(0)$, pentru orice număr real a.

5p **c)** Determinați numărul real x, știind că $A(x)A(x)=2A(1)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-4X^2+mX+4$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(-1)+f(1)=0$, pentru orice număr real m.

5p **b)** Pentru $m=-1$, arătați că polinomul f se divide cu polinomul X^2-1.

5p **c)** Determinați numărul real m, știind că $x_1^2+x_2^2+x_3^2-4\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=0$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x-1}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=2$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstraţi că $f(e)<\frac{7}{2}$.

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^x}{x^2}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2 x^2 f(x)\,dx=e(e-1)$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f este convexă pe intervalul $[2,+\infty)$.

5p **c)** Demonstrați că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=1$ şi $x=2$ are aria mai mică sau egală cu $e(e-1)$.

Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numărul complex $z=1-i$. Arătați că $z^2=-2i$.

5p **2.** Calculați $(g\circ f)(0)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2016$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x-2016$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x^2-3x}=3^{x-4}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $M=\{1,2,3,\ldots,100\}$, acesta să fie pătrat perfect.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(0,1)$. Determinați ecuația dreptei d, care trece prin punctul A și este paralelă cu dreapta de ecuație $y=3x-2016$.

5p **6.** Determinați aria triunghiului ABC, știind că $AB=6$, $AC=4$ și $A=\dfrac{\pi}{6}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix} m-1 & -1 \\ 2 & m-2 \end{pmatrix}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=4$.

5p **b)** Demonstrați că $A(1+m)+A(1-m)=2A(1)$, pentru orice număr real m.

5p **c)** Demonstrați că matricea $A(m)$ este inversabilă, pentru orice număr real m.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=-3xy+9x+9y-24$.

5p **a)** Arătați că $x*y=-3(x-3)(y-3)+3$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Demonstrați că legea de compoziție „$*$” este asociativă.

5p **c)** Determinați numărul real x, pentru care $(x*x)*x=12$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{3\left(x^3-1\right)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $f(x)\geq 1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+3}{x^2+3x+3}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_1^2\left(x^2+3x+3\right)f(x)\,dx=6$.

5p **b)** Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=3$ are aria egală cu $\ln 7$.

5p **c)** Demonstrați că $\displaystyle\int_{-1}^{0} f'(x)f(x)\,dx=0$.

Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați rația progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_3=5$ și $b_4=10$.

5p **2.** Determinați valoarea maximă a funcției $f:[1,5]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-3$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2+12}=x+2$.

5p **4.** Determinaţi numărul submulțimilor cu două elemente ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,4)$ și $B(1,0)$. Determinaţi ecuația dreptei AB.

5p **6.** Calculaţi lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC, în care $AB=6$ și $C=\frac{\pi}{3}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1+x & -x\\ 2x & 1-2x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=1$.

5p **b)** Demonstrați că $A(x)A(y)=A(x+y-xy)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale x, $x\neq 1$, pentru care matricea $A(x)$ este egală cu inversa ei.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=2xy-6x-6y+21$.

5p **a)** Arătați că $x\circ y=2(x-3)(y-3)+3$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Arătați că $1\circ 2\circ 3\circ 4=3$.

5p **c)** Determinați numerele reale x, pentru care $x\circ x\circ x=x$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln x$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{x-1}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Demonstrați că funcţia f este convexă pe intervalul $(0,+\infty)$.

5p **c)** Demonstrați că $\ln x\leq x-1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^1\left(x^2+1\right)f(x)\,dx=1$.

5p **b)** Demonstrați că $\int_0^1 x^2 f(x)\,dx=1-\frac{\pi}{4}$.

5p **c)** Determinaţi numerele naturale n, ştiind că $\int_n^{n+1}2xf(x)\,dx=\ln 2$.

Examenul de bacalaureat naţional 2016

Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați primul termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_5=48$ și $b_8=384$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-7x+6$. Determinați distanța dintre punctele de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $32^x=16\cdot 2^x$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr natural n din mulțimea $\{1,2,3,4,5\}$, acesta să verifice egalitatea $n^2-5n+6=0$.

5p **5.** Determinați numărul real a, știind că vectorii $\vec{u}=(a+1)\vec{i}+(a-1)\vec{j}$ și $\vec{v}=6\vec{i}+2\vec{j}$ sunt coliniari.

5p **6.** Arătați că $(2\sin x+\cos x)^2+(\sin x+2\cos x)^2-4\sin 2x=5$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 1\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}0 & x\\ y & 0\end{pmatrix}$, unde x și y sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det(2A)=-28$.

5p **b)** Determinați numerele reale x și y, știind că $A+2B=I_2$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **c)** Dacă $AB=BA$, arătați că $\det B\leq 0$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=3xy+3x+3y+2$.

5p **a)** Arătați că $(-1)\circ 1=-1$.

5p **b)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x\circ x=x$.

5p **c)** Determinați perechile (a,b) de numerele întregi, știind că $a\circ b=8$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-2)e^x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=(x-1)e^x$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $f'(x)\geq -1$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{x}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_1^2\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)dx=3$.

5p **b)** Demonstrați că funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=x^2+\ln x+2016$ este o primitivă a funcției f.

5p **c)** Arătați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$ este mai mic decât 14π.

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$r=a_2-a_1=3$	**3p**
	$a_3=10$	**2p**
2.	$x_1+x_2=4,\ x_1x_2=1$	**2p**
	$4x_1x_2-\left(x_1+x_2\right)=4\cdot 1-4=0$	**3p**
3.	$2^{2x+1}=2^{-3}\Leftrightarrow 2x+1=-3$	**3p**
	$x=-2$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre, multiplii de 15 sunt numerele 15, 30, 45, 60, 75 și 90, deci sunt 6 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{6}{90}=\dfrac{1}{15}$	**1p**
5.	$m_{AB}=0,\ m_{AC}=\dfrac{a-1}{3}$	**2p**
	$m_{AB}=m_{AC}\Leftrightarrow\dfrac{a-1}{3}=0\Leftrightarrow a=1$	**3p**
6.	$\dfrac{AB}{\sin C}=\dfrac{AC}{\sin B}\Rightarrow \sin B=\dfrac{4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{4\sqrt{3}}=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{2}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(A(1)\right)=\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0-1=-1$	**3p**
b)	$A(x)A(y)=\begin{pmatrix}0&x\\x&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&y\\y&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}xy&0\\0&xy\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=xy\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=xyI_2$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
c)	$A\left(3^a\right)A\left(3^{a+1}\right)A\left(3^{a+2}\right)=A\left(3^{3a+3}\right)$	**3p**
	$A\left(3^{3a+3}\right)=A(27)\Rightarrow 3^{3a+3}=3^3$, de unde obținem $a=0$	**2p**
2.a)	$f=X^3+X^2+2X-4\Rightarrow f(1)=1^3+1^2+2\cdot 1-4=$	**3p**
	$=1+1+2-4=0$	**2p**

b)	$f(-2)=0\Rightarrow m=4$, deci $f=X^3+4X^2+2X-4$	**3p**
	$f(-3)=-27+36-6-4=-1$	**2p**
c)	$x_1+x_2+x_3=-m$, $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=2$, $x_1x_2x_3=4$	**3p**
	$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+x_1+x_2+x_3=\frac{x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1}{x_1x_2x_3}+(x_1+x_2+x_3)=\frac{1}{2}-m$, deci $m=0$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{(x+2017)'e^x-(x+2017)(e^x)'}{(e^x)^2}=$	**3p**
	$=\frac{e^x(1-x-2017)}{(e^x)^2}=\frac{-(x+2016)}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f(0)=2017$, $f'(0)=-2016$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)$, adică $y=-2016x+2017$	**3p**
c)	$f''(x)=\frac{x+2015}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
	$f''(x)\geq 0$ pentru orice $x\in[-2015,+\infty)$, deci f este convexă pe $[-2015,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\int_0^1(x^2+1)dx=\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Big\|_0^1=$	**3p**
	$=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$	**2p**
b)	$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\operatorname{arctg}x+c$, unde $c\in\mathbb{R}$	**2p**
	$F(1)=\frac{\pi}{4}+c\Rightarrow c=1$, deci $F(x)=\operatorname{arctg}x+1$	**3p**
c)	$\int_0^n xf(x)dx=\int_0^n\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big\|_0^n=\frac{1}{2}\ln(n^2+1)$	**3p**
	$\frac{1}{2}\ln(n^2+1)=\frac{1}{2}\ln 5$, deci $n^2+1=5$, de unde obţinem $n=2$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2017
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z_1+z_2=(3+2i)+(3-2i)=$	**2p**
	$=6$, care este număr real	**3p**
2.	$f(2)=m \Leftrightarrow 4-3=m$	**3p**
	$m=1$	**2p**
3.	$3^{3x-5}=3^{-2} \Leftrightarrow 3x-5=-2$	**3p**
	$x=1$	**2p**
4.	Mulțimea A are 20 de elemente, deci sunt 20 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea A, multiplii de 5 sunt numerele 5, 10, 15 și 20, deci sunt 4 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{4}{20}=\dfrac{1}{5}$	**1p**
5.	Ecuația dreptei AB este $y=2x+1$	**3p**
	$C\in AB \Leftrightarrow 1=2m+1 \Leftrightarrow m=0$	**2p**
6.	$E\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos\dfrac{\pi}{6}+\sin\dfrac{\pi}{3}=$	**2p**
	$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}0&1&1\\2&0&1\\3&0&1\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0))=\begin{vmatrix}0&1&1\\2&0&1\\3&0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+0+3-0-0-2=1$	**3p**
b)	$A(x)+A(x+2)=\begin{pmatrix}x&x+1&1\\2&x&1\\3&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x+2&x+3&1\\2&x+2&1\\3&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x+2&2x+4&2\\4&2x+2&2\\6&0&2\end{pmatrix}$	**2p**
	$2A(2)=\begin{pmatrix}4&6&2\\4&4&2\\6&0&2\end{pmatrix}$, deci $x=1$	**3p**
c)	Punctele $M(n,n+1)$, $N(2,n)$ și $P(3,0)$ sunt coliniare $\Leftrightarrow \begin{vmatrix}n&n+1&1\\2&n&1\\3&0&1\end{vmatrix}=0$	**2p**
	$n^2-2n+1=0$, deci $n=1$	**3p**
2.a)	$f(1)=1^3+a\cdot 1^2+1-1=a+1$	**2p**
	$f(-1)=(-1)^3+a\cdot(-1)^2+(-1)-1=a-3 \Rightarrow f(1)-f(-1)=a+1-a+3=4$, pentru orice număr real a	**3p**

b)	$f=X^3+2X^2+X-1$, câtul este $X+1$	**3p**
	Restul este $-X-2$	**2p**
c)	$x_1+x_2+x_3=-a$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=1$, $x_1x_2x_3=1$	**3p**
	$x_1+x_2+x_3+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=x_1x_2x_3-1\Leftrightarrow -a+1=1-1$, deci $a=1$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{(2x-1)(x-1)-\left(x^2-x+1\right)\cdot 1}{(x-1)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}=\dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$, $x\in(1,+\infty)$	**2p**
b)	$f(2)=3$, $f'(2)=0$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(2)=f'(2)(x-2)$, adică $y=3$	**3p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{e^x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-x+1}{(x-1)\left(e^x+1\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-x+1}{x(x-1)}\cdot\dfrac{x}{e^x+1}\right)=$	**2p**
	$=1\cdot 0=0$, deoarece $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-x+1}{x(x-1)}=1$ şi $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$	**3p**
2.a)	$\int_0^1\left(f(x)-2x\right)dx=\int_0^1\left(e^x+2x-2x\right)dx=\int_0^1 e^x\,dx=e^x\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=e^1-e^0=e-1$	**2p**
b)	$g(x)=2x\Rightarrow V=\pi\int_0^1 g^2(x)\,dx=\pi\int_0^1 4x^2\,dx=$	**3p**
	$=4\pi\cdot\dfrac{x^3}{3}\Big\vert_0^1=\dfrac{4\pi}{3}$	**2p**
c)	$\int_0^a x\,f(x)\,dx=\int_0^a x\left(e^x+2x\right)dx=(x-1)e^x\Big\vert_0^a+2\cdot\dfrac{x^3}{3}\Big\vert_0^a=(a-1)e^a+1+\dfrac{2a^3}{3}$	**3p**
	$(a-1)e^a+1+\dfrac{2a^3}{3}=1+\dfrac{2a^3}{3}\Leftrightarrow(a-1)e^a=0\Leftrightarrow a=1$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_1 = a_3 - 2r = 10 - 6 =$ $= 4$	**3p** **2p**
2.	$f(1) = 3 \Leftrightarrow 1 - m + 2m = 3$ $m = 2$	**3p** **2p**
3.	$4^x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4^x = 4^{-1}$ $x = -1$	**3p** **2p**
4.	Cifra unităților se poate alege în 2 moduri Pentru fiecare alegere a cifrei unităților, cifra zecilor se poate alege în câte 3 moduri, deci se pot forma $3 \cdot 2 = 6$ numere	**2p** **3p**
5.	$x_M = 3$ și $y_M = 3$, unde M este mijlocul segmentului AB $m_{AB} = -1 \Rightarrow m_{\text{mediatoare}} = 1$, deci ecuația mediatoarei segmentului AB este $y = x$	**2p** **3p**
6.	$BC = 10$ $R = 5$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(-2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(-2)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 1 - 5 = -4$	**2p** **3p**
b)	$A(x) + A(-x) = \begin{pmatrix} 1 & 2x+5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2x+5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$ $A(2017) + A(-2017) = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 10 & 2 \end{pmatrix} = A(x) + A(-x)$, pentru orice număr real x	**3p** **2p**
c)	$A(0)\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p+5q \\ 5p+q \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} p+5q \\ 5p+q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow p = q = 1$	**3p** **2p**
2.a)	$x \circ y = xy + 6x + 6y + 36 - 6 =$ $= x(y+6) + 6(y+6) - 6 = (x+6)(y+6) - 6$, pentru orice numere reale x și y	**2p** **3p**
b)	$x \circ (-5) = (x+6) \cdot (-5+6) - 6 = x$ $(-5) \circ x = (-5+6) \cdot (x+6) - 6 = x = x \circ (-5)$, pentru orice număr real x	**2p** **3p**
c)	$(x+6)(-2017+6) - 6 = (2017+6)(-6+6) - 6$ $x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -6$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(\frac{2}{x}\right)'+(\ln x)'=$	**2p**
	$=-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x-2}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$	**3p**
b)	$f(1)=2$, $f'(1)=-1$	**2p**
	Ecuaţia tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)$, adică $y=-x+3$	**3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=2$	**1p**
	$x\in(0,2]\Rightarrow f'(x)\le 0$, deci f este descrescătoare pe $(0,2]$	**1p**
	$x\in[2,+\infty)\Rightarrow f'(x)\ge 0$, deci f este crescătoare pe $[2,+\infty)$	**1p**
	$f(x)\ge f(2)$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$ şi, cum $f(2)=1+\ln 2$, obţinem $\frac{2}{x}+\ln x\ge 1+\ln 2$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_1^2 2x f(x)dx=\int_1^2 2x\cdot\frac{x^2+2}{2x}dx=\int_1^2\left(x^2+2\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+2x\right)\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=\left(\frac{8}{3}+4\right)-\left(\frac{1}{3}+2\right)=\frac{13}{3}$	**2p**
b)	$F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{x^2}{4}+\ln x+c$, unde $c\in\mathbb{R}$	**3p**
	$F(1)=1\Rightarrow c=\frac{3}{4}$, deci $F(x)=\frac{x^2}{4}+\ln x+\frac{3}{4}$	**2p**
c)	$2\int_1^n\left(f(x)+xf'(x)\right)dx=2\int_1^n\left(xf(x)\right)'dx=2\left(xf(x)\right)\Big\vert_1^n=\left(x^2+2\right)\Big\vert_1^n=$	**3p**
	$=\left(n^2+2\right)-(1+2)=n^2-1$, pentru orice număr natural n, $n\ge 2$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați al treilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1=4$ și $a_2=7$.

5p **2.** Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2-4x+1=0$. Arătați că $4x_1x_2-(x_1+x_2)=0$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuația $2^{2x+1}=\frac{1}{8}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie multiplu de 15.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,1)$, $B(1,1)$ și $C(3,a)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, știind că punctele A, B și C sunt coliniare.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB=4\sqrt{3}$, $AC=4$ și $\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Calculați $\sin B$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}0 & x\\ x & 0\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=-1$.

5p **b)** Demonstrați că $A(x)A(y)=xyI_2$, pentru orice numere reale x și y, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **c)** Determinați numărul real a, știind că $A\left(3^a\right)A\left(3^{a+1}\right)A\left(3^{a+2}\right)=A(27)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+mX^2+2X-4$, unde m este număr real.

5p **a)** Pentru $m=1$, arătați că $f(1)=0$.

5p **b)** Arătați că, dacă polinomul f se divide cu $X+2$, atunci restul împărțirii lui f la $X+3$ este egal cu -1.

5p **c)** Determinați numărul real m, știind că $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+x_1+x_2+x_3=\frac{1}{2}$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+2017}{e^x}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{-(x+2016)}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este convexă pe $[-2015,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx=\frac{4}{3}$.

5p **b)** Determinați primitiva F a funcţiei f, știind că $F(1)=\frac{\pi}{4}+1$.

5p **c)** Determinați numărul natural n, știind că $\int_0^n xf(x)dx=\frac{1}{2}\ln 5$.

Examenul de bacalaureat naţional 2017
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numerele complexe $z_1 = 3+2i$ şi $z_2 = 3-2i$. Arătaţi că numărul $z_1 + z_2$ este real.

5p **2.** Determinaţi numărul real m, ştiind că punctul $M(2, m)$ aparţine graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{3x-5} = 3^{-2}$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea $A = \{1, 2, 3, \ldots, 20\}$, acesta să fie multiplu de 5.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,5)$, $B(1,3)$ şi $C(m,1)$, unde m este număr real. Determinaţi numărul real m, ştiind că punctul C aparţine dreptei AB.

5p **6.** Se consideră $E(x) = \cos\frac{x}{2} + \sin x$, unde x este număr real. Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x & x+1 & 1 \\ 2 & x & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\det(A(0)) = 1$.

5p **b)** Determinaţi numărul real x, pentru care $A(x) + A(x+2) = 2A(2)$.

5p **c)** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(n, n+1)$, $N(2, n)$ şi $P(3,0)$. Determinaţi numărul natural n, ştiind că punctele M, N şi P sunt coliniare.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 + aX^2 + X - 1$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $f(1) - f(-1) = 4$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Pentru $a = 2$, calculaţi câtul şi restul împărţirii polinomului f la polinomul $X^2 + X + 1$.

5p **c)** Determinaţi numărul real a pentru care $x_1 + x_2 + x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = x_1x_2x_3 - 1$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x-1}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x = 2$, situat pe graficul funcţiei f.

5p **c)** Demonstraţi că $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{e^x + 1} = 0$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = e^x + 2x$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^1 (f(x) - 2x)\,dx = e - 1$.

5p **b)** Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - e^x$.

5p **c)** Determinaţi numărul real a, ştiind că $\int_0^a x f(x)\,dx = 1 + \frac{2a^3}{3}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2017
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați primul termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_3=10$ și rația $r=3$.

5p **2.** Determinaţi numărul real m, știind că punctul $A(1,3)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx+2m$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $4^x+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

5p **4.** Determinaţi câte numere naturale pare, de două cifre distincte, au cifrele elemente ale mulțimii $\{1,2,3,4\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,2)$ şi $B(2,4)$. Determinați ecuația mediatoarei segmentului AB.

5p **6.** Calculaţi lungimea razei cercului circumscris triunghiului dreptunghic ABC care are catetele $AB=8$ și $AC=6$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 2x+5\\ 5 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(-2))=-4$.

5p **b)** Demonstrați că $A(x)+A(-x)=A(2017)+A(-2017)$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numerele reale p și q, pentru care $A(0)\begin{pmatrix}p\\ q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\ 6\end{pmatrix}$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție $x\circ y=xy+6x+6y+30$.

5p **a)** Arătați că $x\circ y=(x+6)(y+6)-6$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Arătați că $e=-5$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $x\circ(-2017)=2017\circ(-6)$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2}{x}+\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x-2}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcţiei f.

5p **c)** Demonstrați că $\frac{2}{x}+\ln x\geq 1+\ln 2$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+2}{2x}$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_1^2 2x\,f(x)\,dx=\frac{13}{3}$.

5p **b)** Determinați primitiva F a funcției f, pentru care $F(1)=1$.

5p **c)** Demonstrați că $2\int_1^n\left(f(x)+x\,f'(x)\right)dx=n^2-1$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$.

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$b_1b_3=b_2^2$	**2p**
	$b_1b_2b_3=b_2^3=4^3=64$	**3p**
2.	$f(1)=0$	**2p**
	$g(f(1))=g(0)=2018$	**3p**
3.	$5^{2x}=5^{x^2}\Leftrightarrow x^2-2x=0$	**3p**
	$x=0$ sau $x=2$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 10 numere care au cifra zecilor egală cu 9, deci sunt 10 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{10}{90}=\frac{1}{9}$	**2p**
5.	$m_d=\frac{a-1}{a^2}$	**2p**
	Dreapta d este paralelă cu axa $Ox\Leftrightarrow\frac{a-1}{a^2}=0$, deci $a=1$	**3p**
6.	Cum $\sin x=\frac{1}{\sqrt{5}}$ și $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, obținem $\cos x=\frac{2}{\sqrt{5}}$	**2p**
	$\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin x\cos x}=\frac{5}{2}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}3&1\\1&-2\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(1))=\begin{vmatrix}3&1\\1&-2\end{vmatrix}=3\cdot(-2)-1\cdot1=$	**3p**
	$=-6-1=-7$	**2p**
b)	$xA(y)-yA(x)=x\begin{pmatrix}y+2&y\\1&-2\end{pmatrix}-y\begin{pmatrix}x+2&x\\1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}xy+2x-yx-2y&xy-yx\\x-y&-2x+2y\end{pmatrix}=$	**2p**
	$=\begin{pmatrix}2(x-y)&0\\x-y&-2(x-y)\end{pmatrix}=(x-y)\begin{pmatrix}2&0\\1&-2\end{pmatrix}=(x-y)A(0)$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
c)	$aA(-1)-(-1)A(a)=(a+1)A(0)\Rightarrow(aA(-1)+A(a))A(0)=(a+1)A(0)A(0)=4(a+1)I_2$	**3p**
	$4(a+1)=a^2+7\Leftrightarrow a=1$ sau $a=3$	**2p**
2.a)	$f=4X^3-6X+2\Rightarrow f(1)=4\cdot1^3-6\cdot1+2=$	**3p**
	$=4-6+2=0$	**2p**

b)	Restul împărțirii polinomului f la X^2+X+1 este egal cu $-6X+m+4$	**3p**
	Cum pentru orice număr real m restul este nenul, polinomul f **nu** se divide cu X^2+X+1	**2p**
c)	$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-\frac{3}{2}$, $x_1x_2x_3=-\frac{m}{4}\Rightarrow\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=\frac{x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1}{x_1x_2x_3}=\frac{6}{m}$	**3p**
	$\left(\frac{6}{m}\right)^2=-\frac{4}{m}$ și, cum m este număr real nenul, obținem $m=-9$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=0-\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}-\left(-\frac{1}{x^2}\right)=$	**3p**
	$=-\frac{1-\ln x-1}{x^2}=\frac{\ln x}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$f(1)=0$, $f'(1)=0$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)$, adică $y=0$	**3p**
c)	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(0,1]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(0,1]$ și $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[1,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[1,+\infty)$	**2p**
	$f(x)\ge f(1)\Rightarrow f(x)\ge 0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci $f\left(\sqrt{x}\right)\ge 0\Rightarrow 1-\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\ge 0$, deci $\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\le 1-\frac{1}{\sqrt{x}}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\int_0^2(x+1)f(x)\,dx=\int_0^2\left(3x^3+3x^2+1\right)dx=\left(\frac{3x^4}{4}+x^3+x\right)\Big\vert_0^2=$	**3p**
	$=12+8+2=22$	**2p**
b)	$\int_0^1\left(f(x)-\frac{1}{x+1}\right)e^{x^3}dx=\int_0^1 3x^2e^{x^3}dx=e^{x^3}\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=e-1$	**2p**
c)	$g(x)=\frac{1}{x+1}\Rightarrow V=\pi\int_0^1 g^2(x)\,dx=\pi\int_0^1\frac{1}{(x+1)^2}dx=-\frac{\pi}{x+1}\Big\vert_0^1=-\frac{\pi}{2}+\pi=\frac{\pi}{2}$	**3p**
	$\frac{\pi}{n}=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow n=2$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_2=\frac{a_1+a_3}{2}=\frac{7+15}{2}=$	**3p**
	$=11$	**2p**
2.	$3n+2<8\Leftrightarrow n<2$	**2p**
	Cum n este număr natural, obținem $n=0$ sau $n=1$	**3p**
3.	$x^2-1=(x+1)^2\Rightarrow 2x+2=0$	**3p**
	$x=-1$, care convine	**2p**
4.	$C_5^3=\frac{5!}{3!\cdot 2!}=$	**3p**
	$=10$	**2p**
5.	$m_{d_1}=\frac{1}{2}$, $m_{d_2}=m-3$	**2p**
	d_1 și d_2 sunt perpendiculare $\Leftrightarrow m_{d_1}\cdot m_{d_2}=-1\Leftrightarrow \frac{1}{2}(m-3)=-1\Leftrightarrow m=1$	**3p**
6.	$\sin 2x=\frac{1}{2}\Rightarrow(\sin x+\cos x)^2=\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x=1+\sin 2x=$	**3p**
	$=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$X(3,1)=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 9 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow \det(X(3,1))=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 9 & 3\end{vmatrix}=3\cdot 3-9\cdot 1=$	**3p**
	$=9-9=0$	**2p**
b)	$X(a,b)X(c,d)=\begin{pmatrix}a & b\\ 9b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c & d\\ 9d & c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ac+9bd & ad+bc\\ 9bc+9ad & 9bd+ac\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}ac+9bd & ad+bc\\ 9(ad+bc) & ac+9bd\end{pmatrix}=X(ac+9bd,ad+bc)$, pentru orice numere reale a, b, c și d	**2p**
c)	$\det(X(m,n))=m^2-9n^2$	**2p**
	Cum m și n sunt numere întregi, $(m-3n)(m+3n)=1\Rightarrow m-3n=m+3n=-1$ sau $m-3n=m+3n=1$ și obținem $(-1,0)$ sau $(1,0)$	**3p**
2.a)	$f=2X^3-4X^2-7X+9\Rightarrow f(1)=2\cdot 1^3-4\cdot 1^2-7\cdot 1+9=$	**2p**
	$=2-4-7+9=0$	**3p**
b)	$f(-\sqrt{2})=0\Leftrightarrow 2\cdot(-2\sqrt{2})-4\cdot 2-7\cdot(-\sqrt{2})+m=0$	**3p**
	$m=8-3\sqrt{2}$	**2p**

c)	$x_1+x_2=1$ și $x_1+x_2+x_3=2\Rightarrow x_3=1$	**3p**
	$f(1)=0\Rightarrow m=9$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=(x-1)'e^x+(x-1)\left(e^x\right)'=$	**2p**
	$=e^x+(x-1)e^x=xe^x,\ x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x-1}{e^{-x}}+1\right)=1$, deoarece $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-1}{e^{-x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{-e^{-x}}=0$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=1$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	$f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[0,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[0,+\infty)$ și, cum $f(0)=0$, obținem $f(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$	**3p**
	$f\left(\dfrac{1}{n}\right)\geq 0$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$, deci $\left(\dfrac{1}{n}-1\right)e^{\frac{1}{n}}+1\geq 0\Rightarrow\sqrt[n]{e}\leq\dfrac{n}{n-1}$	**2p**
2.a)	$\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\,dx=\int_2^3 x(x-2)\,dx=\left(\dfrac{x^3}{3}-x^2\right)\Big\vert_2^3=$	**3p**
	$=9-9-\dfrac{8}{3}+4=\dfrac{4}{3}$	**2p**
b)	$g(x)=\sqrt{xe^x}\Rightarrow V=\pi\int_0^1 g^2(x)\,dx=\pi\int_0^1 xe^x\,dx=\pi(x-1)e^x\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=0-\pi\cdot(-1)\cdot e^0=\pi$	**2p**
c)	$\int_3^x f(t)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{t-2}}dt=\int_3^x t\,dt=\dfrac{t^2}{2}\Big\vert_3^x=\dfrac{x^2-9}{2}$	**3p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_3^x f(t)\cdot\frac{1}{\sqrt{t-2}}dt}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-9}{2x^2}=\dfrac{1}{2}$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$1+i+(i-1)(1+i)-(i-1)=1+i+(i^2-1)-i+1=$	**3p**
	$=1+i-2-i+1=0$	**2p**
2.	$f(1)=0$	**2p**
	$f(f(1))=f(0)=1$	**3p**
3.	$x^2-5x+7=3\Rightarrow x^2-5x+4=0$	**2p**
	$x=1$ sau $x=4$, care convin	**3p**
4.	Mulțimea numerelor naturale pare de două cifre are 45 de elemente, deci sunt 45 de cazuri posibile	**1p**
	În mulțimea numerelor naturale pare de două cifre sunt 9 numere divizibile cu 5, deci sunt 9 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{9}{45}=\frac{1}{5}$	**2p**
5.	$x_A+x_C=6$, $x_B+x_D=6\Rightarrow x_A+x_C=x_B+x_D$	**2p**
	$y_A+y_C=6$, $y_B+y_D=6\Rightarrow y_A+y_C=y_B+y_D\Rightarrow$ segmentele AC și BD au același mijloc, deci $ABCD$ este paralelogram	**3p**
6.	Cum $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\operatorname{tg}x=1$, obținem $x=\frac{\pi}{4}$	**2p**
	$\sin\frac{\pi}{4}+3\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$X(1)=\begin{pmatrix}1&5\\1&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det(X(1))=\begin{vmatrix}1&5\\1&1\end{vmatrix}=1\cdot1-1\cdot5=$	**3p**
	$=1-5=-4$	**2p**
b)	$X(-a)+X(a)=\begin{pmatrix}-a&5\\1&-a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a&5\\1&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&10\\2&0\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}-2018&5\\1&-2018\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2018&5\\1&2018\end{pmatrix}=X(-2018)+X(2018)$, pentru orice număr real a	**2p**
c)	$\begin{pmatrix}ab+5&5(a+b)\\a+b&ab+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b&10\\2&a+b\end{pmatrix}$	**3p**
	Cum $a+b=2$ și $ab=-3$, obținem perechile $(-1,3)$ și $(3,-1)$	**2p**
2.a)	$f=X^3-2X^2-X+2\Rightarrow f(2)=2^3-2\cdot2^2-2+2=$	**3p**
	$=8-8-2+2=0$	**2p**
b)	$f(-1)=0\Rightarrow m=2$, deci $f=X^3-2X^2-X+2$	**3p**
	Restul împărțirii lui f la X^2-3X+2 este 0, deci f se divide cu X^2-3X+2	**2p**

c)	$x_1+x_2+x_3=2,\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-1,\ x_1x_2x_3=-m$	**3p**
	$\dfrac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{x_1x_2x_3}=6\Leftrightarrow\dfrac{6}{-m}=6$, deci $m=-1$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{1\cdot(x+1)-x\cdot1}{(x+1)^2}+\dfrac{1\cdot(x+2)-(x+1)\cdot1}{(x+2)^2}+\dfrac{1\cdot(x+3)-(x+2)\cdot1}{(x+3)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{x+1-x}{(x+1)^2}+\dfrac{x+2-x-1}{(x+2)^2}+\dfrac{x+3-x-2}{(x+3)^2}=\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{(x+2)^2}+\dfrac{1}{(x+3)^2},\ x\in(-1,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x+2}{x+3}\right)=3$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=3$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcţiei f	**2p**
c)	$f'(x)>0$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $(-1,+\infty)$	**2p**
	f este continuă pe $(-1,+\infty)$, $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}f(x)=-\infty$ şi $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=3$, deci Im $f=(-\infty,3)$	**3p**
2.a)	$\int_1^2\left(f(x)-\ln x\right)dx=\int_1^2\left(3x^2+2x+1\right)dx=\left(x^3+x^2+x\right)\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=(8+4+2)-(1+1+1)=11$	**2p**
b)	$\int_1^e\dfrac{f(x)}{x}dx=\int_1^e\left(3x+2+\dfrac{1}{x}+\dfrac{\ln x}{x}\right)dx=\left(\dfrac{3x^2}{2}+2x+\ln x\right)\Big\vert_1^e+\int_1^e\dfrac{\ln x}{x}dx=$	**3p**
	$=\dfrac{3e^2+4e-5}{2}+\dfrac{1}{2}\ln^2x\Big\vert_1^e=\dfrac{3e^2+4e-4}{2}$	**2p**
c)	$\mathcal{A}=\int_1^a\vert f(x)\vert dx=\int_1^a\left(3x^2+2x+1+\ln x\right)dx=\left(x^3+x^2+x\right)\Big\vert_1^a+\left(x\ln x-x\right)\Big\vert_1^a=a^3+a^2+a\ln a-2$	**3p**
	$a^3+a^2+a\ln a-2=a^3+a^2+a-2\Rightarrow\ln a=1$, deci $a=e$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)-\sqrt{12}=\sqrt{3}\left(3-1\right)-2\sqrt{3}=$	**3p**
	$=2\sqrt{3}-2\sqrt{3}=0$	**2p**
2.	$f\left(1\right)=g\left(1\right)\Leftrightarrow 1^2+2\cdot 1+3=1+a\Leftrightarrow 6=1+a$	**3p**
	$a=5$	**2p**
3.	$x+1=1-2\sqrt{x}+x\Rightarrow 2\sqrt{x}=0$	**3p**
	$x=0$, care convine	**2p**
4.	Cifra sutelor se poate alege în 4 moduri	**1p**
	Pentru fiecare alegere a cifrei sutelor, cifra zecilor se poate alege în 4 moduri	**1p**
	Pentru fiecare alegere a primelor două cifre, cifra unităților se poate alege în 3 moduri, deci se pot forma $4\cdot 4\cdot 3=48$ de numere	**3p**
5.	$m_{d_1}=a$, $m_{d_2}=\dfrac{1}{4}$	**2p**
	Dreptele d_1 și d_2 sunt paralele $\Leftrightarrow m_{d_1}=m_{d_2}\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{4}$	**3p**
6.	$\sin\left(\pi-x\right)\cos\left(2\pi+x\right)-\sin\left(2\pi+x\right)\cos\left(\pi-x\right)=\sin x\cos x-\sin x\left(-\cos x\right)=$	**3p**
	$=2\sin x\cos x=\sin 2x$, pentru orice număr real x	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$M\left(1\right)=\begin{pmatrix}-2 & -2\\ 3 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(M\left(1\right)\right)=\begin{vmatrix}-2 & -2\\ 3 & 3\end{vmatrix}=\left(-2\right)\cdot 3-3\cdot\left(-2\right)=$	**3p**
	$=-6+6=0$	**2p**
b)	$M\left(x\right)-M\left(2018\right)=\left(I_2+xA\right)-\left(I_2+2018A\right)=I_2+xA-I_2-2018A=$	**2p**
	$=\left(I_2+\left(-2018\right)A\right)-\left(I_2+\left(-x\right)A\right)=M\left(-2018\right)-M\left(-x\right)$, pentru orice număr real x	**3p**
c)	$\left(I_2+mA\right)\left(I_2+nA\right)=I_2+mnA\Leftrightarrow I_2+mA+nA+mnA\cdot A=I_2+mnA$ și, cum $A\cdot A=-A$, obținem $m+n-mn=mn$	**3p**
	Cum m și n sunt numere naturale nenule, $m+n=2mn\Rightarrow\left(m,n\right)=\left(1,1\right)$	**2p**
2.a)	$x\circ y=8xy+x+y+\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{8}=$	**3p**
	$=8x\left(y+\dfrac{1}{8}\right)+\left(y+\dfrac{1}{8}\right)-\dfrac{1}{8}=8\left(x+\dfrac{1}{8}\right)\left(y+\dfrac{1}{8}\right)-\dfrac{1}{8}$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
b)	$8\left(x+\dfrac{1}{8}\right)^2-\dfrac{1}{8}=1\Leftrightarrow\left(x+\dfrac{1}{8}\right)^2=\dfrac{9}{64}$	**3p**
	$x=-\dfrac{1}{2}$ sau $x=\dfrac{1}{4}$	**2p**

c)	$f(x\circ y)=8(8xy+x+y)+1=64xy+8x+8y+1=(8x+1)(8y+1)=f(x)\cdot f(y)$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
	$f(x\circ y\circ z)=f(x\circ y)\cdot f(z)=f(x)\cdot f(y)\cdot f(z)$, pentru orice numere reale x, y și z	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{1\cdot\left(x^2+3\right)-(x+1)\cdot 2x}{\left(x^2+3\right)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{-x^2-2x+3}{\left(x^2+3\right)^2}=\dfrac{(1-x)(x+3)}{\left(x^2+3\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f(0)=\dfrac{1}{3}$, $f'(0)=\dfrac{1}{3}$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)$, adică $y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{3}$	**3p**
c)	$f'(x)<0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(1,+\infty)$	**3p**
	$1<\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}\Rightarrow f\left(\sqrt{2}\right)>f\left(\sqrt[3]{3}\right)$	**2p**
2.a)	$\displaystyle\int_0^3\frac{x\,f(x)}{e^x}dx=\int_0^3\frac{x^2e^x}{e^x}dx=\int_0^3x^2\,dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^3=$	**3p**
	$=\dfrac{27}{3}-0=9$	**2p**
b)	$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o primitivă a lui $f\Rightarrow F'(x)=f(x)=xe^x$, $F''(x)=(x+1)e^x$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
	$F''(x)<0$, pentru orice $x\in(-\infty,-1)$, $F''(-1)=0$ și $F''(x)>0$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)$, deci F are un singur punct de inflexiune	**3p**
c)	$\mathcal{A}=\displaystyle\int_0^n\left|f(x)\right|dx=\int_0^n xe^x\,dx=(x-1)e^x\Big|_0^n=(n-1)e^n+1$	**3p**
	$(n-1)e^n+1=1\Leftrightarrow n=1$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2018
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$n(n+2)<14$ şi $n\in\mathbb{N}\Rightarrow n=0$ sau $n=1$ sau $n=2$	**3p**
	Suma elementelor mulţimii este egală cu $0+1+2=3$	**2p**
2.	$b=1$	**2p**
	$a(x+1)+1=ax+1+2$, pentru orice număr real $x\Rightarrow a=2$	**3p**
3.	$(x+2)(x+8)>0$	**2p**
	Mulţimea soluţiilor inecuaţiei este $(-\infty,-8)\cup(-2,+\infty)$	**2p**
4.	Numărul submulţimilor ordonate cu două elemente din $\{1,3,5,7,9\}$ este egal cu $A_5^2=$	**3p**
	$=20$	**2p**
5.	$M(1,4)$ este mijlocul segmentului BC	**2p**
	Coordonatele simetricului punctului A faţă de punctul M sunt $x=2$ şi $y=6$	**3p**
6.	$EF=3$	**2p**
	ΔDEF este dreptunghic în E, deci $\sin D=\frac{3}{5}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&-1&1\\1&-1&0\end{vmatrix}=0+0+0-(-1)-(-1)-0=$	**3p**
	$=1+1=2$	**2p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&0&-1\\1&1&0\end{pmatrix}$, $A\cdot A\cdot A=\begin{pmatrix}3&0&1\\0&1&1\\1&-1&2\end{pmatrix}$	**2p**
	$\begin{pmatrix}3&0&1\\0&1&1\\1&-1&2\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&1\\1&-1&0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Leftrightarrow x=1,\ y=2$	**3p**
c)	$B=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&0&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det B=2$	**2p**
	$B^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$	**3p**

2.a)	$2\circ 9=2^{2\log_3 9}=2^{2\cdot 2}=$	**3p**
	$=2^4=16$	**2p**
b)	$x^{2\log_3 3}=25\Leftrightarrow x^2=25$	**2p**
	$x=-5$ care nu convine, $x=5$ care convine	**3p**
c)	$x\circ y=x^{2\log_3 y}=x^{\log_3 y^2}=\left(y^2\right)^{\log_3 x}=$	**3p**
	$=y^{2\log_3 x}=y\circ x$, pentru orice $x,y\in M$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{\left(e^x\right)'\cdot(x-1)-e^x\cdot(x-1)'}{(x-1)^2}=$	**2p**
	$=\dfrac{e^x(x-1)-e^x}{(x-1)^2}=\dfrac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$, $x\in(1,+\infty)$	**3p**
b)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=2$	**2p**
	$x\in(1,2]\Rightarrow f'(x)\le 0$, deci f este descrescătoare pe $(1,2]$ şi $x\in[2,+\infty)\Rightarrow f'(x)\ge 0$, deci f este crescătoare pe $[2,+\infty)$	**3p**
c)	$f(x)\ge f(2)$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$	**2p**
	$f(2)=e^2$, deci $\dfrac{e^x}{x-1}\ge e^2\Leftrightarrow\dfrac{e^{x-2}}{x-1}\ge 1\Leftrightarrow e^{x-2}-x+1\ge 0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin x\,dx=-\cos x\Big\vert_0^{\frac{\pi}{3}}=$	**3p**
	$=-\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{1}{2}$	**2p**
b)	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x f(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(-\cos x)'\,dx=-x\cos x\Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=$	**3p**
	$=-\dfrac{\pi}{2}\cdot\cos\dfrac{\pi}{2}+0\cdot\cos 0+\sin x\Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}}=\sin\dfrac{\pi}{2}-\sin 0=1$	**2p**
c)	$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} g^2(x)\,dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\,dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\cos 2x}{2}\,dx=$	**2p**
	$=\dfrac{\pi}{2}x\Big\vert_0^{\frac{\pi}{4}}-\dfrac{\pi}{4}\sin 2x\Big\vert_0^{\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\pi^2}{8}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi(\pi-2)}{8}$	**3p**

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați produsul primilor trei termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_2=4$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)^2$ și $g(x)=2018-x$. Calculați $g(f(1))$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $25^x=5^{x^2}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra zecilor egală cu 9.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuație $(a-1)x-a^2y-a^2=0$, unde a este număr real nenul. Determinați numărul real nenul a, știind că dreapta d este paralelă cu axa Ox.

5p **6.** Arătaţi că $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=\frac{5}{2}$, știind că $\sin x=\frac{1}{\sqrt{5}}$ și $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}x+2&x\\1&-2\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=-7$.

5p **b)** Demonstrați că $xA(y)-yA(x)=(x-y)A(0)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale a, știind că $(aA(-1)+A(a))A(0)=(a^2+7)I_2$.

2. Se consideră polinomul $f=4X^3-6X+m$, unde m este număr real.

5p **a)** Pentru $m=2$, arătați că $f(1)=0$.

5p **b)** Demonstrați că, oricare ar fi numărul real m, polinomul f **nu** se divide cu polinomul X^2+X+1.

5p **c)** Determinați numărul real nenul m, știind că $\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)^2=\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}\cdot\frac{1}{x_3}$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{\ln x}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\leq 1-\frac{1}{\sqrt{x}}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2+\frac{1}{x+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^2(x+1)f(x)\,dx=22$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1\left(f(x)-\frac{1}{x+1}\right)e^{x^3}dx$.

5p **c)** Determinați numărul natural nenul n, știind că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-3x^2$ este egal cu $\frac{\pi}{n}$.

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinaţi al doilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1=7$ și $a_3=15$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+2$. Determinaţi numerele naturale n, pentru care $f(n)<8$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2-1}=x+1$.

5p **4.** Determinați numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii $\{0,1,2,3,4\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră dreptele $d_1: y=\frac{x}{2}+2$ și $d_2: y=(m-3)x+1$, unde m este număr real. Determinați numărul real m, pentru care dreptele d_1 și d_2 sunt perpendiculare.

5p **6.** Arătaţi că, dacă $\sin 2x=\frac{1}{2}$, atunci $(\sin x+\cos x)^2=\frac{3}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $X(a,b)=\begin{pmatrix} a & b \\ 9b & a \end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det(X(3,1))=0$.

5p **b)** Demonstrați că $X(a,b)X(c,d)=X(ac+9bd,ad+bc)$, pentru orice numere reale a, b, c și d.

5p **c)** Determinați perechile de numere întregi (m,n) pentru care $\det(X(m,n))=1$.

2. Se consideră polinomul $f=2X^3-4X^2-7X+m$, unde m este număr real.

5p **a)** Pentru $m=9$, arătați că $f(1)=0$.

5p **b)** Determinați numărul real m pentru care polinomul f este divizibil cu $X+\sqrt{2}$.

5p **c)** Determinați numărul real m, știind că suma a două rădăcini ale polinomului f este egală cu 1.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)e^x+1$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=xe^x$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $\sqrt[n]{e}\leq\frac{n}{n-1}$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$.

2. Se consideră funcția $f:[2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{x-2}$.

5p **a)** Arătați că $\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\,dx=\frac{4}{3}$.

5p **b)** Arătați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{f(x+2)}{x+2}\cdot\sqrt{e^x}$ este egal cu π.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_3^x f(t)\cdot\frac{1}{\sqrt{t-2}}\,dt}{x^2}$.

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $1+i+(i-1)(1+i)-(i-1)=0$, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x+1$. Calculați $(f\circ f)(1)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2\left(x^2-5x+7\right)=\log_2 3$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale pare de două cifre, acesta să fie divizibil cu 5.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3)$, $B(-2,1)$, $C(4,3)$ și $D(8,5)$. Demonstrați că patrulaterul $ABCD$ este paralelogram.

5p **6.** Arătați că $\sin x+3\cos x=2\sqrt{2}$, știind că $\operatorname{tg} x=1$ și $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $X(a)=\begin{pmatrix} a & 5\\ 1 & a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(X(1))=-4$.

5p **b)** Demonstrați că $X(-a)+X(a)=X(-2018)+X(2018)$, pentru orice număr real a.

5p **c)** Determinaţi perechile de numere reale (a,b) pentru care $X(a)X(b)=X(a)+X(b)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-2X^2-X+m$, unde m este număr real.

5p **a)** Pentru $m=2$, arătați că $f(2)=0$.

5p **b)** Arătați că, dacă polinomul f se divide cu $X+1$, atunci polinomul f se divide cu X^2-3X+2.

5p **c)** Determinați numărul real nenul m, știind că $\frac{x_1}{x_2x_3}+\frac{x_2}{x_3x_1}+\frac{x_3}{x_1x_2}=6$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{1}{(x+3)^2}$, $x\in(-1,+\infty)$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

5p **c)** Determinați imaginea funcției f.

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2+2x+1+\ln x$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2\left(f(x)-\ln x\right)dx=11$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx=\frac{3e^2+4e-4}{2}$.

5p **c)** Determinați numărul real a, $a>1$, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=a$ are aria egală cu a^3+a^2+a-2.

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)-\sqrt{12}=0$.

5p **2.** Determinați numărul real a, pentru care graficele funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x+3$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x+a$ se intersectează într-un punct de abscisă $x=1$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+1}=1-\sqrt{x}$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale de trei cifre distincte au cifrele elemente ale mulțimii $\{0,1,2,3,4\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră dreptele d_1, de ecuație $y=ax+2$ și d_2, de ecuație $y=\frac{x}{4}+1$. Determinați numărul real a, știind că dreptele d_1 și d_2 sunt paralele.

5p **6.** Arătați că $\sin(\pi-x)\cos(2\pi+x)-\sin(2\pi+x)\cos(\pi-x)=\sin 2x$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}-3 & -2\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ și $M(x)=I_2+xA$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(M(1))=0$.

5p **b)** Demonstrați că $M(x)-M(2018)=M(-2018)-M(-x)$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați perechea de numere naturale nenule (m,n) pentru care $M(m)M(n)=M(mn)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=8xy+x+y$.

5p **a)** Arătați că $x\circ y=8\left(x+\frac{1}{8}\right)\left(y+\frac{1}{8}\right)-\frac{1}{8}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numerele reale x, pentru care $x\circ x=1$.

5p **c)** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=8x+1$. Demonstrați că $f(x\circ y\circ z)=f(x)\cdot f(y)\cdot f(z)$, pentru orice numere reale x, y și z.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+1}{x^2+3}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{(1-x)(x+3)}{\left(x^2+3\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $f\left(\sqrt{2}\right)>f\left(\sqrt[3]{3}\right)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^3\frac{xf(x)}{e^x}dx=9$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f are un singur punct de inflexiune.

5p **c)** Determinați numărul natural nenul n, pentru care suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=n$ are aria egală cu 1.

Examenul de bacalaureat naţional 2018
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătaţi că suma elementelor mulţimii $\left\{n\in\mathbb{N}\middle| n(n+2)<14\right\}$ este egală cu 3.

5p **2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$. Determinaţi numerele reale a şi b, ştiind că $f(0)=1$ şi $f(x+1)=f(x)+2$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale inecuaţia $(x+5)^2-9>0$.

5p **4.** Determinaţi numărul submulţimilor ordonate cu două elemente ale mulţimii $\{1, 3, 5, 7, 9\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,2)$, $B(3,5)$ şi $C(-1,3)$. Determinaţi coordonatele simetricului punctului A faţă de mijlocul segmentului BC.

5p **6.** Calculaţi sinusul unghiului D al triunghiului DEF, ştiind că semiperimetrul triunghiului DEF este egal cu 6, $DE=4$ şi $DF=5$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&1\\1&-1&0\end{pmatrix}$ şi $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătaţi că $\det A=2$.

5p **b)** Determinaţi numerele reale x şi y pentru care $A\cdot A\cdot A=xA+yI_3$.

5p **c)** Determinaţi inversa matricei $B=A+I_3$.

2. Pe mulţimea $M=(0,+\infty)$ se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=x^{2\log_3 y}$.

5p **a)** Arătaţi că $2\circ 9=16$.

5p **b)** Determinaţi numărul real x, $x\in M$ pentru care $x\circ 3=25$.

5p **c)** Demonstraţi că legea de compoziţie „$\circ$” este comutativă.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x}{x-1}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Determinaţi intervalele de monotonie a funcţiei f.

5p **c)** Demonstraţi că $e^{x-2}-x+1\geq 0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x$.

5p **a)** Arătaţi că $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx=\frac{1}{2}$.

5p **b)** Arătaţi că $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x f(x)\,dx=1$.

5p **c)** Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$.

Examenul de bacalaureat naţional 2019
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$b_3 = b_1 \cdot q^2 =$	**3p**
	$= 1 \cdot 5^2 = 25$	**2p**
2.	$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 4x - 5 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$	**2p**
	$x = 2$, $x = 3$	**3p**
3.	$\sqrt{2x} = 4 - x \Rightarrow 2x = 16 - 8x + x^2 \Rightarrow x^2 - 10x + 16 = 0$	**3p**
	$x = 2$, care convine, $x = 8$, care nu convine	**2p**
4.	Mulţimea A are 49 de elemente, deci sunt 49 de cazuri posibile	**2p**
	În mulţimea A sunt 7 numere naturale, deci sunt 7 cazuri favorabile	**2p**
	$p = \dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \dfrac{7}{49} = \dfrac{1}{7}$	**1p**
5.	Punctul $M(-3,3)$ este mijlocul laturii BC	**2p**
	Ecuaţia medianei din A este $y = 3$	**3p**
6.	$\sin x(3\sin x - \cos x) + \cos x(\sin x + 3\cos x) = 3\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos x \sin x + 3\cos^2 x =$	**2p**
	$= 3\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) = 3$, pentru orice număr real x	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(-1) = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(-1)) = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1) - (-4) \cdot 4 =$	**3p**
	$= 1 + 16 = 17$	**2p**
b)	$A(2019 - a) + A(2019 + a) = \begin{pmatrix} 2019 - a & 4 \\ -4 & 2019 - a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2019 + a & 4 \\ -4 & 2019 + a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4038 & 8 \\ -8 & 4038 \end{pmatrix} =$	**3p**
	$= 2\begin{pmatrix} 2019 & 4 \\ -4 & 2019 \end{pmatrix} = 2A(2019)$, pentru orice număr real a	**2p**
c)	$A(x)A(y) = \begin{pmatrix} x & 4 \\ -4 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & 4 \\ -4 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy - 16 & 4x + 4y \\ -4x - 4y & xy - 16 \end{pmatrix}$, $2A(-8) = \begin{pmatrix} -16 & 8 \\ -8 & -16 \end{pmatrix}$	**3p**
	$xy = 0$ şi $x + y = 2$, deci $x = 0$, $y = 2$ sau $x = 2$, $y = 0$	**2p**
2.a)	$x * 0 = \dfrac{4x + 4 \cdot 0}{4 + x \cdot 0} = \dfrac{4x}{4} = x$, pentru orice $x \in G$	**2p**
	$0 * x = \dfrac{4 \cdot 0 + 4 \cdot x}{4 + 0 \cdot x} = \dfrac{4x}{4} = x$, pentru orice $x \in G$, deci 0 este elementul neutru al legii de compoziţie „$*$”	**3p**
b)	$\dfrac{8x}{4 + x^2} = \dfrac{8}{5} \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$	**3p**
	$x = 1$, care convine, $x = 4$, care nu convine	**2p**

c)	$f(x)*f(y)=\dfrac{4f(x)+4f(y)}{4+f(x)f(y)}=\dfrac{4\cdot\dfrac{2(x-1)}{x+1}+4\cdot\dfrac{2(y-1)}{y+1}}{4+\dfrac{4(x-1)(y-1)}{(x+1)(y+1)}}=\dfrac{2(xy+x-y-1+xy-x+y-1)}{xy+x+y+1+xy-x-y+1}=$	**3p**
	$=\dfrac{4(xy-1)}{2(xy+1)}=\dfrac{2(xy-1)}{xy+1}=f(xy)$, pentru orice $x,y\in(0,+\infty)$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=-2+\dfrac{2}{x+1}=$	**3p**
	$=\dfrac{-2x-2+2}{x+1}=\dfrac{-2x}{x+1}$, $x\in(-1,+\infty)$	**2p**
b)	$f(0)=1$, $f'(0)=0$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)$, adică $y=1$	**3p**
c)	$f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in(-1,0]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $(-1,0]$ și $f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in[0,+\infty)\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[0,+\infty)$, deci $f(x)\leq f(0)\Rightarrow 1-2x+2\ln(x+1)\leq 1$, deci $\ln(x+1)\leq x$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)$	**3p**
	$\cos x>-1$, pentru orice $x\in(0,\pi)$, deci $\ln(1+\cos x)\leq\cos x$, pentru orice $x\in(0,\pi)$	**2p**
2.a)	$\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)e^x dx=\int_{-1}^{1}(x+3)dx=\left(\frac{x^2}{2}+3x\right)\Big|_{-1}^{1}=$	**3p**
	$=\left(\dfrac{1}{2}+3\right)-\left(\dfrac{1}{2}-3\right)=6$	**2p**
b)	F este o primitivă a funcției $f\Rightarrow F'(x)=f(x)=\dfrac{x+3}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
	$F'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[-3,+\infty)$, deci funcția F este crescătoare pe intervalul $[-3,+\infty)$	**3p**
c)	$\mathcal{A}=\displaystyle\int_0^n|f(x)|\,dx=\int_0^n(x+3)e^{-x}dx=-(x+4)e^{-x}\Big|_0^n=-(n+4)e^{-n}+4$	**3p**
	$-(n+4)e^{-n}+4=4-6e^{-n}$, de unde obținem $n=2$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_2=4$, $a_3=6$	**2p**
	$a_1+a_2+a_3=2+4+6=12$	**3p**
2.	$f(x)=0\Leftrightarrow x^2-10x+9=0$	**3p**
	Abscisele sunt $x=1$ și $x=9$	**2p**
3.	$5^x(5-3)=2\Leftrightarrow 5^x\cdot 2=2\Leftrightarrow 5^x=1$	**3p**
	$x=0$	**2p**
4.	Mulțimea A are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile	**1p**
	În mulțimea A este un singur număr care verifică ecuația, deci este un caz favorabil	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{1}{10}$	**2p**
5.	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$, unde M este mijlocul laturii BC	**3p**
	$AM=\sqrt{3}$, deci lungimea vectorului $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ este egală cu $2\sqrt{3}$	**2p**
6.	$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$, $\sin(x+\pi)=-\sin x$	**2p**
	$\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)+\sin^2(x+\pi)=\cos^2 x+\sin^2 x=1$, pentru orice număr real x	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}5 & -6\\ 2 & -2\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}5 & -6\\ 2 & -2\end{vmatrix}=5\cdot(-2)-2\cdot(-6)=$	**3p**
	$=-10+12=2$	**2p**
b)	$A(a)A(b)=\begin{pmatrix}1+4a & -6a\\ 2a & 1-3a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+4b & -6b\\ 2b & 1-3b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+4a+4b+4ab & -6b-6ab-6a\\ 2a+2ab+2b & 1-3a-3b-3ab\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1+4(a+b+ab) & -6(a+b+ab)\\ 2(a+b+ab) & 1-3(a+b+ab)\end{pmatrix}=A(a+b+ab)$, pentru orice numere reale a și b	**2p**
c)	$A(m+n+mn)=A(2)\Leftrightarrow m+n+mn=2$	**2p**
	Cum m și n sunt numere naturale, $(m+1)(n+1)=3\Rightarrow m=2$, $n=0$ sau $m=0$, $n=2$	**3p**
2.a)	$x\circ y=2xy-2x-2y+2+1=$	**2p**
	$=2x(y-1)-2(y-1)+1=2(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
b)	$x\circ x=2(x-1)^2+1$, de unde obținem $(x-1)^2\le 4$	**2p**
	$x\in[-1,3]$	**3p**
c)	$1\circ x=1$, pentru orice număr real x	**2p**
	$1^n\circ 2^n\circ 3^n\circ\ldots\circ 2019^n=1\circ\left(2^n\circ 3^n\circ\ldots\circ 2019^n\right)=1$, pentru orice număr natural nenul n	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=x'-(e\ln x)'=$	**2p**
	$=1-e\cdot\frac{1}{x}=\frac{x-e}{x}$, $x\in(0,+\infty)$	**3p**
b)	Tangenta la graficul funcției f în punctul $(a,f(a))$ este paralelă cu axa $Ox\Leftrightarrow f'(a)=0$	**3p**
	$a-e=0\Leftrightarrow a=e$	**2p**
c)	$f'(x)<0$, pentru orice $x\in(0,e)\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(0,e)$ și $f'(x)>0$, pentru orice $x\in(e,+\infty)\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(e,+\infty)$	**2p**
	$e^x=x^e\Leftrightarrow x=\ln x^e\Leftrightarrow f(x)=0$ și, cum f este continuă și $f(e)=0$, ecuația $e^x=x^e$ are exact o soluție în $(0,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\int_0^3\frac{f(x)}{e^x}dx=\int_0^3(x-1)(x+1)dx=\int_0^3(x^2-1)dx=\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Big\vert_0^3=$	**3p**
	$=9-3=6$	**2p**
b)	$\mathcal{A}=\int_1^2\lvert f(x)\rvert dx=\int_1^2(x^2-1)e^xdx=(x^2-1)e^x\Big\vert_1^2-\int_1^2 2xe^xdx=$	**2p**
	$=3e^2-0-2(x-1)e^x\Big\vert_1^2=3e^2-2e^2=e^2$	**3p**
c)	$\int_2^a\frac{2xe^x}{f(x)}dx=\int_2^a\frac{2x}{x^2-1}dx=\ln(x^2-1)\Big\vert_2^a=\ln\frac{a^2-1}{3}$	**3p**
	$\ln\frac{a^2-1}{3}=3\ln 2\Leftrightarrow a^2-25=0$ și, cum a este număr real, $a>2$, obținem $a=5$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2019
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(1+i)^2-2i=1+2i+i^2-2i=$	**3p**
	$=1+(-1)=0$	**2p**
2.	$x_V=-\frac{b}{2a}\Rightarrow-\frac{8}{2m}=12$	**3p**
	$m=-\frac{1}{3}$	**2p**
3.	$x^2-10x+40=4^2\Rightarrow x^2-10x+24=0$	**3p**
	$x=4$ sau $x=6$, care convin	**2p**
4.	Mulțimea M are 100 de elemente, deci sunt 100 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea M sunt 50 de numere impare, deci sunt 50 de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{50}{100}=\frac{1}{2}$	**1p**
5.	$\overrightarrow{BA}=4\vec{i}-\vec{j}$, $\overrightarrow{BC}=2\vec{i}+3\vec{j}\Rightarrow\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=6\vec{i}+2\vec{j}$	**2p**
	$BD=2\sqrt{10}$	**3p**
6.	$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}$	**2p**
	$\sin\pi+\sin\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}=0+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$M(1)=\begin{pmatrix}2&1\\3&4\end{pmatrix}\Rightarrow\det(M(1))=\begin{vmatrix}2&1\\3&4\end{vmatrix}=2\cdot4-3\cdot1=$	**3p**
	$=8-3=5$	**2p**
b)	$M(a)M(b)=(I_2+aA)(I_2+bA)=I_2+aA+bA+abA\cdot A$	**2p**
	Cum $A\cdot A=\begin{pmatrix}4&4\\12&12\end{pmatrix}=4A$, obținem $M(a)M(b)=I_2+(a+b+4ab)A=M(a+b+4ab)$, pentru orice numere reale a și b	**3p**
c)	$M\left(a+a+4a^2\right)=M(2)\Leftrightarrow4a^2+2a-2=0$	**3p**
	$a=-1$ sau $a=\frac{1}{2}$	**2p**
2.a)	$x*y=-xy+5x+5y-25+5=$	**3p**
	$=-x(y-5)+5(y-5)+5=-(x-5)(y-5)+5$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
b)	$-(x-5)^2+5\geq x\Leftrightarrow(x-5)(x-4)\leq0$	**3p**
	$x\in[4,5]$	**2p**

c)	$x*5=x$ și $5*x=x$, pentru orice număr real x	**2p**
	$1*(-2)*3*(-4)*5*\ldots*(-2018)*2019=\big((1*(-2)*3*(-4))*5\big)*(-6)*\ldots*(-2018)*2019=$ $=5*\big((-6)*\ldots*(-2018)*2019\big)=5$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{(2x+6)e^x-\left(x^2+6x+9\right)e^x}{\left(e^x\right)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{-x^2-4x-3}{e^x}=\dfrac{-(x+1)(x+3)}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+6x+9}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+6}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^x}=0$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	$f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[-3,-1]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[-3,-1]$ și $f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in[-1,+\infty)\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[-1,+\infty)$ și, cum $f(-1)=4e$, obținem $f(x)\leq 4e$, pentru orice $x\in[-3,+\infty)$	**3p**
	$0\leq x+3\leq 2e^{\frac{x+1}{2}}$, pentru orice $x\in[-3,+\infty)$ și $0\leq y+3\leq 2e^{\frac{y+1}{2}}$, pentru orice $y\in[-3,+\infty)$, deci $0\leq(x+3)(y+3)\leq 4e^{\frac{x+y+2}{2}}$, pentru orice $x,y\in[-3,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_0^2(x+1)f(x)dx=\int_0^2 x^3dx=\dfrac{x^4}{4}\Big\vert_0^2=$	**3p**
	$=\dfrac{16}{4}-0=4$	**2p**
b)	$F'(x)=\left(\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}+x-\ln(x+1)\right)'=\dfrac{3x^2}{3}-\dfrac{2x}{2}+1-\dfrac{1}{x+1}=$	**3p**
	$=\dfrac{x^3+x^2-x^2-x+x+1-1}{x+1}=\dfrac{x^3}{x+1}=f(x)$, $x\in(-1,+\infty)$	**2p**
c)	$g(x)=\dfrac{1}{x+1}\Rightarrow\mathcal{A}=\int_1^{a^2}\vert g(x)\vert dx=\int_1^{a^2}\dfrac{1}{x+1}dx=\ln(x+1)\Big\vert_1^{a^2}=\ln\left(a^2+1\right)-\ln 2$	**3p**
	$\ln\left(a^2+1\right)=\ln 10\Leftrightarrow a^2-9=0$ și, cum $a>1$, obținem $a=3$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2019

Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\frac{1}{1-i}-\frac{1}{1+i}=\frac{(1+i)-(1-i)}{1^2-i^2}=\frac{2i}{2}=i$	**3p**
	$a=i^2=-1$, care este număr întreg	**2p**
2.	$\Delta=49-4m$	**2p**
	$\Delta\geq 0\Leftrightarrow m\in\left(-\infty,\frac{49}{4}\right]$, deci cel mai mare număr natural m pentru care soluțiile ecuației sunt numere reale este 12	**3p**
3.	$3^x\left(1+3+3^2\right)=117\Leftrightarrow 3^x=9$	**3p**
	$x=2$	**2p**
4.	$C_n^2=36$, unde n este numărul de elemente ale mulțimii	**3p**
	$\frac{n(n-1)}{2}=36$, deci $n=9$	**2p**
5.	Mijlocul segmentului AB este punctul $M(1,-1)$	**2p**
	Ecuația medianei din C este $y+1=\frac{1}{2}(x-1)$, deci $y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$	**3p**
6.	$\cos x\sin x+\sin x\cos x=1\Leftrightarrow\sin 2x=1$	**3p**
	Cum $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, obținem $x=\frac{\pi}{4}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}2&0&1\\3&-1&1\\-3&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(0))=\begin{vmatrix}2&0&1\\3&-1&1\\-3&0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=-2+0+0-3-0-0=-5$	**3p**
b)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix}2&a&1\\3&2a-1&1\\a-3&a&1\end{vmatrix}=-a^2+6a-5$, pentru orice număr real a	**3p**
	$a=1$ sau $a=5$	**2p**
c)	Pentru $a=1$, sistemul este $\begin{cases}2x+y+z=1\\3x+y+z=1\\-2x+y+z=1\end{cases}$ și, scăzând primele două ecuații, obținem	**3p**
	$x_0=0$, deci $y_0+z_0=1$	
	$x_0^2=y_0z_0\Rightarrow y_0z_0=0$, deci soluțiile sunt $(0,1,0)$ sau $(0,0,1)$, care convin	**2p**

2.a)	$x*y=5xy-5x-5y+5+1=$ $=5x(y-1)-5(y-1)+1=5(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y	**3p** **2p**
b)	$x*x=5(x-1)^2+1$, $x*x*x=25(x-1)^3+1$ $(x-1)^3<1\Leftrightarrow x\in(-\infty,2)$	**2p** **3p**
c)	$25\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}+1\right)\left(\frac{1}{n+1}-1\right)\left(\frac{1}{n+1}+1\right)\left(\frac{1}{n+2}-1\right)\left(\frac{1}{n+2}+1\right)+1=-19\Leftrightarrow\frac{(1-n)(n+3)}{n(n+2)}=-\frac{4}{5}$ Cum n este număr natural nenul, obținem $n=3$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2x-2(x-1)}{x^2}=$ $=\frac{x-2x+2x-2}{x^2}=\frac{x-2}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$	**3p** **2p**
b)	Tangenta la graficul funcției f în punctul $(a,f(a))$ este perpendiculară pe dreapta de ecuație $y=x\Leftrightarrow f'(a)=-1$ $\frac{a-2}{a^2}=-1\Leftrightarrow a^2+a-2=0\Leftrightarrow a=-2$, care nu convine sau $a=1$, care convine	**3p** **2p**
c)	$f'(x)<0$, pentru orice $x\in(0,2)\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(0,2)$ $0<1<\frac{\pi}{2}<2\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)<f(1)$ și, cum $f(1)=0$, obținem $f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$	**2p** **3p**
2.a)	$\int_0^3 f(x)dx=\int_0^3\left(x^2+1\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Big\vert_0^3=$ $=\frac{27}{3}+3-0=12$	**3p** **2p**
b)	$g(x)=\frac{x}{x^2+1}\Rightarrow\mathcal{A}=\int_0^1\vert g(x)\vert dx=\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\Big\vert_0^1=$ $=\frac{1}{2}\ln 2$	**3p** **2p**
c)	Funcția $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x)=\int_0^x e^{f(t)}dt-x$ este derivabilă și $h'(x)=e^{x^2+1}-1$ $h'(x)>0$ pentru orice număr real x, deci h este strict crescătoare pe $\mathbb{R}\Rightarrow h$ este injectivă și, cum $h(0)=0$, există un unic număr real x pentru care $\int_0^x e^{f(t)}dt=x$	**2p** **3p**

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinaţi termenul b_3 al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_1=1$ și rația $q=5$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-x+1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=4x-5$. Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficelor celor două funcții.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x}+x=4$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\left\{\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},\ldots,\sqrt{49}\right\}$, acesta să fie număr natural.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3)$, $B(-3,0)$ și $C(-3,6)$. Determinați ecuația medianei din A a triunghiului ABC.

5p **6.** Arătați că $\sin x(3\sin x-\cos x)+\cos x(\sin x+3\cos x)=3$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 4 \\ -4 & a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(-1))=17$.

5p **b)** Demonstrați că $A(2019-a)+A(2019+a)=2A(2019)$, pentru orice număr real a.

5p **c)** Determinați perechile de numere reale x și y, pentru care $A(x)A(y)=2A(-8)$.

2. Pe mulţimea $G=(-2,2)$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=\dfrac{4x+4y}{4+xy}$.

5p **a)** Arătați că 0 este elementul neutru al legii de compoziţie „$*$”.

5p **b)** Determinați $x\in G$, pentru care $x*x=\dfrac{8}{5}$.

5p **c)** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to G$, $f(x)=\dfrac{2(x-1)}{x+1}$. Demonstrați că $f(xy)=f(x)*f(y)$, pentru orice $x,y\in(0,+\infty)$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-2x+2\ln(x+1)$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{-2x}{x+1}$, $x\in(-1,+\infty)$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstraţi că $\ln(1+\cos x)\leq\cos x$, pentru orice $x\in(0,\pi)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+3}{e^x}$.

5p **a)** Arătaţi că $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)e^x dx=6$.

5p **b)** Demonstraţi că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe intervalul $[-3,+\infty)$.

5p **c)** Determinaţi numărul natural nenul n, știind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=n$ are aria egală cu $4-6e^{-n}$.

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, dacă $a_1=2$ și rația $r=2$.

5p **2.** Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-10x+9$ cu axa Ox.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{x+1}-3\cdot 5^x=2$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr x din mulțimea $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, acesta să fie soluție a ecuației $x^2-4x+4=0$.

5p **5.** Determinați lungimea vectorului $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, știind că triunghiul ABC este echilateral și $AB=2$.

5p **6.** Arătați că $\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin^2(x+\pi)=1$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1+4a & -6a\\ 2a & 1-3a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=2$.

5p **b)** Demonstrați că $A(a)A(b)=A(a+b+ab)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Determinați perechile de numere naturale m și n pentru care $A(m)A(n)=A(2)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=2xy-2x-2y+3$.

5p **a)** Arătați că $x\circ y=2(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui x pentru care $x\circ x\leq 9$.

5p **c)** Calculați $1^n\circ 2^n\circ 3^n\circ\ldots\circ 2019^n$, pentru orice număr natural nenul n.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln x^e$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x-e}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați abscisa punctului situat pe graficul funcției f, în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu axa Ox.

5p **c)** Demonstrați că ecuația $e^x=x^e$ are exact o soluție în $(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)(x+1)e^x$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^3\frac{f(x)}{e^x}dx=6$.

5p **b)** Determinați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=2$.

5p **c)** Determinați numărul real a, $a>2$, știind că $\int_2^a\frac{2xe^x}{f(x)}dx=3\ln 2$.

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $(1+i)^2-2i=0$, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Determinați numărul real nenul m, știind că abscisa vârfului parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx^2+8x-7$ este egală cu 12.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_4\left(x^2-10x+40\right)=2$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $M=\{1,2,3,\ldots,100\}$, acesta să fie număr impar.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,-1)$, $B(-2,0)$ și $C(0,3)$. Determinați lungimea vectorului $\overrightarrow{BD}$, știind că $ABCD$ este paralelogram.

5p **6.** Arătați că $\sin 3x+\sin 2x+\sin x=\sqrt{3}$, știind că $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&1\\3&3\end{pmatrix}$ și $M(a)=I_2+aA$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(M(1))=5$.

5p **b)** Demonstrați că $M(a)M(b)=M(a+b+4ab)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Determinați numerele reale a pentru care $M(a)M(a)=M(2)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=5x+5y-xy-20$.

5p **a)** Arătați că $x*y=-(x-5)(y-5)+5$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui x pentru care $x*x\geq x$.

5p **c)** Calculați $1*(-2)*3*(-4)*\ldots*(-2018)*2019$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+6x+9}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{-(x+1)(x+3)}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $0\leq(x+3)(y+3)\leq 4e^{\frac{x+y+2}{2}}$, pentru orice $x,y\in[-3,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^3}{x+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^2(x+1)f(x)\,dx=4$.

5p **b)** Arătați că funcția $F:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-\ln(x+1)$ este o primitivă a funcției f.

5p **c)** Determinați numărul real a, $a>1$, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{1}{x^3}f(x)$, axa Ox, dreptele de ecuații $x=1$ și $x=a^2$ are aria egală cu $\ln 5$.

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că numărul $a=\left(\frac{1}{1-i}-\frac{1}{1+i}\right)^2$ este întreg, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Determinați cel mai mare număr natural m pentru care soluțiile ecuației $x^2-7x+m=0$ sunt numere reale.

5p **3.** Rezolvați în mulţimea numerelor reale ecuația $3^x+3^{x+1}+3^{x+2}=117$.

5p **4.** Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi, știind că aceasta are exact 36 de submulțimi cu două elemente.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,1)$, $B(3,-3)$ și $C(3,0)$. Determinaţi ecuaţia medianei din C a triunghiului ABC.

5p **6.** Determinați $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $\cos x\sin(\pi-x)-\sin x\cos(\pi+x)=1$.

SUBIECTUL al II-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2 & a & 1\\ 3 & 2a-1 & 1\\ a-3 & a & 1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}2x+ay+z=1\\ 3x+(2a-1)y+z=1\\ (a-3)x+ay+z=2a-1\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=-5$.

5p **b)** Determinați numerele reale a pentru care $\det(A(a))=0$.

5p **c)** Pentru $a=1$, determinați soluțiile (x_0,y_0,z_0) ale sistemului pentru care $x_0^2=y_0z_0$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=5xy-5(x+y)+6$.

5p **a)** Demonstrați că $x*y=5(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui x pentru care $x*x*x<26$.

5p **c)** Determinați numărul natural nenul n pentru care $\frac{1}{n^2}*\frac{1}{(n+1)^2}*\frac{1}{(n+2)^2}=-19$.

SUBIECTUL al III-lea –- Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x-\frac{2(x-1)}{x}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{x-2}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați abscisa punctului situat pe graficul funcției f în care tangenta la graficul funcţiei f este perpendiculară pe dreapta de ecuație $y=x$.

5p **c)** Demonstrați că $f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+1$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^3 f(x)dx=12$.

5p **b)** Determinați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{x}{f(x)}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

5p **c)** Demonstrați că există un unic număr real x pentru care $\int_0^x e^{f(t)}dt=x$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\log_2 7+\log_2 6-\log_2 21=\log_2\frac{7\cdot 6}{21}=$	**3p**
	$=\log_2 2=1$	**2p**
2.	$f(x)-g(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2$, pentru orice număr real x	**3p**
	$(x-1)^2\geq 0$, pentru orice număr real x, deci $f(x)\geq g(x)$, pentru orice număr real x	**2p**
3.	$x^2+12=4x^2\Rightarrow 3x^2=12\Leftrightarrow x^2=4$	**3p**
	$x=-2$, care nu convine, $x=2$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea A are 5 elemente, deci sunt 5 cazuri posibile	**2p**
	$x^2-3x+2=0\Leftrightarrow x=1$ sau $x=2$, care sunt elemente ale mulțimii A, deci avem 2 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{2}{5}$	**1p**
5.	$\vec{u}=3\vec{v}\Leftrightarrow a\vec{i}+6\vec{j}=6\vec{i}+3b\vec{j}$	**3p**
	$a=6$, $b=2$	**2p**
6.	$E\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin^2\frac{\pi}{4}-\cos^2\frac{\pi}{4}+\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}\right)-2=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-2=$	**3p**
	$=\sqrt{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{2}-2=0$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(x))=\begin{vmatrix}x+2 & x+3\\ x-3 & x-2\end{vmatrix}=x^2-4-(x^2-9)=$	**3p**
	$=x^2-4-x^2+9=5$, pentru orice număr real x	**2p**
b)	$A(-3)+A(3)=A(-2)+A(2)=A(-1)+A(1)=2A(0)$	**3p**
	$2A(0)+2A(0)+2A(0)=nA(0)$, de unde obținem $n=6$	**2p**
c)	$A(1)=\begin{pmatrix}3 & 4\\ -2 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow A(x)\cdot A(1)=\begin{pmatrix}x & 3x+5\\ x-5 & 3x-10\end{pmatrix}$, pentru orice număr real x	**3p**
	$\begin{pmatrix}x & 3x+5\\ x-5 & 3x-10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 8\\ -4 & -7\end{pmatrix}$, de unde obținem $x=1$	**2p**
2.a)	$0*1=\frac{0+1+1}{0^2+1^2+1}=$	**3p**
	$=\frac{2}{2}=1$	**2p**

b)	$x*x=\dfrac{2x+1}{2x^2+1}$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\dfrac{2x+1}{2x^2+1}=1\Leftrightarrow 2x(x-1)=0\Rightarrow x=0$ sau $x=1$	**3p**
c)	$x*(-x)=\dfrac{x+(-x)+1}{x^2+(-x)^2+1}=\dfrac{1}{2x^2+1}$, pentru orice număr real x	**2p**
	$x*(-x)\le 1\Leftrightarrow \dfrac{1}{2x^2+1}\le 1\Leftrightarrow \dfrac{-2x^2}{2x^2+1}\le 0$ inegalitate adevărată pentru orice număr real x	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\sqrt{x^2+2x+2}+x\cdot\dfrac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+2}}=$	**3p**
	$=\dfrac{x^2+2x+2+x^2+x}{\sqrt{x^2+2x+2}}=\dfrac{2x^2+3x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2+3x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}\cdot\dfrac{1}{x\sqrt{x^2+2x+2}}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+3x+2}{x^3+2x^2+2x}=$	**3p**
	$=0$	**2p**
c)	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\sqrt{x^2+2x+2}=-\infty$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\sqrt{x^2+2x+2}=+\infty$ şi, cum f este funcție continuă, obținem că, pentru orice număr real a, ecuația $f(x)=a$ are cel puțin o soluție	**3p**
2.a)	$\int_0^1\left(f(x)-xe^x\right)dx=\int_0^1\left(xe^x+x-xe^x\right)dx=\int_0^1 x\,dx=$	**2p**
	$=\dfrac{x^2}{2}\Big\vert_0^1=\dfrac{1}{2}$	**3p**
b)	$\int_1^2\dfrac{1}{x}\cdot f\left(x^2\right)dx=\int_1^2\dfrac{x^2e^{x^2}+x^2}{x}dx=\int_1^2 xe^{x^2}dx+\int_1^2 xdx=\dfrac{1}{2}e^{x^2}\Big\vert_1^2+\dfrac{x^2}{2}\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{2}e^4-\dfrac{1}{2}e+\dfrac{4}{2}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{e^4-e+3}{2}$	**2p**
c)	$\int_0^1 F(x)dx=\int_0^1 x'F(x)dx=xF(x)\Big\vert_0^1-\int_0^1 x\,f(x)dx=F(1)-\int_0^1\left(x^2e^x+x^2\right)dx=$	**3p**
	$=-\left(\left(x^2-2x+2\right)e^x+\dfrac{x^3}{3}\right)\Big\vert_0^1=-\left(e+\dfrac{1}{3}-2\right)=\dfrac{5-3e}{3}$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$r=a_3-a_2=2$	**3p**
	$a_1=a_2-r=1$	**2p**
2.	$f(n)=n^2-1$, deci $n^2-1=3\Rightarrow n^2-4=0$	**3p**
	Cum n este număr natural, obținem $n=2$	**2p**
3.	$x^2-9=(x-1)^2\Rightarrow 2x=10$	**3p**
	$x=5$, care convine	**2p**
4.	Numărul de submulțimi cu trei elemente ale mulțimii $\{1,2,3,4\}$ este egal cu $C_4^3=\frac{4!}{3!\cdot 1!}=$	**3p**
	$=4$	**2p**
5.	$m_{MN}=1$, $m_{PQ}=\frac{3-a}{3}$	**2p**
	$MN \parallel PQ$, de unde obținem $m_{MN}=m_{PQ}\Leftrightarrow 3-a=3\Leftrightarrow a=0$	**3p**
6.	$\cos B=\frac{AB}{BC}\Leftrightarrow\frac{1}{2}=\frac{5}{BC}$	**3p**
	$BC=10$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}a^2 & 0\\ 0 & b^2\end{pmatrix}$, pentru orice numere reale a și b	**3p**
	$\det(A\cdot A)=\begin{vmatrix}a^2 & 0\\ 0 & b^2\end{vmatrix}=a^2b^2$, pentru orice numere reale a și b	**2p**
b)	$X=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$ cu $x,y,z,t\in\mathbb{R}\Rightarrow A\cdot X=\begin{pmatrix}ax & ay\\ bz & bt\end{pmatrix}$ și $X\cdot A=\begin{pmatrix}ax & by\\ az & bt\end{pmatrix}$	**3p**
	$ay=by$ și $az=bz$, deci $y(a-b)=0$ și $z(a-b)=0$ și, cum $a\neq b$, obținem $y=z=0$, deci există numerele reale x și t astfel încât $X=\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & t\end{pmatrix}$	**2p**
c)	$Y\cdot Y=A$, deci $A\cdot Y=(Y\cdot Y)\cdot Y=Y\cdot(Y\cdot Y)=Y\cdot A$, deci $Y=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$, unde $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$	**2p**
	$Y\cdot Y=\begin{pmatrix}\alpha^2 & 0\\ 0 & \beta^2\end{pmatrix}$, deci $\begin{pmatrix}\alpha^2 & 0\\ 0 & \beta^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, de unde obținem $\alpha^2=4$ și $\beta^2=0$, deci $Y=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ sau $Y=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, care convin	**3p**

2.a)	$3*3=3\sqrt{3+1}+3\sqrt{3+1}=$	**3p**
	$=3\cdot 2+3\cdot 2=6+6=12$	**2p**
b)	$x*0=x\cdot\sqrt{0+1}+0\cdot\sqrt{x+1}=x$, pentru orice $x\in M$	**2p**
	$0*x=0\cdot\sqrt{x+1}+x\cdot\sqrt{0+1}=x$, pentru orice $x\in M\Rightarrow x*0=0*x=x$, pentru orice $x\in M$	**3p**
c)	$\left(x^2+2x\right)\sqrt{3+1}+3\sqrt{x^2+2x+1}=7\Leftrightarrow 2\left(x^2+2x\right)+3\sqrt{\left(x+1\right)^2}=7\Leftrightarrow 2x^2+7x-4=0$	**3p**
	$x=-4$, care nu convine, $x=\frac{1}{2}$, care convine	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=x'\ln(x+1)+x\left(\ln(x+1)\right)'=$	**3p**
	$=1\cdot\ln(x+1)+x\cdot\frac{1}{x+1}=\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}$, $x\in(-1,+\infty)$	**2p**
b)	$f''(x)=\frac{x+2}{(x+1)^2}$, $x\in(-1,+\infty)$	**3p**
	$f''(x)>0$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)$, deci funcția f este convexă	**2p**
c)	$\ln(x+1)\le 0$ și $\frac{x}{x+1}\le 0$, pentru orice $x\in(-1,0]$, deci $f'(x)\le 0$, de unde obținem că f este descrescătoare pe $(-1,0]$	**2p**
	Pentru orice $x_1,x_2\in(-1,0]$ cu $x_1\le x_2\Rightarrow f(x_1)\ge f(x_2)$, deci $x_1\ln(x_1+1)\ge x_2\ln(x_2+1)$ de unde obținem $\ln(x_1+1)^{x_1}\ge\ln(x_2+1)^{x_2}$, deci $(x_1+1)^{x_1}\ge(x_2+1)^{x_2}$, adică $g(x_1)\ge g(x_2)$	**3p**
2.a)	$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\left(1-x^3\right)dx=\left(x-\frac{x^4}{4}\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$	**2p**
b)	$\int_0^1 x^2\left(f(x)\right)^3dx=\int_0^1 x^2\left(1-x^3\right)^3dx=-\frac{1}{3}\int_0^1\left(1-x^3\right)'\left(1-x^3\right)^3dx=-\frac{1}{12}\left(1-x^3\right)^4\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=0-\left(-\frac{1}{12}\right)=\frac{1}{12}$	**2p**
c)	$\int_0^1\left(f(x)\right)^{n+1}dx-\int_0^1\left(f(x)\right)^n dx=\int_0^1\left(1-x^3\right)^{n+1}dx-\int_0^1\left(1-x^3\right)^n dx=-\int_0^1 x^3\left(1-x^3\right)^n dx$, pentru orice număr natural nenul n	**2p**
	$x^3\ge 0$ și $1-x^3\ge 0$, pentru orice $x\in[0,1]$, deci $\int_0^1\left(f(x)\right)^{n+1}dx-\int_0^1\left(f(x)\right)^n dx\le 0$, de unde obținem $\int_0^1\left(f(x)\right)^{n+1}dx\le\int_0^1\left(f(x)\right)^n dx$, pentru orice număr natural nenul n	**3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_3 = a_1 + 2r = 2 + 2 \cdot 3 =$	**3p**
	$= 8$	**2p**
2.	$2x^2 + 1 = 9 \Leftrightarrow x^2 = 4$	**3p**
	$x = -2$ sau $x = 2$	**2p**
3.	$3^{2x}\left(3^2 - 1\right) = 8 \Leftrightarrow 3^{2x} = 1$	**3p**
	$x = 0$	**2p**
4.	Mulțimea A are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile	**2p**
	Divizorii din mulțimea A ai numărului 100 sunt 1, 2, 4 şi 5, deci sunt 4 cazuri favorabile	**2p**
	$p = \dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \dfrac{4}{9}$	**1p**
5.	$ABCD$ este paralelogram și pentru $\{O\} = AC \cap BD$, obținem $\overrightarrow{PO} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC}\right)$	**3p**
	$\overrightarrow{PO} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD}\right)$, deci $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD}$	**2p**
6.	$\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin x \cos\dfrac{\pi}{4} - \sin\dfrac{\pi}{4}\cos x + \cos x \cos\dfrac{\pi}{4} - \sin x \sin\dfrac{\pi}{4} =$	**2p**
	$= \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin x = 0$, pentru orice număr real x	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(A(0)\right) = \begin{vmatrix} 12 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 12 \cdot 3 - 0 \cdot 1 =$	**3p**
	$= 36 - 0 = 36$	**2p**
b)	$A(a) - (12 + a) I_2 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 + a & -9 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(A(a) - (12 + a) I_2\right) = \begin{vmatrix} 0 & a \\ 1 + a & -9 \end{vmatrix} = -a(1 + a)$	**3p**
	$a(1 + a) = 0$, de unde obţinem $a = 0$ sau $a = -1$	**2p**
c)	$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, deci $X \cdot X = A(0) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a + d) \\ c(a + d) & d^2 + bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	**2p**
	Din $b(a + d) = 0$ şi $c(a + d) = 1$, rezultă $a + d \neq 0$ şi $b = 0$ şi, cum $d^2 + bc = 3$, obţinem $d^2 = 3$, deci d este număr iraţional	**3p**
2.a)	$1 \circ 1 = 1 + \sqrt[3]{1} - 2 =$	**3p**
	$= 1 + 1 - 2 = 0$	**2p**
b)	$x + \sqrt[3]{a} - 2 = x$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\sqrt[3]{a} = 2 \Leftrightarrow a = 8$	**3p**

c)	$x+\sqrt[3]{x^6}-2=4$, deci $x^2+x-6=0$	**3p**
	$x=-3$ sau $x=2$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(x^2\right)'-\left(2\sqrt{x^2-1}\right)'=2x-2\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}=$	**3p**
	$=2x-\dfrac{2x}{\sqrt{x^2-1}}=2x\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right),\ x\in(1,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\sqrt{x^2-1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}{x}=$	**3p**
	$=2\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}=2$	**2p**
c)	$f(x)=0\Leftrightarrow x^2=2\sqrt{x^2-1}\Leftrightarrow x^4=4\left(x^2-1\right)\Leftrightarrow\left(x^2-2\right)^2=0\Leftrightarrow x^2=2$ şi, cum $x>1$, obţinem $x=\sqrt{2}$	**2p**
	$A\left(\sqrt{2},0\right)$ este punctul de intersecţie a graficului funcţiei f cu axa Ox şi, cum panta tangentei la graficul funcţiei f în punctul A este $f'\left(\sqrt{2}\right)=0$, obţinem că axa Ox este tangentă la graficul funcţiei f	**3p**
2.a)	$\int_0^1\left(x^2+2x+2\right)f(x)\,dx=\int_0^1\left(x^2+2x+2\right)\dfrac{x}{x^2+2x+2}\,dx=\int_0^1 x\,dx=$	**2p**
	$=\dfrac{x^2}{2}\Big\vert_0^1=\dfrac{1}{2}$	**3p**
b)	$\int_0^2\left(f(x)+\dfrac{1}{x^2+2x+2}\right)dx=\int_0^2\dfrac{x+1}{x^2+2x+2}\,dx=\dfrac{1}{2}\int_0^2\dfrac{\left(x^2+2x+2\right)'}{x^2+2x+2}\,dx=$	**2p**
	$=\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+2\right)\Big\vert_0^2=\dfrac{1}{2}\ln 5$	**3p**
c)	$\int_1^e\left(\dfrac{1}{f(x)}-2\right)\ln x\,dx=\int_1^e\left(x+\dfrac{2}{x}\right)\ln x\,dx=\int_1^e x\ln x\,dx+2\int_1^e\dfrac{1}{x}\ln x\,dx=\int_1^e\left(\dfrac{x^2}{2}\right)'\ln x\,dx+2\int_1^e(\ln x)'\ln x\,dx=$	**3p**
	$=\dfrac{x^2}{2}\ln x\Big\vert_1^e-\int_1^e\dfrac{x^2}{2}\cdot\dfrac{1}{x}\,dx+2\cdot\dfrac{1}{2}\ln^2 x\Big\vert_1^e=\dfrac{e^2}{2}-\dfrac{x^2}{4}\Big\vert_1^e+\ln^2 e-\ln^2 1=\dfrac{e^2}{2}-\dfrac{e^2}{4}+\dfrac{1}{4}+1=\dfrac{e^2+5}{4}$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(0,3\cdot 10-1)(0,3\cdot 10+1)=(3-1)(3+1)=$	**3p**
	$=2\cdot 4=8$	**2p**
2.	$x_1+x_2=6$, $x_1x_2=m$	**2p**
	$6m=12$, deci $m=2$	**3p**
3.	$4(5-x)=x+10\Rightarrow 20-4x=x+10\Rightarrow 5x=10$	**3p**
	$x=2$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 7 numere care au cifra zecilor cu 3 mai mare decât cifra unităților, deci sunt 7 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{7}{90}$	**1p**
5.	$\dfrac{a}{3}=\dfrac{a-1}{4}\Leftrightarrow 4a=3a-3$	**3p**
	$a=-3$	**2p**
6.	$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=$	**2p**
	$=(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)=0\cdot(\cos x+\sin x)=0$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1,1)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(1,1))=\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}=1\cdot 1-(-1)\cdot 2=$	**3p**
	$=1+2=3$	**2p**
b)	$A(a,b)\cdot A(b,a)=\begin{pmatrix}a & 2b\\ -b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b & 2a\\ -a & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ab-2ab & 2a^2+2b^2\\ -b^2-a^2 & -2ab+ab\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}-ab & 2(a^2+b^2)\\ -(a^2+b^2) & -ab\end{pmatrix}=A(-ab,a^2+b^2)$, pentru orice numere reale a și b	**2p**
c)	$\det(A(m,n))=\begin{vmatrix}m & 2n\\ -n & m\end{vmatrix}=m^2+2n^2$	**2p**
	Cum m și n sunt numere întregi, din $m^2+2n^2=1$ obținem $m=-1$, $n=0$ sau $m=1$, $n=0$	**3p**
2.a)	$f=X^3-15X^2+95X-80\Rightarrow f(1)=1^3-15\cdot 1^2+95\cdot 1-80=$	**2p**
	$=1-15+95-80=1$	**3p**
b)	$x_1+x_2+x_3=15$ și $x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=m$	**2p**
	$(x_1+x_2+x_3)^2-3(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)=0\Leftrightarrow 225-3m=0$, deci $m=75$	**3p**

c)	$2x_2 = x_1 + x_3$ și $x_1 + x_2 + x_3 = 15 \Rightarrow x_2 = 5$	**2p**
	$x_1x_2x_3 = 80 \Rightarrow x_1x_3 = 16$ și, cum $x_1 + x_3 = 10$, polinomul f are rădăcinile 2, 5 și 8	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = e^x - 1,\ x \in \mathbb{R}$	**3p**
	$f'(0) = e^0 - 1 = 0$	**2p**
b)	$f''(x) = e^x > 0$, pentru orice număr real $x \Rightarrow f'$ este strict crescătoare, deci f' este injectivă	**2p**
	Pentru orice numere reale x_1 și x_2, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f'(x_1) \neq f'(x_2)$, deci tangentele la graficul lui f în punctele de coordonate $(x_1, f(x_1))$ și $(x_2, f(x_2))$ au pante diferite, deci sunt concurente	**3p**
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$	**1p**
	$f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in (-\infty, 0] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty, 0]$, $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [0, +\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[0, +\infty)$ și, cum $f(0) = -9$, obținem $f(x) \geq -9$, pentru orice număr real x	**2p**
	$f(x^3) \geq -9 \Rightarrow e^{x^3} \geq x^3 + 1$, deci $e^{x^3} \geq (x+1)(x^2 - x + 1)$, pentru orice număr real x	**2p**
2.a)	$\int_1^3 \left(f(x) - \frac{9}{x}\right)dx = \int_1^3 \left(x + \frac{9}{x} - \frac{9}{x}\right)dx = \int_1^3 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big\|_1^3 =$	**3p**
	$= \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$	**2p**
b)	$g(x) = \frac{2x}{x^2+9} \Rightarrow \mathcal{A} = \int_1^9 \|g(x)\|dx = \int_1^9 \frac{2x}{x^2+9}dx = \ln(x^2+9)\Big\|_1^9 =$	**3p**
	$= \ln 90 - \ln 10 = \ln 9 = 2\ln 3$	**2p**
c)	$\int_1^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x\,dx = \int_1^{\sqrt{3}} \left(\frac{x^2+1}{2}\right)' \operatorname{arctg} x\,dx = \frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x\Big\|_1^{\sqrt{3}} - \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^2+1}{2(x^2+1)}dx = \left(\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2}\right)\Big\|_1^{\sqrt{3}} =$	**3p**
	$= \frac{5\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}-1}{2}$, de unde obținem $a = 4$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătaţi că $\log_2 7+\log_2 6-\log_2 21=1$.

5p **2.** Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x-1$. Demonstraţi că $f(x)\geq g(x)$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2+12}=2x$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr x din mulţimea $A=\{-2,-1,0,1,2\}$, acesta să fie soluţie a ecuaţiei $x^2-3x+2=0$.

5p **5.** Determinaţi numerele reale a şi b, pentru care $\vec{u}=3\vec{v}$, unde $\vec{u}=a\vec{i}+6\vec{j}$ şi $\vec{v}=2\vec{i}+b\vec{j}$.

5p **6.** Se consideră expresia $E(x)=\sin^2 x-\cos^2 x+\sqrt{2}(\sin x+\cos x)-2$, unde x este număr real. Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x+2 & x+3 \\ x-3 & x-2 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\det(A(x))=5$, pentru orice număr real x.

5p **b)** Determinaţi numărul natural n astfel încât $A(-3)+A(-2)+A(-1)+A(1)+A(2)+A(3)=nA(0)$.

5p **c)** Determinaţi numărul real x pentru care $A(x)\cdot A(1)=\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -4 & -7 \end{pmatrix}$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=\frac{x+y+1}{x^2+y^2+1}$.

5p **a)** Arătaţi că $0*1=1$.

5p **b)** Determinaţi numerele reale x pentru care $x*x=1$.

5p **c)** Demonstraţi că $x*(-x)\leq 1$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{x^2+2x+2}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{2x^2+3x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{f(x)}$.

5p **c)** Demonstraţi că, pentru orice număr real a, ecuaţia $f(x)=a$ are cel puţin o soluţie.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x+x$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^1\left(f(x)-xe^x\right)dx=\frac{1}{2}$.

5p **b)** Arătaţi că $\int_1^2\frac{1}{x}\cdot f\left(x^2\right)dx=\frac{e^4-e+3}{2}$.

5p **c)** Se consideră $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, primitiva funcţiei f pentru care $F(1)=0$. Arătaţi că $\int_0^1 F(x)\,dx=\frac{5-3e}{3}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinaţi primul termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_2=3$ și $a_3=5$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-1$. Determinaţi numărul natural n pentru care $f(n)=3$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2-9}=x-1$.

5p **4.** Determinaţi numărul de submulțimi cu trei elemente ale mulțimii $\{1,2,3,4\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(1,1)$, $N(3,3)$, $P(4,3)$ și $Q(1,a)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, pentru care patrulaterul $MNPQ$ este trapez cu bazele MN și PQ.

5p **6**. Calculaţi lungimea ipotenuzei BC a triunghiului dreptunghic ABC, în care $AB=5$ și $\cos B=\frac{1}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det(A\cdot A)=a^2b^2$, pentru orice numere reale a și b.

5p **b)** Se consideră matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A\cdot X=X\cdot A$. Demonstrați că, dacă a și b sunt numere reale distincte, atunci există numerele reale x și t astfel încât $X=\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$.

5p **c)** Pentru $a=4$ și $b=0$, determinați matricele $Y\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $Y\cdot Y=A$.

2. Pe mulţimea $M=[0,+\infty)$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=x\sqrt{y+1}+y\sqrt{x+1}$.

5p **a)** Arătați că $3*3=12$.

5p **b)** Demonstrați că $x*0=0*x=x$, pentru orice $x\in M$.

5p **c)** Determinați $x\in M$ pentru care $\left(x^2+2x\right)*3=7$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln(x+1)$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}$, $x\in(-1,+\infty)$.

5p **b)** Arătați că funcția f este convexă.

5p **c)** Se consideră funcția $g:(-1,0]\to\mathbb{R}$, $g(x)=(x+1)^x$. Demonstrați că, dacă $x_1,x_2\in(-1,0]$ astfel încât $x_1\leq x_2$, atunci $g(x_1)\geq g(x_2)$.

2. Se consideră funcţia $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-x^3$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{3}{4}$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 x^2\left(f(x)\right)^3\,dx=\frac{1}{12}$.

5p **c)** Demonstrați că $\int_0^1\left(f(x)\right)^{n+1}dx\leq\int_0^1\left(f(x)\right)^n dx$, pentru orice număr natural nenul n.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_1=2$ și rația $r=3$. Calculați a_3.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$. Determinați numerele reale x pentru care $f(x^2)=9$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{2x+2}-3^{2x}=8$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, acesta să fie divizor al lui 100.

5p **5.** Se consideră un punct P în planul paralelogramului $ABCD$. Arătați că $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}$.

5p **6.** Arătați că $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}12+a & a\\ 1+a & 3+a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=36$.

5p **b)** Determinați numerele reale a pentru care $\det(A(a)-(12+a)I_2)=0$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **c)** Se consideră matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea $X\cdot X=A(0)$. Arătaţi că cel puţin un element al matricei X este număr irațional.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=x+\sqrt[3]{y}-2$.

5p **a)** Arătați că $1\circ 1=0$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care $x\circ a=x$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $x\circ x^6=4$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2\sqrt{x^2-1}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=2x\left(1-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-f(x)}{x}$.

5p **c)** Demonstraţi că axa Ox este tangentă la graficul funcţiei f.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{x^2+2x+2}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1\left(x^2+2x+2\right)f(x)\,dx=\frac{1}{2}$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^2\left(f(x)+\frac{1}{x^2+2x+2}\right)dx=\frac{1}{2}\ln 5$.

5p **c)** Arătați că $\int_1^e\left(\frac{1}{f(x)}-2\right)\ln x\,dx=\frac{e^2+5}{4}$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $(0,3\cdot 10-1)(0,3\cdot 10+1)=8$.

5p **2.** Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2-6x+m=0$, unde m este număr real. Determinați numărul real m pentru care $x_1x_2(x_1+x_2)=12$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2\sqrt{5-x}=\sqrt{x+10}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra zecilor cu 3 mai mare decât cifra unităților.

5p **5.** Determinați numărul real a pentru care vectorii $\vec{u}=a\vec{i}+(a-1)\vec{j}$ și $\vec{v}=3\vec{i}+4\vec{j}$ sunt coliniari.

5p **6**. Arătați că, dacă x este număr real pentru care $\sin x=\cos x$, atunci $\cos 2x=0$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a,b)=\begin{pmatrix} a & 2b \\ -b & a \end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1,1))=3$.

5p **b)** Demonstrați că $A(a,b)\cdot A(b,a)=A\left(-ab,a^2+b^2\right)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Determinați perechile de numere întregi m și n pentru care $\det(A(m,n))=1$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-15X^2+mX-80$, unde m este număr real.

5p **a)** Pentru $m=95$, arătați că $f(1)=1$.

5p **b)** Determinați numărul real m pentru care $x_1(x_1-x_2)+x_2(x_2-x_3)+x_3(x_3-x_1)=0$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Determinați rădăcinile polinomului f, știind că acestea sunt numere reale în progresie aritmetică.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-x-10$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(0)=0$.

5p **b)** Demonstrați că oricare două tangente la graficul funcției f sunt concurente.

5p **c)** Demonstrați că $e^{x^3}\geq(x+1)\left(x^2-x+1\right)$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$, $f(x)=x+\dfrac{9}{x}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_1^3\left(f(x)-\frac{9}{x}\right)dx=4$.

5p **b)** Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{2}{f(x)}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=9$ are aria egală cu $2\ln 3$.

5p **c)** Determinați numărul real a, știind că $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}\left(f(x)-\frac{9}{x}\right)\operatorname{arctg}x\,dx=\frac{5\pi}{12}-\frac{3+\sqrt{3}-a}{2}$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$b_5^2 = b_4 b_6 \Rightarrow 36 = 18b_4$	**3p**
	$b_4 = 2$	**2p**
2.	$m^2 + m - 4 = m \Leftrightarrow m^2 - 4 = 0$	**3p**
	$m = -2$ sau $m = 2$	**2p**
3.	$10^{2x+2} = 10^{3x} \Leftrightarrow 2x + 2 = 3x$	**3p**
	$x = 2$	**2p**
4.	Cifra unităților, fiind pară, se poate alege în 3 moduri	**2p**
	Pentru fiecare alegere a cifrei unităților, cifra zecilor, fiind nenulă, se poate alege în câte 4 moduri, deci se pot forma $3 \cdot 4 = 12$ numere	**3p**
5.	$OA = 4$, $OB = 4$, $OC = 4$	**3p**
	Centrul cercului circumscris ΔABC are coordonatele $x = 0$, $y = 0$	**2p**
6.	Cum $\operatorname{tg} x = 1$ și $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, obținem $x = \frac{\pi}{4}$	**2p**
	$\sin 2x = \sin \frac{2\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{2} = 1$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) - (-1) \cdot 3 =$	**3p**
	$= -4 + 3 = -1$	**2p**
b)	$\det(A(x)) = \begin{vmatrix} x+2 & 3 \\ -1 & x-2 \end{vmatrix} = x^2 - 1$, pentru orice număr real x	**2p**
	Matricea $A(x)$ este inversabilă $\Leftrightarrow \det(A(x)) \neq 0$, deci $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$	**3p**
c)	$A(a) \cdot A(b) = A(c) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} ab+2a+2b+1 & 3a+3b \\ -a-b & ab-2a-2b+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+2 & 3 \\ -1 & c-2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a + b = 1$ și $c = ab + 1$	**3p**
	$a^2 + b^2 + 2c = a^2 + b^2 + 2ab + 2 = (a+b)^2 + 2 = 1 + 2 = 3$	**2p**
2.a)	$0 \circ 1 = 0 \cdot \sqrt{1-1} + 1 \cdot \sqrt{1-0} =$	**3p**
	$= 0 + 1 = 1$	**2p**
b)	$x \circ x = 2x\sqrt{1-x^2}$, pentru orice $x \in M$	**2p**
	$2x\sqrt{1-x^2} = 0$, deci $x = -1$, $x = 0$ sau $x = 1$, care convin	**3p**
c)	$x \circ \sqrt{1-x^2} = x\sqrt{1-\left(1-x^2\right)} + \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-x^2} = x\sqrt{x^2} + 1 - x^2 = x\lvert x\rvert + 1 - x^2$, pentru orice $x \in M$	**3p**
	Cum $\lvert x\rvert = x$ pentru orice $x \in [0,1]$, obținem $x \circ \sqrt{1-x^2} = x^2 + 1 - x^2 = 1$, pentru orice $x \in [0,1]$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(e^x\right)'+x'\cdot\ln x+x\cdot(\ln x)'-1'=$	**2p**
	$=e^x+1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=e^x+\ln x+1,\ x\in(0,+\infty)$	**3p**
b)	$f(1)=e-1,\ f'(1)=e+1$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)$, adică $y=(e+1)x-2$	**3p**
c)	$x\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right)\Rightarrow\ln x\geq\ln\frac{1}{2}$, deci $f'(x)=e^x+\ln x+1\geq e^x+\ln\frac{e}{2}>e^x>0$, de unde obținem că f este crescătoare pe $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$	**3p**
	Pentru orice $x\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$, $f(x)\geq f\left(\frac{1}{2}\right)$, deci $e^x+x\ln x-1\geq\sqrt{e}+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}-1$, de unde obținem $e^x+x\ln x\geq\sqrt{e}+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}$, pentru orice $x\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$	**2p**
2.a)	$\int_0^1 f(x)\sqrt{x^2+2}\,dx=\int_0^1\left(x^2+2+x\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+2x+\frac{x^2}{2}\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=\frac{1}{3}+2+\frac{1}{2}=\frac{17}{6}$	**2p**
b)	$F'(x)=f(x)=\frac{x^2+x+2}{\sqrt{x^2+2}}$, unde $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcției f	**3p**
	$x^2+x+2>0$, pentru orice număr real x, deci $F'(x)>0$, pentru orice număr real x, de unde obținem că F este crescătoare pe $\mathbb{R}$	**2p**
c)	$\int_0^1 g(x)\,dx=\int_0^1 x'\sqrt{x^2+2}\,dx=x\sqrt{x^2+2}\Big\vert_0^1-\int_0^1 x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}\,dx=\sqrt{3}-\int_0^1\left(\sqrt{x^2+2}-\frac{2}{\sqrt{x^2+2}}\right)dx,$	**3p**
	deci $\int_0^1 g(x)\,dx=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+2\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)\right)\Big\vert_0^1=\frac{\sqrt{3}}{2}+\ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$	
	$\frac{\sqrt{3}}{2}+\ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\ln\frac{a+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, de unde obținem $a=1$, care convine	**2p**

Examenul naţional de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$q=3$, unde q este raţia progresiei geometrice	**3p**
	$b_3=2\cdot 3^2=18$	**2p**
2.	$g(7)=0$	**2p**
	$(f\circ g)(7)=f(g(7))=f(0)=7$	**3p**
3.	$2x-1=(x-2)^2\Leftrightarrow x^2-6x+5=0$	**3p**
	$x=1$, care nu convine, $x=5$, care convine	**2p**
4.	Mulţimea numerelor naturale de o cifră are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile	**2p**
	Mulţimea numerelor naturale de o cifră care verifică $n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)>0$ are 5 elemente, deci sunt 5 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{5}{10}=\dfrac{1}{2}$	**1p**
5.	Mijlocul segmentului AC este punctul $M(2,3)$ şi $m_{BM}=1$	**3p**
	$m_{BD}=1$, deci $m_{BD}=m_{BM}$, de unde obţinem că punctele B, D şi M sunt coliniare	**2p**
6.	$\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x=2\Leftrightarrow 1-\sin 2x=2\Leftrightarrow \sin 2x=-1$	**3p**
	Cum $x\in(0,\pi)$, obţinem $2x=\dfrac{3\pi}{2}$, deci $x=\dfrac{3\pi}{4}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}2&1\\-1&0\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(0))=\begin{vmatrix}2&1\\-1&0\end{vmatrix}=2\cdot 0-1\cdot(-1)=$	**3p**
	$=0+1=1$	**2p**
b)	$A(1)=\begin{pmatrix}3&2\\-2&-1\end{pmatrix}$, $A(2)=\begin{pmatrix}5&4\\-4&-3\end{pmatrix}$, $A(1)\cdot A(2)=\begin{pmatrix}7&6\\-6&-5\end{pmatrix}$	**3p**
	$A(1)+A(2)-A(1)\cdot A(2)=\begin{pmatrix}3&2\\-2&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&4\\-4&-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7&6\\-6&-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I_2$	**2p**
c)	$A(m)\cdot A(n)=\begin{pmatrix}1+2^m+2^n&2^m+2^n\\-2^m-2^n&1-2^m-2^n\end{pmatrix}$, $A(m+n)=\begin{pmatrix}1+2^{m+n}&2^{m+n}\\-2^{m+n}&1-2^{m+n}\end{pmatrix}$, unde m şi n sunt numere naturale	**2p**
	$A(m)\cdot A(n)=A(m+n)\Leftrightarrow 2^{m+n}=2^m+2^n\Leftrightarrow (2^m-1)(2^n-1)=1$ şi, cum m şi n sunt numere naturale, obţinem $m=n=1$	**3p**
2.a)	$(-1)*(-1)=(-1)^2+(-1)^2+(-1)+(-1)=$	**3p**
	$=1+1-1-1=0$	**2p**

b)	$x*y=x^2+x+\frac{1}{4}+y^2+y+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=$	**3p**
	$=\left(x^2+2x\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)+\left(y^2+2y\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)-\frac{1}{2}=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
c)	$x^2*x^2\le 4\Leftrightarrow 2\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\le 4\Leftrightarrow\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{9}{4}$, de unde obținem $x^2+\frac{1}{2}\le\frac{3}{2}$	**3p**
	$x\in[-1,1]$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=2x+4-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+2}=2(x+2)-\frac{1}{2(x+2)}=\frac{4(x+2)^2-1}{2(x+2)}=$	**3p**
	$=\frac{(2(x+2)-1)(2(x+2)+1)}{2(x+2)}=\frac{(2x+3)(2x+5)}{2(x+2)}$, $x\in(-2,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+4x-f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{2}\ln(x+2)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+2)}{2x}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x+2}}{2}=0$	**3p**
c)	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in\left(-2,-\frac{3}{2}\right]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $\left(-2,-\frac{3}{2}\right]$ și $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in\left[-\frac{3}{2},+\infty\right)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $\left[-\frac{3}{2},+\infty\right)$, $f\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{15}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$	**3p**
	Pentru orice $x\in(-2,+\infty)$, $f(x)\ge f\left(-\frac{3}{2}\right)$, deci $x^2+4x-\frac{1}{2}\ln(x+2)\ge-\frac{15}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$, de unde obținem $x^2+4x+\frac{15}{4}\ge\frac{1}{2}\ln(2x+4)$, pentru orice $x\in(-2,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_0^3\left(x^2+1\right)f(x)\,dx=\int_0^3\left(x^2+1+2\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+3x\right)\Big\vert_0^3=$	**3p**
	$=\frac{27}{3}+9=18$	**2p**
b)	$\int_1^3 x f(x)\,dx=\int_1^3\left(x+\frac{2x}{x^2+1}\right)dx=\frac{x^2}{2}\Big\vert_1^3+\ln\left(x^2+1\right)\Big\vert_1^3=$	**3p**
	$=\frac{9-1}{2}+\ln 10-\ln 2=4+\ln 5$	**2p**
c)	F este o primitivă a funcției f și f este continuă, deci, pentru orice număr real x, $F(x+1)-F(x)=\int_x^{x+1}f(t)\,dt$	**2p**
	$f(t)=1+\frac{2}{t^2+1}>1$, pentru orice număr real t, deci $\int_x^{x+1}f(t)\,dt\ge\int_x^{x+1}1dt=x+1-x=1$, de unde obținem că $F(x+1)\ge F(x)+1$, pentru orice număr real x	**3p**

Examenul naţional de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$3(4-i)+3i(1+i)=12-3i+3i+3i^2=$	**3p**
	$=12-3=9$	**2p**
2.	$f(2)=0$	**2p**
	$f(f(2))=f(0)=-4$	**3p**
3.	$x^2-2x+4=3\Rightarrow x^2-2x+1=0$	**3p**
	$x=1$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 9 numere divizibile cu 10, deci sunt 9 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{9}{90}=\dfrac{1}{10}$	**1p**
5.	$m_{OA}=2$, $m_{OB}=\dfrac{a}{3}$, unde a este număr real	**2p**
	$m_{OA}=m_{OB}\Leftrightarrow a=6$	**3p**
6.	$E\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\dfrac{\pi}{4}+\cos\dfrac{\pi}{2}+\cos\dfrac{3\pi}{4}=$	**2p**
	$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+0+\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1,1)=\begin{pmatrix}4&4\\-2&-2\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(1,1))=\begin{vmatrix}4&4\\-2&-2\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=-8-(-8)=0$	**3p**
b)	$\det(A(x,y))=\begin{vmatrix}x+3y&4y\\-2y&x-3y\end{vmatrix}=x^2-y^2$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
	$A(x,y)$ este inversabilă $\Leftrightarrow\det(A(x,y))\neq0\Leftrightarrow x^2-y^2\neq0$, deci $\lvert x\rvert\neq\lvert y\rvert$	**3p**
c)	$A(m,n)\cdot A(-m,n)=\begin{pmatrix}m+3n&4n\\-2n&m-3n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-m+3n&4n\\-2n&-m-3n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n^2-m^2&0\\0&n^2-m^2\end{pmatrix}$, pentru orice numere întregi m și n	**3p**
	$\begin{pmatrix}n^2-m^2&0\\0&n^2-m^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\Leftrightarrow n^2-m^2=1\Leftrightarrow(n-m)(n+m)=1$ și, cum m și n sunt numere întregi, obținem perechile $(0,1)$ sau $(0,-1)$	**2p**

2.a)	$2\circ 0=4^{2\cdot 0}-(1-2-0)=$	**3p**
	$=1-1+2=2$	**2p**
b)	$x\circ\frac{1}{x}=4^{x\cdot\frac{1}{x}}-1+x+\frac{1}{x}=x+\frac{1}{x}+3=x+\frac{1}{x}-2+5=$	**2p**
	$=\frac{x^2+1-2x}{x}+5=\frac{(x-1)^2}{x}+5\geq 5$, pentru orice $x\in A$, $x\neq 0$	**3p**
c)	m și n sunt numere naturale impare, deci $m\geq 1$ și $n\geq 1\Rightarrow mn\geq 1$, de unde obținem că 4^{mn} este număr natural par	**2p**
	m și n sunt numere naturale impare, deci $m+n-1$ este număr natural impar, de unde obținem că $m\circ n=4^{mn}+m+n-1$ este număr natural impar	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=3x^2-3\cdot\frac{1}{x}=$	**3p**
	$=\frac{3(x^3-1)}{x}=\frac{3(x-1)(x^2+x+1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$f(1)=1$, $f'(1)=0$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)$, adică $y=1$	**3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$; pentru $x\in(0,1]$, obținem $f'(x)\leq 0$, deci f este descrescătoare pe $(0,1]$ și pentru $x\in[1,+\infty)$, obținem $f'(x)\geq 0$, deci f este crescătoare pe $[1,+\infty)$	**3p**
	$f(x)\geq f(1)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$ și, cum $f(1)=1$, obținem că $x^3\geq 3\ln x+1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_0^2\frac{f(x)}{e^x}dx=\int_0^2 x\,dx=\frac{x^2}{2}\Big\vert_0^2=$	**3p**
	$=2-0=2$	**2p**
b)	$\int_{-1}^{1}\left(f(x)+e^x\right)dx=\int_{-1}^{1}\left(xe^x+e^x\right)dx=\int_{-1}^{1}\left(xe^x\right)'dx=xe^x\Big\vert_{-1}^{1}=$	**3p**
	$=e+e^{-1}=\frac{e^2+1}{e}$	**2p**
c)	$f'(x)=(x+1)e^x$, deci $f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1$ și, cum $f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in(-\infty,-1]$ și $f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[-1,+\infty)$, obținem că $f(x)\geq f(-1)$, pentru orice număr real x	**2p**
	$f(-1)=-\frac{1}{e}$, deci $\int_{-1-a}^{-1+a}f(x)dx\geq-\frac{1}{e}\int_{-1-a}^{-1+a}dx=-\frac{1}{e}x\Big\vert_{-1-a}^{-1+a}=-\frac{2a}{e}$, pentru orice $a\in(0,+\infty)$	**3p**

Examenul naţional de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\log_2 3+\log_2 12=\log_2 36=\log_2 6^2=$	**3p**
	$=2\log_2 6$, deci numerele date sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice	**2p**
2.	$f(x)=x\Leftrightarrow x^2-x+1=x\Leftrightarrow x^2-2x+1=0$	**3p**
	$x=1$	**2p**
3.	$2x-1=2x+1$ sau $2x-1=-2x-1$	**3p**
	$x=0$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt $4\cdot 5=20$ de numere care au cifra zecilor pară și cifra unităților impară, deci sunt 20 de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{20}{90}=\dfrac{2}{9}$	**1p**
5.	$\dfrac{a}{8}=\dfrac{1}{2}$	**3p**
	$a=4$	**2p**
6.	$\cos B=\dfrac{AB}{BC}\Rightarrow\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{AB}{12}\Rightarrow AB=6\sqrt{3}$	**3p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin B=\dfrac{1}{2}\cdot 6\sqrt{3}\cdot 12\cdot\dfrac{1}{2}=18\sqrt{3}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2)=\begin{pmatrix}3 & 4\\ -1 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(2))=\begin{vmatrix}3 & 4\\ -1 & -1\end{vmatrix}=3\cdot(-1)-(-1)\cdot 4=$	**3p**
	$=-3+4=1$	**2p**
b)	$A(a)\cdot A(b)=\begin{pmatrix}2a-1 & 4a-4\\ 1-a & 3-2a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2b-1 & 4b-4\\ 1-b & 3-2b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a+2b-3 & 4a+4b-8\\ -a-b+2 & -2a-2b+5\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}2(a+b-1)-1 & 4(a+b-1)-4\\ 1-(a+b-1) & 3-2(a+b-1)\end{pmatrix}=A(a+b-1)$, pentru orice numere reale a și b	**2p**
c)	$A(1)\cdot A(2)\cdot A(2^2)\cdot A(2^3)\cdot A(2^4)=A(1+2+2^2+2^3+2^4-4)=A(27)$	**3p**
	$A(27)=A(32+(-n)-1)$, de unde obținem $n=4$	**2p**
2.a)	$1\circ 2=3\cdot 1^2-5\cdot 1\cdot 2+2\cdot 2^2=$	**3p**
	$=3-10+8=1$	**2p**
b)	$x\circ x=3x^2-5x^2+2x^2=$	**3p**
	$=-2x^2+2x^2=0$, pentru orice număr real x	**2p**

c)	$3\cdot 2^{2x}-5\cdot 2^x\cdot 3^x+2\cdot 3^{2x}=0\Leftrightarrow 3\cdot 2^x\left(2^x-3^x\right)-2\cdot 3^x\left(2^x-3^x\right)=0\Leftrightarrow \left(2^x-3^x\right)\left(3\cdot 2^x-2\cdot 3^x\right)=0$	**3p**
	$2^x=3^x$ sau $3^{x-1}=2^{x-1}$, de unde obținem $x=0$ sau $x=1$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{\left(x^2+2x+2\right)'}{2\sqrt{x^2+2x+2}}-x'=$	**3p**
	$=\dfrac{2(x+1)}{2\sqrt{x^2+2x+2}}-1=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}-1,\ x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f(-1)=2,\ f'(-1)=-1$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(-1)=f'(-1)\left(x-(-1)\right)$, adică $y=-x+1$	**3p**
c)	$f'(x)<0$, pentru orice număr real x, deci f este descrescătoare pe $\mathbb{R}$ și, cum $x^2+1\geq 2x$, obținem $f\left(x^2+1\right)\leq f(2x)$, pentru orice număr real x	**3p**
	Cum $f\left(x^2+1\right)=\sqrt{\left(x^2+1\right)^2+2\left(x^2+1\right)+2}-\left(x^2+1\right)$ și $f(2x)=\sqrt{(2x)^2+2\cdot 2x+2}-2x$, obținem $\sqrt{\left(x^2+1\right)^2+2\left(x^2+1\right)+2}-\sqrt{4x^2+4x+2}\leq (x-1)^2$, pentru orice număr real x	**2p**
2.a)	$\displaystyle\int_0^1\left(4-f^2(x)\right)dx=\int_0^1\left(4-\frac{4x^2}{x^2+1}\right)dx=4\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx=4\operatorname{arctg}x\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=4\left(\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}0\right)=\pi$	**2p**
b)	$\mathcal{A}=\displaystyle\int_0^1\left\vert f(x)\right\vert dx=\int_0^1\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int_0^1\frac{\left(x^2+1\right)'}{\sqrt{x^2+1}}dx=$	**3p**
	$=2\sqrt{x^2+1}\Big\vert_0^1=2\left(\sqrt{2}-1\right)$	**2p**
c)	$\displaystyle\int_1^2\frac{f\left(x^2\right)}{x}dx=\int_1^2\frac{2x^2}{x\sqrt{x^4+1}}dx=\int_1^2\frac{2x}{\sqrt{x^4+1}}dx=\int_1^2\frac{\left(x^2\right)'}{\sqrt{\left(x^2\right)^2+1}}dx=$	**3p**
	$=\ln\left(x^2+\sqrt{x^4+1}\right)\Big\vert_1^2=\ln\dfrac{4+\sqrt{17}}{1+\sqrt{2}}=\ln\left(\sqrt{34}-\sqrt{17}+4\sqrt{2}-4\right)$	**2p**

Examenul naţional de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z+\frac{13}{z}=3+2i+\frac{13}{3+2i}=3+2i+\frac{13(3-2i)}{9-4i^2}=3+2i+\frac{13(3-2i)}{13}=$	**3p**
	$=3+2i+3-2i=6$	**2p**
2.	$f(g(a))=f(g(-a))\Leftrightarrow 3g(a)-5=3g(-a)-5\Leftrightarrow g(a)=g(-a)$	**3p**
	$a^2+a=a^2-a\Leftrightarrow a=0$	**2p**
3.	$3^{3x+5}=3^2\cdot 3^{x+1}\Leftrightarrow 3^{3x+5}=3^{x+3}$	**3p**
	$3x+5=x+3\Rightarrow x=-1$	**2p**
4.	Numărul submulţimilor lui A este egal cu 2^4, deci sunt 16 cazuri posibile	**2p**
	Numărul submulţimilor lui A cu un număr impar de elemente este egal cu $C_4^1+C_4^3=8$, deci sunt 8 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$	**1p**
5.	$M(2,4)$ este mijlocul segmentului AB, deci $m_{CM}=-1$	**2p**
	$d\parallel CM\Rightarrow m_d=-1$, deci ecuaţia dreptei d este $y-y_A=m_d(x-x_A)$, adică $y=-x+4$	**3p**
6.	$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos B\Rightarrow 12=4+BC^2-2\cdot 2\cdot BC\cdot\frac{1}{2}$	**3p**
	$BC^2-2BC-8=0\Rightarrow BC=4$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(x))=\begin{vmatrix}1+2x & 0 & -4x\\ 0 & a & 0\\ x & 0 & 1-2x\end{vmatrix}=a(1+2x)(1-2x)+4ax^2=$	**3p**
	$=a(1-4x^2)+4ax^2=a$, pentru orice număr real x	**2p**
b)	$A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}1+2(x+y) & 0 & -4(x+y)\\ 0 & a^2 & 0\\ x+y & 0 & 1-2(x+y)\end{pmatrix}$, $A(x+y)=\begin{pmatrix}1+2(x+y) & 0 & -4(x+y)\\ 0 & a & 0\\ x+y & 0 & 1-2(x+y)\end{pmatrix}$, pentru orice numere reale x şi y	**3p**
	$A(x)\cdot A(y)=A(x+y)\Rightarrow a^2=a$ şi, cum a un număr real nenul, obţinem $a=1$	**2p**
c)	$A(-2)\cdot A(2)=A(0)=I_3$, deci $A(-2)$ este inversa matricei $A(2)$	**2p**
	$X=A(-2)\cdot A(3)\Rightarrow X=A(1)\Rightarrow X=\begin{pmatrix}3 & 0 & -4\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$	**3p**
2.a)	$0*2021=\log_2\left(2^0+2^{2021}-1\right)=\log_2\left(1+2^{2021}-1\right)=$	**3p**
	$=\log_2 2^{2021}=2021$	**2p**

b)	$x*e=x\Leftrightarrow \log_2\left(2^x+2^e-1\right)=x\Leftrightarrow 2^x+2^e-1=2^x$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$, de unde obţinem $2^e=1$, deci $e=0\in M$	**3p**
	Cum $0*x=\log_2\left(1+2^x-1\right)=x$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$, obţinem că $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziţie „*”	**2p**
c)	$x*(x+1)*(x+2)=\log_2\left(2^x+2^{x+1}+2^{x+2}-2\right)$, $x\in M$	**3p**
	$\log_2\left(2^x+2^{x+1}+2^{x+2}-2\right)=\log_2 54\Rightarrow 7\cdot 2^x-2=54\Rightarrow 2^x=8$, deci $x=3$, care convine	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+x+1}}\cdot\left(\frac{x^2+x+1}{x^2+1}\right)'=$	**2p**
	$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+x+1}}\cdot\frac{(2x+1)\left(x^2+1\right)-\left(x^2+x+1\right)\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{1-x^2}{2\left(x^2+1\right)\sqrt{\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+1\right)}}$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}}=1$	**3p**
	Dreapta de ecuaţie $y=1$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ la graficul funcţiei f	**2p**
c)	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(-\infty,-1]\Rightarrow f$ descrescătoare pe $(-\infty,-1]$, $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[-1,1]\Rightarrow f$ crescătoare pe $[-1,1]$ şi $f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in[1,+\infty)\Rightarrow f$ descrescătoare pe $[1,+\infty)$	**2p**
	$f(-1)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $f(1)=\frac{\sqrt{6}}{2}$ şi $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}\le f(x)\le\frac{\sqrt{6}}{2}$, pentru orice număr real x, deci $\sqrt{2}\le f(x)+f(-x)\le\sqrt{6}\Rightarrow\sqrt{2}\le\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2+1}}+\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x^2+1}}\le\sqrt{6}$, pentru orice număr real x	**3p**
2.a)	$\int_1^3\left(f(x)+2\ln x\right)dx=\int_1^3\left(2x+3-2\ln x+2\ln x\right)dx=\int_1^3(2x+3)\,dx=\left(x^2+3x\right)\Big\vert_1^3=$	**3p**
	$=9+9-1-3=14$	**2p**
b)	$\int_1^e\left(2x+3-f(x)\right)dx=2\int_1^e\ln x\,dx=2x\ln x\Big\vert_1^e-2\int_1^e x\cdot\frac{1}{x}dx=$	**3p**
	$=2e-2(e-1)=2$	**2p**
c)	$\int_0^1 x^2f\left(x^3+1\right)dx=\frac{1}{3}\int_1^2 f(t)\,dt=\frac{1}{3}\left(\int_1^2(2t+3)\,dt-2\int_1^2\ln t\,dt\right)=$	**3p**
	$=\frac{1}{3}\left(t^2+3t-2t\ln t+2t\right)\Big\vert_1^2=\frac{1}{3}(4+6-4\ln 2+4-1-3-2)=\frac{4(2-\ln 2)}{3}$	**2p**

Examenul naţional de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați termenul b_4 al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_5=6$ și $b_6=18$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x-4$. Determinaţi numerele reale m, știind că $f(m)=m$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $100\cdot 10^{2x}=10^{3x}$.

5p **4.** Determinaţi câte numere naturale pare, de două cifre, se pot forma cu cifre din mulțimea $\{0,1,2,3,4\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-4,0)$, $B(4,0)$ şi $C(0,4)$. Determinaţi coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC.

5p **6.** Arătați că $\sin 2x=1$, știind că $\operatorname{tg}x=1$ și $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x+2 & 3 \\ -1 & x-2 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=-1$.

5p **b)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care matricea $A(x)$ este inversabilă.

5p **c)** Se consideră numerele reale a, b și c, astfel încât $A(a)\cdot A(b)=A(c)$. Demonstrați că $a^2+b^2+2c=3$.

2. Pe mulțimea $M=[-1,1]$ se definește legea de compoziție $x\circ y=x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}$.

5p **a)** Arătați că $0\circ 1=1$.

5p **b)** Determinați $x\in M$ pentru care $x\circ x=0$.

5p **c)** Demonstrați că $x\circ\sqrt{1-x^2}=1$, pentru orice $x\in[0,1]$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+x\ln x-1$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=e^x+\ln x+1$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $e^x+x\ln x\geq\sqrt{e}+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}$, pentru orice $x\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+2}+\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 f(x)\sqrt{x^2+2}\,dx=\frac{17}{6}$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Se consideră funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$. Determinați $a\in(0,+\infty)$ pentru care $\int_0^1 g(x)\,dx=\frac{\sqrt{3}}{2}+\ln\frac{a+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

Examenul naţional de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinaţi al treilea termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_1=2$ și $b_2=6$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+7$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x-7$. Calculați $(f\circ g)(7)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x-1}=x-2$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să verifice inegalitatea $n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)>0$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1)$, $B(-1,0)$, $C(3,5)$ și $D(5,6)$. Demonstraţi că punctele B, D și mijlocul segmentului AC sunt coliniare.

5p **6.** Determinaţi $x\in(0,\pi)$, ştiind că $(\sin x-\cos x)^2=2$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}1+2^a & 2^a\\ -2^a & 1-2^a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=1$.

5p **b)** Arătați că $A(1)+A(2)-A(1)\cdot A(2)=I_2$.

5p **c)** Se consideră numerele naturale m şi n, astfel încât $A(m)\cdot A(n)=A(m+n)$. Arătaţi că $m=n=1$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=x^2+y^2+x+y$.

5p **a)** Arătați că $(-1)*(-1)=0$.

5p **b)** Demonstrați că $x*y=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care $x^2*x^2\leq 4$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+4x-\frac{1}{2}\ln(x+2)$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{(2x+3)(2x+5)}{2(x+2)}$, $x\in(-2,+\infty)$.

5p **b)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+4x-f(x)}{x}$.

5p **c)** Demonstraţi că $x^2+4x+\frac{15}{4}\geq\frac{1}{2}\ln(2x+4)$, pentru orice $x\in(-2,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1+\frac{2}{x^2+1}$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^3\left(x^2+1\right)f(x)\,dx=18$.

5p **b)** Arătaţi că $\int_1^3 xf(x)\,dx=4+\ln 5$.

5p **c)** Demonstrați că $F(x+1)\geq F(x)+1$, pentru orice număr real x, unde F este o primitivă a lui f.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $3(4-i)+3i(1+i)=9$, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4$. Calculați $(f\circ f)(2)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3\left(x^2-2x+4\right)=1$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 10.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,4)$ și $B(3,a)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, știind că punctele O, A și B sunt coliniare.

5p **6.** Se consideră $E(x)=\cos x+\cos 2x+\cos 3x$, unde x este număr real. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ și $A(x,y)=\begin{pmatrix}x+3y&4y\\-2y&x-3y\end{pmatrix}$, unde x și y sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1,1))=0$.

5p **b)** Demonstrați că, dacă matricea $A(x,y)$ este inversabilă, atunci $|x|\neq|y|$.

5p **c)** Determinaţi perechile (m,n), de numere întregi, pentru care $A(m,n)\cdot A(-m,n)=I_2$.

2. Pe mulțimea $A=[0,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x\circ y=4^{xy}-(1-x-y)$.

5p **a)** Arătați că $2\circ 0=2$.

5p **b)** Arătați că $x\circ\frac{1}{x}\geq 5$, pentru orice $x\in A$, $x\neq 0$.

5p **c)** Demonstrați că, dacă m și n sunt numere naturale impare, atunci $m\circ n$ este număr natural impar.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3\ln x$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{3(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $x^3\geq 3\ln x+1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^2\frac{f(x)}{e^x}dx=2$.

5p **b)** Arătați că $\int_{-1}^{1}\left(f(x)+e^x\right)dx=\frac{e^2+1}{e}$.

5p **c)** Demonstrați că $\int_{-1-a}^{-1+a}f(x)\,dx\geq-\frac{2a}{e}$, pentru orice $a\in(0,+\infty)$.

Examenul naţional de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că numerele $\log_2 3$, $\log_2 6$ și $\log_2 12$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-x+1$. Determinați numărul real x pentru care $f(x)=x$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $|2x-1|=2x+1$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra zecilor pară și cifra unităților impară.

5p **5.** Determinaţi numărul real a, pentru care vectorii $\vec{u}=a\vec{i}+\vec{j}$ și $\vec{v}=8\vec{i}+2\vec{j}$ sunt coliniari.

5p **6.** În triunghiul ABC dreptunghic în A, $BC=12$ și $B=\frac{\pi}{6}$. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu $18\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2a-1 & 4a-4\\ 1-a & 3-2a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(2))=1$.

5p **b)** Demonstrați că $A(a)\cdot A(b)=A(a+b-1)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Determinați numărul natural n, știind că $A(1)\cdot A(2)\cdot A(2^2)\cdot A(2^3)\cdot A(2^4)=A(32)\cdot A(-n)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=3x^2-5xy+2y^2$.

5p **a)** Arătați că $1\circ 2=1$.

5p **b)** Demonstrați că $x\circ x=0$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $2^x\circ 3^x=0$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+2x+2}-x$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}-1$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=-1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $\sqrt{\left(x^2+1\right)^2+2\left(x^2+1\right)+2}-\sqrt{4x^2+4x+2}\le(x-1)^2$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1\left(4-f^2(x)\right)dx=\pi$.

5p **b)** Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$ are aria egală cu $2\left(\sqrt{2}-1\right)$.

5p **c)** Arătați că $\int_1^2 \frac{f\left(x^2\right)}{x}dx=\ln\left(\sqrt{34}-\sqrt{17}+4\sqrt{2}-4\right)$.

Examenul naţional de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numărul complex $z=3+2i$. Arătați că $z+\frac{13}{z}=6$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-5$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2+x$. Determinați numărul real a pentru care $(f\circ g)(a)=(f\circ g)(-a)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{3x+5}=9\cdot 3^{x+1}$.

5p **4.** Se consideră A, o mulțime cu 4 elemente. Calculați probabilitatea ca, alegând o mulțime din mulțimea submulțimilor lui A, aceasta să aibă un număr impar de elemente.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,3)$, $B(3,5)$ și $C(0,6)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul A și este paralelă cu mediana din vârful C a triunghiului ABC.

5p **6.** Calculați lungimea laturii BC a triunghiului ABC, știind că $AB=2$, $AC=2\sqrt{3}$ și $B=\frac{\pi}{3}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră a un număr real nenul și matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1+2x & 0 & -4x\\ 0 & a & 0\\ x & 0 & 1-2x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(x))=a$, pentru orice număr real x.

5p **b)** Determinați numărul real nenul a astfel încât $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Pentru $a=1$, determinați matricea $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pentru care $A(2)\cdot X=A(3)$.

2. Pe mulțimea $M=[0,+\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\log_2\left(2^x+2^y-1\right)$.

5p **a)** Arătați că $0*2021=2021$.

5p **b)** Determinați elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Determinați $x\in M$ pentru care $x*(x+1)*(x+2)=\log_2 54$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2+1}}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{1-x^2}{2\left(x^2+1\right)\sqrt{\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+1\right)}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $\sqrt{2}\le\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2+1}}+\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x^2+1}}\le\sqrt{6}$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+3-2\ln x$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^3\left(f(x)+2\ln x\right)dx=14$.

5p **b)** Calculați $\int_1^e \left(2x+3-f\left(x\right)\right)dx$.

5p **c)** Arătați că $\int_0^1 x^2 f\left(x^3+1\right)dx = \frac{4\left(2-\ln 2\right)}{3}$.

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$r=a_3-a_2=6$, unde r este rația progresiei aritmetice	**2p**
	$a_1=a_2-r=6-6=0$	**3p**
2.	$a-5+2a-5=2\Leftrightarrow 3a=12$	**3p**
	$a=4$	**2p**
3.	$5^{x-1}=5^2$, deci $x-1=2$	**3p**
	$x=3$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 6 numere care sunt multipli de 16, deci sunt 6 cazuri favorabile, de unde obținem $p=\frac{6}{90}=\frac{1}{15}$	**3p**
5.	$A\left(\frac{1+x_C}{2},\frac{4+y_C}{2}\right)$, de unde obținem $x_C=5$	**3p**
	$y_C=0$	**2p**
6.	$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\frac{\pi}{2}=1$, $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$	**3p**
	$E\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}+1-\frac{\sqrt{3}}{2}=1$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=1\cdot 1-(-1)\cdot(-1)=$	**3p**
	$=1-1=0$	**2p**
b)	$B(0)=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 2 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow B(x)-B(0)=\begin{pmatrix}x & -x\\ -x & x\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=x\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=xA$, pentru orice număr real x	**2p**
c)	$C(a)=\begin{pmatrix}a & 3-a\\ 2-a & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a+1 & 2-a\\ 1-a & a+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-a & 2a+1\\ a+1 & 3-2a\end{pmatrix}\Rightarrow \det(C(a))=-10a+5$, pentru orice număr întreg a	**3p**
	$-10a+5=0\Rightarrow a=\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}$, deci matricea $C(a)$ este inversabilă, pentru orice număr întreg a	**2p**
2.a)	$1*2=(2\cdot 1-1)(2\cdot 2-1)+1=$	**3p**
	$=1\cdot 3+1=4$	**2p**

b)	$x*x=4x^2-4x+2$, pentru orice număr real x	**2p**
	$4x^2-4x+2=2\Rightarrow 4x^2-4x=0$, de unde obținem $x=0$ sau $x=1$	**3p**
c)	$m*\left(1+\frac{1}{m}\right)=(2m-1)\left(1+\frac{2}{m}\right)+1$, pentru orice număr întreg nenul m	**2p**
	$(2m-1)\left(1+\frac{2}{m}\right)=0$ și, cum m este număr întreg nenul, obținem $m=-2$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(2x^2\right)'+1'+(\ln x)'=$	**2p**
	$=4x+\frac{1}{x}=\frac{4x^2+1}{x}$, $x\in(0,+\infty)$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)-\ln x}{x^2+x+4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2+1}{x^2+x+4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}}=2$	**2p**
c)	$f'(x)>0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)\Rightarrow f$ este strict crescătoare, deci f este injectivă	**2p**
	f este continuă, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-\infty$ și $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, deci f este surjectivă, de unde obținem că f este bijectivă	**3p**
2.a)	$\int_0^4\frac{f(x)}{e^x+2x^2}dx=\int_0^4 x\,dx=\frac{x^2}{2}\Big\vert_0^4=$	**3p**
	$=\frac{16}{2}-0=8$	**2p**
b)	$\int_0^1\left(f(x)-2x^3\right)dx=\int_0^1 xe^x\,dx=xe^x\Big\vert_0^1-\int_0^1 e^x\,dx=e-e^x\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=e-e+1=1$	**2p**
c)	$\int_1^2\frac{1}{x}\cdot f\left(x^2\right)dx=\int_1^2\frac{1}{x}\cdot x^2\left(e^{x^2}+2x^4\right)dx=\frac{1}{2}\int_1^2\left(x^2\right)'e^{x^2}\,dx+\int_1^2 2x^5\,dx=\frac{1}{2}e^{x^2}\Big\vert_1^2+\frac{x^6}{3}\Big\vert_1^2=\frac{e^4-e}{2}+21$	**3p**
	$\frac{e^4-e}{2}+21=\frac{e^4-e}{2}+a$, de unde obținem $a=21$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)\left(2+\sqrt{2}\right)=\left(2-\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)=$	**3p**
	$=4-2=2$	**2p**
2.	$f\left(x\right)=0\Leftrightarrow 2x^2-4x=0$	**3p**
	$x=0$ sau $x=2$	**2p**
3.	$2^{x-3}=2^{-2x}\Leftrightarrow x-3=-2x$	**3p**
	$x=1$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 9 numere care sunt multipli de 11, deci sunt 9 cazuri favorabile, de unde obținem $p=\frac{9}{90}=\frac{1}{10}$	**3p**
5.	$AC=5$	**2p**
	$BC=\sqrt{4^2+3^2}=5$, deci $AC=BC$, de unde obținem că triunghiul ABC este isoscel	**3p**
6.	$\text{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$, $\sin\frac{\pi}{2}=1$, $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$	**3p**
	$E\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}+1-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=1$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$M\left(1\right)=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(M\left(1\right)\right)=\begin{vmatrix}2 & -1\\ -2 & 3\end{vmatrix}=2\cdot 3-\left(-1\right)\cdot\left(-2\right)=$	**3p**
	$=6-2=4$	**2p**
b)	$M\left(x\right)\cdot M\left(1\right)=\begin{pmatrix}4x+2 & -4x-1\\ -8x-2 & 8x+3\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}\left(4x+1\right)+1 & -\left(4x+1\right)\\ -2\left(4x+1\right) & 2\left(4x+1\right)+1\end{pmatrix}=M\left(4x+1\right)$, pentru orice număr real x	**2p**
c)	$M\left(x\right)\cdot M\left(1\right)\cdot M\left(1\right)=\left(M\left(x\right)\cdot M\left(1\right)\right)\cdot M\left(1\right)=M\left(4x+1\right)\cdot M\left(1\right)=M\left(16x+5\right)$, pentru orice număr real x	**3p**
	$M\left(16x+5\right)=M\left(x+2\right)$, de unde obținem $16x+5=x+2$, deci $x=-\frac{1}{5}$	**2p**
2.a)	$\left(-1\right)\circ 0=5\cdot\left(-1\right)\cdot 0+10\cdot\left(-1\right)+10\cdot 0+18=$	**3p**
	$=-10+18=8$	**2p**
b)	$x\circ y=5xy+10x+10y+20-2=5x\left(y+2\right)+10\left(y+2\right)-2=$	**3p**
	$=\left(5x+10\right)\left(y+2\right)-2=5\left(x+2\right)\left(y+2\right)-2$, pentru orice numere reale x și y	**2p**

c)	$m\circ m=5(m+2)^2-2$, pentru orice număr întreg m	**2p**
	$5(m+2)^2-2=m\Rightarrow(m+2)(5m+9)=0$ și, cum m este număr întreg, obținem $m=-2$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{2x(x-1)-(x^2+1)}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{x-1}=$	**3p**
	$=\dfrac{x^2-2x-1+x-1}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-x-2}{(x-1)^2}$, $x\in(1,+\infty)$	**2p**
b)	$f(2)=5$, $f'(2)=0$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(2)=f'(2)(x-2)$, adică $y=5$	**3p**
c)	$f'(x)=0\Rightarrow x=2$; pentru $x\in(1,2]\Rightarrow f'(x)\le 0$, deci f este descrescătoare pe $(1,2]$ și pentru $x\in[2,+\infty)\Rightarrow f'(x)\ge 0$, deci f este crescătoare pe $[2,+\infty)$	**3p**
	$f(x)\ge f(2)$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$, de unde obținem $\dfrac{x^2+1}{x-1}+\ln(x-1)\ge 5$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\displaystyle\int_0^2 f(x)(6x^2+1)\,dx=\int_0^2(x+4)\,dx=\left(\frac{x^2}{2}+4x\right)\Big\vert_0^2=$	**3p**
	$=2+8=10$	**2p**
b)	$\displaystyle\int_0^2\left(f(x)-\frac{4}{6x^2+1}\right)dx=\int_0^2\frac{x}{6x^2+1}\,dx=\frac{1}{12}\int_0^2\frac{(6x^2+1)'}{6x^2+1}\,dx=\frac{1}{12}\ln(6x^2+1)\Big\vert_0^2=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{12}\ln 25=\dfrac{\ln 5}{6}$	**2p**
c)	$\displaystyle\int_0^1\frac{x+4}{f(x)}\cdot e^{2x}\,dx=\int_0^1(6x^2+1)\cdot e^{2x}\,dx=\int_0^1(6x^2+1)\cdot\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)'dx=(6x^2+1)\cdot\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)\Big\vert_0^1-\int_0^1 6xe^{2x}\,dx=$	**3p**
	$=\dfrac{7e^2-1}{2}-3xe^{2x}\Big\vert_0^1+\dfrac{3e^{2x}}{2}\Big\vert_0^1=2e^2-2$	
	$2e^2-2=m(e^2-1)$, de unde obținem $m=2$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$m_a=\frac{a+b}{2}=\frac{20-\sqrt{21}+22+\sqrt{21}}{2}=$	**3p**
	$=\frac{42}{2}=21$	**2p**
2.	$f(a)=a-1$, pentru orice număr real a	**2p**
	$g(a)=3-a\Rightarrow f(a)+g(a)=a-1+3-a=2$, pentru orice număr real a	**3p**
3.	$7x-6=x^2\Rightarrow x^2-7x+6=0$	**2p**
	$x=1$ sau $x=6$, care convin	**3p**
4.	Cifra unităților se poate alege în 2 moduri	**2p**
	Pentru fiecare alegere a cifrei unităților, cifra zecilor se poate alege în câte 4 moduri, deci se pot forma $2\cdot 4=8$ numere	**3p**
5.	$M(3,3)$	**2p**
	$OM=3\sqrt{2}$, $AM=3\sqrt{2}$, de unde obținem că triunghiul AOM este isoscel	**3p**
6.	Măsura unghiului ACB este egală cu $30°$	**2p**
	Dacă AD este înălțimea din vârful A a triunghiului ABC, atunci triunghiul ACD este dreptunghic, cu unghiul ACD de $30°$, de unde obținem $AD=\frac{AC}{2}=2$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1\cdot 2-(-1)\cdot 1=$	**3p**
	$=2+1=3$	**2p**
b)	$A(-1)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $A(2)=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow A(-1)\cdot A(2)-A(-1)=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=2I_2$	**2p**
c)	$A(x)\cdot A(-x)+xA(x)=\begin{pmatrix}1+x^2 & x^2\\ -x^2 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x & -x^2\\ x^2 & x^2+x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+x+x^2 & 0\\ 0 & 1+x+x^2\end{pmatrix}=(x^2+x+1)I_2$,	**3p**
	pentru orice număr real x	
	$(x^2+x+1)I_2=3I_2$, de unde obținem $x^2+x-2=0$, deci $x=-2$ sau $x=1$	**2p**
2.a)	$1\circ 2=4(1\cdot 2+1)-3(1+2)=$	**3p**
	$=12-9=3$	**2p**
b)	$a\circ 3=9a-5$, deci $9a-5=4$, de unde obținem $a=1$	**3p**
	$a\circ(-a)=1\circ(-1)=4(-1+1)-3(1-1)=0$	**2p**

c)	$x\circ 1=x+1$, $(x\circ 1)\circ(x-1)=4x^2-6x$, pentru orice număr real x	**3p**
	$4x^2-6x\le 4$, de unde obținem $x\in\left[-\frac{1}{2},2\right]$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=4x+1-\frac{5}{x}=$	**3p**
	$=\frac{4x^2+x-5}{x}=\frac{(x-1)(4x+5)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)+5\ln x}{3-x-x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2+x+3}{3-x-x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(2+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x}-1\right)}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}{\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x}-1}=-2$	**2p**
c)	$f'(x)=0\Rightarrow x=1$; $f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(0,1]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(0,1]$ și $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[1,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[1,+\infty)$, deci $f(x)\ge f(1)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**3p**
	$f(1)=6$, deci $2x^2+x+3-5\ln x\ge 6$, de unde obținem $2x^2+x\ge 3+5\ln x$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_0^1\frac{f(x)}{e^x}dx=\int_0^1(3-2x)\,dx=\left(3x-2\cdot\frac{x^2}{2}\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=3-1=2$	**2p**
b)	$\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2(3-2x)e^x dx=(3-2x)\,e^x\Big\vert_0^2+2e^x\Big\vert_0^2=$	**3p**
	$=-e^2-3+2e^2-2=e^2-5$	**2p**
c)	$\int_a^1\frac{e^{3x}}{f^3(x)}dx=\int_a^1\frac{1}{(3-2x)^3}dx=-\frac{1}{2}\int_a^1\frac{(3-2x)'}{(3-2x)^3}dx=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(3-2x)^2}\Big\vert_a^1=\frac{1}{4}\cdot\left(1-\frac{1}{(3-2a)^2}\right)$, pentru orice $a\in(-\infty,1)$	**3p**
	$\frac{1}{4}\cdot\left(1-\frac{1}{(3-2a)^2}\right)=\frac{2}{9}$ și, cum $a\in(-\infty,1)$, obținem $a=0$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$N=\log_2\frac{24}{12}+3=\log_2 2+3=$	**3p**
	$=1+3=4=2^2$	**2p**
2.	$f(a)=a^2 \Leftrightarrow a^2-2a+1=0$	**3p**
	$a=1$	**2p**
3.	$x^2-2x-2=(x-2)^2 \Rightarrow x^2-2x-2=x^2-4x+4$	**3p**
	$x=3$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea A are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile	**2p**
	Numerele divizibile cu 9 din mulțimea A sunt $6!$, $7!$, $8!$, $9!$ și $10!$, deci sunt 5 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{1}{2}$	**1p**
5.	$\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$	**2p**
	$2\left(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{FC}\right)=2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$	**3p**
6.	$(\sin x+\cos x)^2-(\sin x-\cos x)^2=4\sin x\cos x=$	**2p**
	$=2\sin 2x=2\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$, pentru orice număr real x	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(-1)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(-1))=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -2 & 1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1\cdot 1-1\cdot(-2)=3$	**3p**
b)	$\det(A(x))=\begin{vmatrix}x^2 & 1\\ x-1 & 1\end{vmatrix}=x^2-x+1$, pentru orice număr real x	**3p**
	Cum $\det(A(x))\neq 0$ pentru orice număr real x, obținem că matricea $A(x)$ este inversabilă pentru orice număr real x	**2p**
c)	$A(1)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow (A(1))^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	**2p**
	Cum $A(2)=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ și $X=(A(1))^{-1}\cdot A(2)\cdot(A(1))^{-1}$, obținem $X=\begin{pmatrix}3 & -3\\ 1 & 0\end{pmatrix}$	**3p**
2.a)	$\sqrt{2}\circ 0=\sqrt{2}\cdot 0-\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+0-1\right)+2=$	**3p**
	$=-2+\sqrt{2}+2=\sqrt{2}$	**2p**

b)	$x^2-2-\sqrt{2}\left(x-\sqrt{2}+x+\sqrt{2}-1\right)+2=x \Leftrightarrow x^2-\left(2\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}=0$	**3p**
	$x=\sqrt{2}-1$ sau $x=\sqrt{2}+2$	**2p**
c)	$e=\sqrt{2}+1$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”, deci a este simetrizabil în raport cu „$\circ$” dacă și numai dacă există a', astfel încât $a\circ a'=a'\circ a=\sqrt{2}+1$	**2p**
	$aa'-\sqrt{2}\left(a+a'-1\right)+2=\sqrt{2}+1 \Leftrightarrow aa'+1-\sqrt{2}\left(a+a'\right)=0$ deci, dacă a și a' sunt numere raționale, obținem $a+a'=0$ și $aa'=-1$, deci $a=-1$ sau $a=1$, care convin	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(x-\ln\left(x^2+1\right)\right)'=1-\dfrac{1}{x^2+1}\cdot 2x=$	**3p**
	$=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+1}=\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	Tangenta la graficul funcției f în punctul A este paralelă cu dreapta de ecuație $y=\dfrac{1}{5}x+1$, deci $f'(n)=\dfrac{1}{5}$	**3p**
	$5(n-1)^2=n^2+1 \Leftrightarrow 2n^2-5n+2=0$ și, cum n este număr natural nenul, obținem $n=2$	**2p**
c)	$f'(x)>0$, pentru orice $x\in(0,1)\Rightarrow f$ strict crescătoare pe $(0,1)$, $f'(x)>0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)\Rightarrow f$ strict crescătoare pe $(1,+\infty)$ și, cum f este continuă în $x=1$, obținem că f este strict crescătoare pe $(0,+\infty)$, deci injectivă	**2p**
	Cum $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ și f este continuă și strict crescătoare pe $(0,+\infty)$, obținem că f este surjectivă, deci bijectivă	**3p**
2.a)	$\displaystyle\int_1^e x^2\left(f(x)+\frac{2\ln x}{x^3}\right)dx=\int_1^e \frac{1}{x}\,dx=\ln x\Big|_1^e=$	**3p**
	$=\ln e-\ln 1=1$	**2p**
b)	$\displaystyle\int_1^{\sqrt{5}} x\cdot f\left(x^2+3\right)dx=\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{5}}\left(x^2+3\right)'\cdot f\left(x^2+3\right)dx=\frac{1}{2}F\left(x^2+3\right)\Big|_1^{\sqrt{5}}=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\ln 8}{64}-\dfrac{\ln 4}{16}\right)=-\dfrac{5\ln 2}{128}$	**2p**
c)	$\displaystyle\int_e^{e^2} xF(x)\,dx=\int_e^{e^2}\frac{\ln x}{x}dx=\frac{\ln^2 x}{2}\Big|_e^{e^2}=\frac{\ln^2\left(e^2\right)-\ln^2 e}{2}=\frac{3}{2}$	**3p**
	$\dfrac{a^2-1}{2}=\dfrac{3}{2}$, de unde obținem $a=-2$ sau $a=2$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$q=\frac{b_2}{b_1}=2\sqrt{2}$, unde q este raţia progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$	**2p**
	$b_4=b_1q^3=\sqrt{2}\cdot\left(2\sqrt{2}\right)^3=32$	**3p**
2.	Axa Ox este tangentă graficului funcţiei $f \Leftrightarrow \Delta=0 \Leftrightarrow 4-4m=0$	**3p**
	$m=1$	**2p**
3.	$3^{x-1}\left(3^3-3-6\right)=6 \Leftrightarrow 3^{x-1}\cdot 18=6 \Leftrightarrow 3^{x-1}=\frac{1}{3}$	**3p**
	$x-1=-1$, deci $x=0$	**2p**
4.	Mulţimea A are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Numărul $2n-60$ aparţine mulţimii A dacă $10\leq 2n-60\leq 99$, deci sunt 45 de cazuri favorabile, de unde obţinem $p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{45}{90}=\frac{1}{2}$	**3p**
5.	$m_{AB}=-\frac{1}{3}$ şi, cum $d\perp AB$, obţinem $m_d=3$	**2p**
	$C(2,3)$ şi, cum $C\in d$, obţinem că ecuaţia dreptei d este $y-3=3(x-2)$, adică $y=3x-3$	**3p**
6.	$AC=AB=6$	**2p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot AC\cdot\sin 120^\circ}{2}=\frac{6\cdot 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=9\sqrt{3}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=0\cdot 0-1\cdot(-1)=$	**3p**
	$=0+1=1$	**2p**
b)	$B(3)\cdot B(5)=(3I_2+iA)(5I_2+iA)=15I_2+8iA+i^2A\cdot A=16I_2+8iA=$	**3p**
	$=8(2I_2+iA)=8B(2)$, deci $x=2$	**2p**
c)	$B(m)+iB(n)=\begin{pmatrix}m+in & i-1\\ -i+1 & m+in\end{pmatrix}\Rightarrow \det(B(m)+iB(n))=(m+in)^2-2i$, unde $m, n\in\mathbb{Z}$	**2p**
	$B(m)+iB(n)$ nu este inversabilă, deci $\det(B(m)+iB(n))=0\Rightarrow m^2-n^2+2(mn-1)i=0$ şi, cum m şi n sunt numere întregi, obţinem perechile $(-1,-1)$ şi $(1,1)$	**3p**
2.a)	$2*5=2\cdot 5-\sqrt{(2-1)(5-1)}=$	**3p**
	$=10-\sqrt{4}=8$	**2p**

b)	$x*1=x\cdot 1-\sqrt{(x-1)(1-1)}=x$, pentru orice $x\in M$	**2p**
	$1*x=1\cdot x-\sqrt{(1-1)(x-1)}=x$, pentru orice $x\in M$, deci $e=1$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**3p**
c)	$\big((nx)*y\big)-x(n*y)=x\sqrt{(n-1)(y-1)}-\sqrt{(nx-1)(y-1)}=\sqrt{y-1}\cdot\dfrac{(x-1)(nx-x-1)}{x\sqrt{n-1}+\sqrt{nx-1}}$, pentru $x,y\in M$ și $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$	**2p**
	Cum $nx-x-1=x(n-1)-1$ și $x\geq 1$, n este număr natural, $n\geq 2$, obținem $nx-x-1\geq 0$, deci $(nx)*y\geq x(n*y)$, pentru orice $x,y\in M$ și orice număr natural n, $n\geq 2$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{\frac{2}{\sqrt{x}}\cdot\left(x^2+3\right)-4\sqrt{x}\cdot 2x}{\left(x^2+3\right)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{2x^2+6-8x^2}{\sqrt{x}\left(x^2+3\right)^2}=\dfrac{6\left(1-x^2\right)}{\sqrt{x}\left(x^2+3\right)^2}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	Tangenta la graficul funcției f în punctul $A\big(a,f(a)\big)$ este paralelă cu axa $Ox\Leftrightarrow f'(a)=0$, deci $1-a^2=0$	**3p**
	Cum $a\in(0,+\infty)$, obținem $a=1$	**2p**
c)	$f'(x)<0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(1,+\infty)$	**2p**
	$1<x<x+\dfrac{1}{x}\Rightarrow f(x)>f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$, deci $\dfrac{\sqrt{x}}{x^2+3}>\dfrac{\sqrt{x+\frac{1}{x}}}{x^2+\frac{1}{x^2}+5}$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\displaystyle\int_0^1 e^x f(x)\,dx=\int_0^1\left(e^x+2x\right)dx=\left(e^x+x^2\right)\Big|_0^1=$	**3p**
	$=e+1-1=e$	**2p**
b)	$\displaystyle\int_{-1}^0 f(x)\,dx=\int_{-1}^0\left(1+2xe^{-x}\right)dx=\left(x-2(x+1)e^{-x}\right)\Big|_{-1}^0=$	**3p**
	$=-2-(-1)=-1$	**2p**
c)	$F'(x)=f(x)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, deci $\displaystyle\int_0^1 F(x)f''(x)dx=F(x)f'(x)\Big|_0^1-\frac{f^2(x)}{2}\Big|_0^1=$	**3p**
	$=F(1)f'(1)-F(0)f'(0)-\dfrac{f^2(1)-f^2(0)}{2}$	
	$f'(x)=2(1-x)e^{-x}$, deci $f'(1)=0$ și, cum $F(0)=0$, obținem $\displaystyle\int_0^1 F(x)f''(x)dx=\frac{-2(e+1)}{e^2}$, deci $a=-2$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați termenul a_1 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_2=6$ și $a_3=12$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-5$. Determinați numărul real a pentru care $f(a)+f(2a)=2$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^x\cdot\frac{1}{5}=25$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie multiplu de 16.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,2)$ și $B(1,4)$. Determinați coordonatele punctului C, astfel încât punctul A este mijlocul segmentului BC.

5p **6.** Se consideră expresia $E(x)=\sin x+\sin\frac{3x}{2}-\cos\frac{x}{2}$, unde x este număr real. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{3}\right)=1$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}x & 3-x\\ 2-x & x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=0$.

5p **b)** Arătați că $B(x)-B(0)=xA$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Arătați că matricea $C(a)=B(a)\cdot B(1)-B(a+1)$ este inversabilă, pentru orice număr întreg a.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=(2x-1)(2y-1)+1$.

5p **a)** Arătați că $1*2=4$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $x*x=2$.

5p **c)** Determinați numărul întreg nenul m pentru care $m*\left(1+\frac{1}{m}\right)=1$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2+1+\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{4x^2+1}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)-\ln x}{x^2+x+4}=2$.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este bijectivă.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\left(e^x+2x^2\right)$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^4\frac{f(x)}{e^x+2x^2}dx=8$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 \left(f(x) - 2x^3 \right) dx = 1$.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $\int_1^2 \frac{1}{x} \cdot f\left(x^2\right) dx = \frac{e^4 - e}{2} + a$.

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)\left(2+\sqrt{2}\right)=2$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f\left(x\right)=2x^2-4x$. Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{x-3}=\dfrac{1}{2^{2x}}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie multiplu de 11.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A\left(-1,0\right)$, $B\left(0,3\right)$ și $C\left(4,0\right)$. Arătați că triunghiul ABC este isoscel.

5p **6.** Se consideră $E\left(x\right)=\operatorname{tg}x+\sin\dfrac{3x}{2}-2\cos\dfrac{x}{2}$, unde $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. Arătați că $E\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=1$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $M\left(x\right)=\begin{pmatrix}x+1 & -x\\ -2x & 2x+1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(M\left(1\right)\right)=4$.

5p **b)** Arătați că $M\left(x\right)\cdot M\left(1\right)=M\left(4x+1\right)$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $M\left(x\right)\cdot M\left(1\right)\cdot M\left(1\right)=M\left(x+2\right)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=5xy+10x+10y+18$.

5p **a)** Arătați că $\left(-1\right)\circ 0=8$.

5p **b)** Demonstrați că $x\circ y=5\left(x+2\right)\left(y+2\right)-2$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numărul întreg m pentru care $m\circ m=m$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\left(1,+\infty\right)\to\mathbb{R}$, $f\left(x\right)=\dfrac{x^2+1}{x-1}+\ln\left(x-1\right)$.

5p **a)** Arătați că $f'\left(x\right)=\dfrac{x^2-x-2}{\left(x-1\right)^2}$, $x\in\left(1,+\infty\right)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=2$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $\dfrac{x^2+1}{x-1}+\ln\left(x-1\right)\geq 5$, pentru orice $x\in\left(1,+\infty\right)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f\left(x\right)=\dfrac{x+4}{6x^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^2 f\left(x\right)\left(6x^2+1\right)dx=10$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^2 \left(f(x) - \frac{4}{6x^2+1} \right) dx = \frac{\ln 5}{6}$.

5p **c)** Determinați numărul real m pentru care $\int_0^1 \frac{x+4}{f(x)} \cdot e^{2x} dx = m\left(e^2 - 1\right)$.

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că media aritmetică a numerelor $a=20-\sqrt{21}$ și $b=22+\sqrt{21}$ este egală cu 21.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=3-x$. Arătați că $f(a)+g(a)=2$, pentru orice număr real a.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{7x-6}=x$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale pare, de două cifre, au cifrele elemente ale mulțimii $\{1,2,3,4\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(6,0)$ și $B(6,6)$. Arătați că triunghiul AOM este isoscel, unde punctul M este mijlocul segmentului OB.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, astfel încât $AC=4$ și măsura unghiului B este egală cu $60°$. Arătați că înălțimea din vârful A a triunghiului ABC are lungimea egală cu 2.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}1&-x\\x&x+1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=3$.

5p **b)** Arătați că $A(-1)\cdot A(2)-A(-1)=2I_2$.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $A(x)\cdot A(-x)+xA(x)=3I_2$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=4(xy+1)-3(x+y)$.

5p **a)** Arătați că $1\circ 2=3$.

5p **b)** Arătați că, dacă $a\circ 3=4$, atunci $a\circ(-a)=0$.

5p **c)** Determinați valorile reale ale lui x pentru care $(x\circ 1)\circ(x-1)\le 4$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2+x+3-5\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{(x-1)(4x+5)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)+5\ln x}{3-x-x^2}=-2$.

5p **c)** Demonstrați că $2x^2+x\ge 3+5\ln x$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(3-2x)e^x$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1\frac{f(x)}{e^x}\,dx=2$.

5p **b)** Arătați că $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx=e^2-5$.

5p **c)** Determinați $a\in(-\infty,1)$ pentru care $\displaystyle\int_a^1\frac{e^{3x}}{f^3(x)}\,dx=\frac{2}{9}$.

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că numărul $N=\log_2 24-\log_2 12+3$ este pătratul unui număr natural.

5p **2.** Determinați numărul real a pentru care punctul $A\left(a,a^2\right)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f\left(x\right)=2x-1$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2-2x-2}=x-2$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\left\{1!,\,2!,\,3!,\,...,\,10!\right\}$, acesta să fie divizibil cu 9.

5p **5.** Se consideră triunghiul ABC și punctul D mijlocul segmentului BC. Arătați că, pentru orice puncte E și F astfel încât $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{FD}$, are loc relația $2\left(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{FC}\right)=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

5p **6.** Arătați că $\left(\sin x+\cos x\right)^2-\left(\sin x-\cos x\right)^2=2\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A\left(x\right)=\begin{pmatrix}x^2 & 1\\ x-1 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A\left(-1\right)\right)=3$.

5p **b)** Demonstrați că matricea $A\left(x\right)$ este inversabilă, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2\left(\mathbb{R}\right)$ pentru care $A\left(1\right)\cdot X\cdot A\left(1\right)=A\left(2\right)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $x\circ y=xy-\sqrt{2}\left(x+y-1\right)+2$.

5p **a)** Arătați că $\sqrt{2}\circ 0=\sqrt{2}$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $\left(x-\sqrt{2}\right)\circ\left(x+\sqrt{2}\right)=x$.

5p **c)** Determinați numerele raționale al căror simetric în raport cu legea de compoziție „$\circ$” este număr rațional.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\left(0,+\infty\right)\to\left(0,+\infty\right)$, $f\left(x\right)=x\left(1-\frac{1}{x}\ln\left(x^2+1\right)\right)$.

5p **a)** Arătați că $f'\left(x\right)=\frac{\left(x-1\right)^2}{x^2+1}$, $x\in\left(0,+\infty\right)$.

5p **b)** Determinați numărul natural nenul n, știind că tangenta la graficul funcției f în punctul $A\left(n,f\left(n\right)\right)$ este paralelă cu dreapta de ecuație $y=\frac{1}{5}x+1$.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este bijectivă.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^3}-\frac{2\ln x}{x^3}$ și funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{\ln x}{x^2}$, o primitivă a lui f.

5p **a)** Arătați că $\int_1^e x^2\left(f(x)+\frac{2\ln x}{x^3}\right)dx=1$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^{\sqrt{5}} x\cdot f\left(x^2+3\right)dx=-\frac{5\ln 2}{128}$.

5p **c)** Determinați numerele reale a pentru care $\int_e^{e^2} x\cdot F(x)\,dx=\frac{a^2-1}{2}$.

Examenul național de bacalaureat 2022

Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați termenul b_4 al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_1=\sqrt{2}$ și $b_2=4$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx^2-2x+1$, unde m este număr real nenul. Determinați numărul real nenul m pentru care axa Ox este tangentă graficului funcției f.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x+2}-3^x-6\cdot 3^{x-1}=6$.

5p **4.** Se consideră mulțimea A, a numerelor naturale de două cifre. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea A, numărul $2n-60$ să aparțină mulțimii A.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,4)$, $B(5,2)$ și C, mijlocul segmentului AB. Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul C și este perpendiculară pe dreapta AB.

5p **6.** Se consideră triunghiul isoscel ABC, cu măsura unghiului A egală cu 120° și $AB=6$. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu $9\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ și $B(x)=xI_2+iA$, unde x este număr real și $i^2=-1$.

5p **a)** Arătați că $\det A=1$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $B(3)\cdot B(5)=8B(x)$.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere întregi pentru care matricea $B(m)+iB(n)$ **nu** este inversabilă.

2. Pe mulțimea $M=[1,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x*y=xy-\sqrt{(x-1)(y-1)}$.

5p **a)** Arătați că $2*5=8$.

5p **b)** Arătați că $e=1$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Demonstrați că $(nx)*y\geq x(n*y)$, pentru orice $x,y\in M$ și orice număr natural n, $n\geq 2$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{4\sqrt{x}}{x^2+3}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{6(1-x^2)}{\sqrt{x}(x^2+3)^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați $a\in(0,+\infty)$, știind că tangenta la graficul funcției f în punctul $A(a,f(a))$ este paralelă cu axa Ox.

5p **c)** Demonstrați că $\dfrac{\sqrt{x}}{x^2+3}>\dfrac{\sqrt{x+\frac{1}{x}}}{x^2+\frac{1}{x^2}+5}$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x+2x}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 e^x f(x)\,dx=e$.

5p **b)** Arătați că $\int_{-1}^0 f(x)\,dx=-1$.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $\int_0^1 F(x)f''(x)dx=\dfrac{a(e+1)}{e^2}$, unde $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este primitiva funcției f cu proprietatea $F(0)=0$.

Examenul național de bacalaureat 2023

Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$4-6\sqrt{3}+3\left(2\sqrt{3}-1\right)=4-6\sqrt{3}+6\sqrt{3}-3=$	**3p**
	$=4-3=1$	**2p**
2.	$5a-3=2a+3$	**3p**
	$a=2$	**2p**
3.	$2^{2x+4}=2^0$, de unde obținem $2x+4=0$	**3p**
	$x=-2$	**2p**
4.	Cifra zecilor se poate alege în 4 moduri	**2p**
	Pentru fiecare alegere a cifrei zecilor, cifra unităților se poate alege în câte 3 moduri, deci sunt $4\cdot 3=12$ numere	**3p**
5.	$M\left(2,1\right)$, de unde obținem $MO=\sqrt{5}$	**3p**
	$MC=\sqrt{5}$, deci $MO=MC$	**2p**
6.	$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$	**3p**
	$E\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}=0$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(A(0)\right)=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=3\cdot 1-2\cdot 1=$	**3p**
	$=3-2=1$	**2p**
b)	$A(a)-A(0)=\begin{pmatrix}a & -2a\\ -a & 3a\end{pmatrix}$	**2p**
	$A(0)\cdot\left(A(a)-A(0)\right)=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=aI_2$, pentru orice număr real a	**3p**
c)	$A\left(a^2\right)=\begin{pmatrix}3+a^2 & 2-2a^2\\ 1-a^2 & 1+3a^2\end{pmatrix}$, $A\left(a^2\right)-aA(a)=\begin{pmatrix}3-3a & 2-2a\\ 1-a & 1-a\end{pmatrix}$	**2p**
	$\det\left(A\left(a^2\right)-aA(a)\right)=3(1-a)^2-2(1-a)^2=(1-a)^2\geq 0$, pentru orice număr real a	**3p**
2.a)	$0\circ 2=0^2-4\cdot 0\cdot 2+3\cdot 2^2=$	**3p**
	$=0-0+12=12$	**2p**
b)	$(2x)\circ x=-x^2$, pentru orice număr real x	**2p**
	$-x^2=-1$, de unde obținem $x=-1$ sau $x=1$	**3p**

c)	$m\circ n=m^2-mn-3mn+3n^2=(m-n)(m-3n)$, pentru orice numere întregi m și n	**2p**
	$(m-n)(m-3n)=3$ și, cum m și n sunt numere întregi cu $m<n$, obținem perechile $(-4,-1)$ și $(0,1)$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{4x^2-(4x-4)\cdot 2x}{x^4}=$	**3p**
	$=\dfrac{4x(2-x)}{x^4}=\dfrac{4(2-x)}{x^3}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5+\dfrac{4x-4}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5+\dfrac{4}{x}-\dfrac{4}{x^2}\right)=5$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=5$ este asimptota orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=2$; pentru orice $x\in[1,2]$, $f'(x)\geq 0\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[1,2]$ și pentru orice $x\in[2,+\infty)$, $f'(x)\leq 0\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[2,+\infty)$	**2p**
	$f(1)=5$, $f(2)=6$ și $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=5$, deci $5\leq f(x)\leq 6$, pentru orice $x\in[1,+\infty)$, de unde obținem $\lvert f(x)-f(y)\rvert\leq 1$, pentru orice x, $y\in[1,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\int_1^2(f(x)-4\ln x)dx=\int_1^2 3x^2dx=x^3\Big\rvert_1^2=$	**3p**
	$=8-1=7$	**2p**
b)	$\int_1^e x\left(f(x)-3x^2\right)dx=\int_1^e 4x\ln x\,dx=\int_1^e\left(2x^2\right)'\ln x\,dx=2x^2\ln x\Big\rvert_1^e-x^2\Big\rvert_1^e=$	**3p**
	$=2e^2-0-e^2+1=e^2+1$	**2p**
c)	$F'(x)=f(x)\Rightarrow F''(x)=f'(x)$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
	$\int_1^{\sqrt{e}}f(x)F''(x)dx=\int_1^{\sqrt{e}}f(x)f'(x)dx=\dfrac{f^2(x)}{2}\Big\rvert_1^{\sqrt{e}}=\dfrac{(3e+2)^2-3^2}{2}=\dfrac{(3e-1)(3e+5)}{2}$	**3p**

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(\sqrt{6}-2\right)\left(\sqrt{6}+2\right)=\left(\sqrt{6}\right)^2-2^2=$	**3p**
	$=6-4=2$	**2p**
2.	$a^2+1=1-a$, deci $a^2+a=0$	**3p**
	$a=-1$ sau $a=0$	**2p**
3.	$x^2+4=6x-4$, deci $x^2-6x+8=0$	**3p**
	$x=2$ sau $x=4$, care convin	**2p**
4.	Cifra zecilor se poate alege în 3 moduri	**2p**
	Pentru fiecare alegere a cifrei zecilor, cifra unităților se poate alege în câte 5 moduri, deci se pot forma $3\cdot5=15$ numere	**3p**
5.	$x_M=3$ și $y_M=0$, unde M este mijlocul segmentului AB	**3p**
	$OM=3$	**2p**
6.	$\text{tg}C=\dfrac{AB}{AC}\Rightarrow AB=6\sqrt{3}$	**3p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\dfrac{6\cdot6\sqrt{3}}{2}=18\sqrt{3}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2)=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -6 & 7\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A(2)\right)=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -6 & 7\end{vmatrix}=(-1)\cdot7-2\cdot(-6)=$	**3p**
	$=-7+12=5$	**2p**
b)	$A(a)-I_2=\begin{pmatrix}-a & a\\ -3a & 3a\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -3 & 3\end{pmatrix}$, pentru orice număr real a	**2p**
	$A(1)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -3 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow a\left(A(1)-I_2\right)=a\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -3 & 3\end{pmatrix}$, deci $A(a)-I_2=a\left(A(1)-I_2\right)$, pentru orice număr real a	**3p**
c)	$A(m)\cdot A(2m)=A\left(4m^2+3m\right)$, pentru orice număr întreg m	**3p**
	$A\left(4m^2+3m\right)=A(1)$ și, cum m este număr întreg, obținem $m=-1$	**2p**
2.a)	$0\circ3=0\cdot3-0-3+4=$	**3p**
	$=0-3+4=1$	**2p**
b)	$x\circ x=x^2-2x+4$, pentru orice număr real x	**2p**
	$x^2-2x+4=3x\Leftrightarrow x^2-5x+4=0$, de unde obținem $x=1$ sau $x=4$	**3p**
c)	$xa-x-a+4=x+a\Leftrightarrow xa-2x-2a+4=0$, pentru orice număr real x	**2p**
	$x(a-2)-2a+4=0$ și, cum egalitatea are loc pentru orice număr real x, obținem $a=2$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=e^x\left(x^2+2x-2\right)+e^x(2x+2)=$	**3p**
	$=e^x\left(x^2+2x-2+2x+2\right)=e^x\left(x^2+4x\right),\ x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{f'(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x\left(x^2+2x-2\right)}{e^x\left(x^2+4x\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2x-2}{x^2+4x}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\left(1+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{4}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}{1+\frac{4}{x}}=1$	**3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-4$ sau $x=0$; pentru $x\in(-\infty,-4]\Rightarrow f'(x)\geq 0$, deci f este crescătoare pe $(-\infty,-4]$ și, pentru $x\in[-4,0]\Rightarrow f'(x)\leq 0$, deci f este descrescătoare pe $[-4,0]$	**2p**
	$f(x)\leq f(-4)$, pentru orice $x\in(-\infty,0]$ și $f(-4)=\dfrac{6}{e^4}$, deci $e^{x+4}\left(x^2+2x-2\right)\leq 6$, pentru orice $x\in(-\infty,0]$	**3p**
2.a)	$\int_1^2\left(f(x)-\dfrac{3}{x}\right)dx=\int_1^2 x^3\,dx=\dfrac{x^4}{4}\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=\dfrac{16}{4}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{15}{4}$	**2p**
b)	G este o primitivă a funcției $g\Rightarrow G'(x)=g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\left(x^3+\dfrac{3}{x}\right),\ x\in(0,+\infty)$	**2p**
	$\dfrac{1}{\sqrt{x}}\left(x^3+\dfrac{3}{x}\right)>0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci funcția G este crescătoare	**3p**
c)	$\int_1^{\sqrt{3}}\dfrac{1}{f(x)}dx=\int_1^{\sqrt{3}}\dfrac{x}{x^4+3}dx=\dfrac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}}\dfrac{\left(x^2\right)'}{\left(x^2\right)^2+3}dx=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{x^2}{\sqrt{3}}\Big\vert_1^{\sqrt{3}}=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\pi}{12\sqrt{3}}$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$3-4i+i(4-i)=3-4i+4i-i^2=$	**3p**
	$=3+1=4$	**2p**
2.	$f(1)=2$	**2p**
	$(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(2)=0$	**3p**
3.	$x^2-2x+6=6$, deci $x^2-2x=0$	**2p**
	$x=0$ sau $x=2$, care convin	**3p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 4 numere divizibile cu 3 și cu 7, deci sunt 4 cazuri favorabile, de unde obținem $p=\frac{4}{90}=\frac{2}{45}$	**3p**
5.	$A\left(\frac{a+0}{2},\frac{0+b}{2}\right)$	**3p**
	$a=2$ și $b=4$	**2p**
6.	Triunghiul ABD este dreptunghic în D și $BD=8$	**3p**
	$AD=\sqrt{100-64}=6$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$B(2)=\begin{pmatrix}3&5\\1&3\end{pmatrix}\Rightarrow\det(B(2))=\begin{vmatrix}3&5\\1&3\end{vmatrix}=3\cdot3-5\cdot1=$	**3p**
	$=9-5=4$	**2p**
b)	$B(0)\cdot B(1)=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4\\-2&-4\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1&2\\-1&-2\end{pmatrix}=2A$	**3p**
	$aA=2A$, de unde obținem $a=2$	**2p**
c)	$A\cdot B(x)=\begin{pmatrix}3x-1&6x-1\\-3x+1&-6x+1\end{pmatrix}$, pentru orice număr real x, $A\cdot(B(0)-3I_2)=\begin{pmatrix}-4&-7\\4&7\end{pmatrix}$	**3p**
	$\begin{pmatrix}3x-1&6x-1\\-3x+1&-6x+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&-7\\4&7\end{pmatrix}$, de unde obținem $x=-1$	**2p**
2.a)	$f=X^3+2X^2-3\Rightarrow f(1)=1^3+2\cdot1^2-3=$	**3p**
	$=1+2-3=0$	**2p**
b)	$f(-1)=(-1)^3+2(-1)^2+m(-1)-3=-m-2$	**3p**
	$-m-2=0$, de unde obținem $m=-2$	**2p**
c)	$(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)=f(1)=m$, pentru orice număr real m	**3p**
	$x_1x_2x_3=3$, deci $m=3$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{6x\left(x^2+x-2\right)-3x^2(2x+1)}{\left(x^2+x-2\right)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{3x^2-12x}{\left(x^2+x-2\right)^2}=\dfrac{3x(x-4)}{\left(x^2+x-2\right)^2}$, $x\in(1,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2}{x^2+x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=3$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=3$ este asimptota orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(1,4]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(1,4]$	**2p**
	$1<x\le 2\Rightarrow 1<x^2\le 4$, deci $f(x)\ge f(2)$ și $f\left(x^2\right)\ge f(4)$ și, cum $f(2)=3$ și $f(4)=\dfrac{8}{3}$, obținem $f(x)+f\left(x^2\right)\ge\dfrac{17}{3}$, pentru orice $x\in(1,2]$	**3p**
2.a)	$\int_3^7\dfrac{f(x)}{(x-1)^2}dx=\int_3^7 x\,dx=\dfrac{x^2}{2}\Big\vert_3^7=$	**3p**
	$=\dfrac{49}{2}-\dfrac{9}{2}=20$	**2p**
b)	$\int_2^3\dfrac{x}{f(x)}dx=\int_2^3\dfrac{(x-1)'}{(x-1)^2}dx=-\dfrac{1}{x-1}\Big\vert_2^3=$	**3p**
	$=-\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{1}{2}$	**2p**
c)	$\int_0^1\dfrac{xf\left(e^x\right)}{e^x}dx=\int_0^1 x\left(e^x-1\right)^2dx=\int_0^1 x\left(\dfrac{e^{2x}}{2}-2e^x\right)'dx+\dfrac{x^2}{2}\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=x\left(\dfrac{e^{2x}}{2}-2e^x\right)\Big\vert_0^1-\left(\dfrac{e^{2x}}{4}-2e^x\right)\Big\vert_0^1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{e^2-5}{4}$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(5-2\sqrt{6}\right)\left(5+\sqrt{24}\right)=\left(5-\sqrt{24}\right)\left(5+\sqrt{24}\right)=5^2-\sqrt{24}^2=$	**3p**
	$=25-24=1^2$, deci numerele $5-2\sqrt{6}$, 1 și $5+\sqrt{24}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice	**2p**
2.	$f(1)=a+1$, $(f\circ f)(1)=a(a+1)+1$, pentru orice număr real nenul a	**3p**
	$a(a+1)+1=1$, deci $a(a+1)=0$ și, cum a este număr real nenul, obținem $a=-1$	**2p**
3.	$2^x\cdot 2^{-4+2x}=32\Rightarrow 2^{3x-4}=2^5$, de unde obținem $3x-4=5$	**3p**
	$x=3$	**2p**
4.	$A_5^2=\dfrac{5!}{3!}=$	**3p**
	$=4\cdot 5=20$	**2p**
5.	$m_{AB}=1$ și, cum $d\perp AB$, obținem $m_d=-1$	**3p**
	Ecuația dreptei d este $y-5=-1(x-2)$, adică $y=-x+7$	**2p**
6.	$(\operatorname{tg}x+1)(\operatorname{ctg}x-1)=\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}+1\right)\left(\dfrac{\cos x}{\sin x}-1\right)=\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x\sin x}=$	**2p**
	$=\dfrac{\cos 2x}{\frac{1}{2}\sin 2x}=2\operatorname{ctg}2x$, pentru orice $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&1&-1\\2&-1&4\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(1))=\begin{vmatrix}1&1&2\\1&1&-1\\2&-1&4\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=4-2-2-4-1-4=-9$	**3p**
b)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix}a&1&a+1\\1&a&-1\\2&-a&4\end{vmatrix}=-3a-6$, pentru orice număr real a	**2p**
	$\det(A(a))=0\Leftrightarrow a=-2$; sistemul de ecuații are soluție unică $\Leftrightarrow a\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}$	**3p**
c)	Adunând ultimele două ecuații ale sistemului, obținem $x_0+z_0=0$	**2p**
	$y_0+z_0=a$, $ay_0-2z_0=4$, deci $(a+2)(y_0-2)=0$ și, cum $a\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}$, obținem $y_0=2$, deci $x_0+y_0+z_0=2$	**3p**
2.a)	$f=X^3-3X^2+2X+6\Rightarrow f(-1)=(-1)^3-3(-1)^2+2(-1)+6=$	**3p**
	$=-1-3-2+6=0$	**2p**

b)	$f=(X-3)\left(X^2+2\right)+6+m$, pentru orice număr real m	**3p**
	f este divizibil cu polinomul g dacă $6+m=0$, de unde obținem $m=-6$	**2p**
c)	$x_1+x_2+x_3=3$ și $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=2$, deci $x_1^2+x_2^2+x_3^2=5$ și $x_1^3+x_2^3+x_3^3=9-3m$, pentru orice număr real m	**3p**
	$9-3m=0$, deci $m=3$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=1+\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\cdot e^x-\sqrt{x+1}\cdot e^x}{e^{2x}}=$	**3p**
	$=1+\dfrac{1-2x-2}{2e^x\sqrt{x+1}}=1-\dfrac{2x+1}{2e^x\sqrt{x+1}}$, $x\in(-1,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{e^x}\sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}\right)=1$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2e^x\sqrt{x+1}}=0$, deci dreapta de ecuație $y=x$ este asimptota oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	**3p**
c)	$g:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-x\Rightarrow g'(x)=-\dfrac{2x+1}{2e^x\sqrt{x+1}}$; $g'(x)=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$	**2p**
	$g'(x)\geq 0$ pentru orice $x\in\left(-1,-\dfrac{1}{2}\right]\Rightarrow g$ este crescătoare pe $\left(-1,-\dfrac{1}{2}\right]$, $g'(x)\leq 0$ pentru orice $x\in\left[-\dfrac{1}{2},+\infty\right)\Rightarrow g$ este descrescătoare pe $\left[-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$, deci $g(x)\leq g\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ pentru orice $x\in(-1,+\infty)$ și, cum $g\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\dfrac{e}{2}}$, obținem $f(x)-x\leq\sqrt{\dfrac{e}{2}}$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\int_1^2 3\left(f(x)-x\ln x\right)dx=\int_1^2 3x^2\,dx=x^3\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=8-1=7$	**2p**
b)	$\int_1^e\dfrac{f(x)}{x^3}dx=\int_1^e\dfrac{1}{x}dx+\int_1^e\left(-\dfrac{1}{x}\right)'\ln x\,dx=\ln x\Big\vert_1^e-\dfrac{\ln x}{x}\Big\vert_1^e+\int_1^e\dfrac{1}{x^2}dx=$	**3p**
	$=1-\dfrac{1}{e}-\dfrac{1}{x}\Big\vert_1^e=2-\dfrac{2}{e}=2\left(1-\dfrac{1}{e}\right)$	**2p**
c)	$g(x)=\dfrac{x+1}{x^2+x\ln x}\geq 0$, pentru orice $x\in[1,e]$, deci $\mathcal{A}=\int_1^e\left\vert g(x)\right\vert dx=\int_1^e\dfrac{x+1}{x^2+x\ln x}dx=$	**2p**
	$=\int_1^e\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\cdot\dfrac{1}{x+\ln x}dx=\int_1^e(x+\ln x)'\cdot\dfrac{1}{x+\ln x}dx=\ln(x+\ln x)\Big\vert_1^e=\ln(e+1)>\ln e=1$	**3p**

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2(1+i)-i(2-i)=2+2i-2i+i^2=$	**3p**
	$=2-1=1$	**2p**
2.	$f(2a)=a \Leftrightarrow 6a+10=a$	**3p**
	$a=-2$	**2p**
3.	$2x^2+2=4x^2$, de unde obținem $x^2-1=0$	**2p**
	$x=-1$, care nu convine; $x=1$, care convine	**3p**
4.	Cifra unităților se poate alege în două moduri	**2p**
	Pentru fiecare alegere a cifrei unităților, cifra zecilor se poate alege în 5 moduri și, pentru fiecare alegere a cifrei unităților și a cifrei zecilor, cifra sutelor se poate alege în 4 moduri, deci se pot forma $2\cdot5\cdot4=40$ de numere	**3p**
5.	$\frac{a}{1}=\frac{a-1}{2}$	**3p**
	$a=-1$	**2p**
6.	$AC=12$; $\sphericalangle ACD=\frac{\pi}{6}$	**3p**
	$\frac{AC}{CD}=\cos\frac{\pi}{6}$, de unde obținem $CD=8\sqrt{3}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(1))=\begin{vmatrix}2&-1&1\\0&1&0\\1&-1&2\end{vmatrix}=2\cdot1\cdot2+(-1)\cdot0\cdot1+0\cdot(-1)\cdot1-1\cdot1\cdot1-(-1)\cdot0\cdot2-0\cdot(-1)\cdot2=$	**3p**
	$=4+0+0-1-0-0=3$	**2p**
b)	$A(0)=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&0&0\\1&-1&1\end{pmatrix}$, $A(0)\cdot A(x)=\begin{pmatrix}x+2&-x-2&x+2\\0&0&0\\x+2&-x-2&x+2\end{pmatrix}$, pentru orice număr real x	**3p**
	$x=-1$	**2p**
c)	$(A(1))^{-1}=aA(1)+bI_3 \Leftrightarrow aA(1)\cdot A(1)+bA(1)=I_3$ și $A(1)\cdot A(1)=\begin{pmatrix}5&-4&4\\0&1&0\\4&-4&5\end{pmatrix}$, de unde obținem $\begin{pmatrix}5a+2b&-4a-b&4a+b\\0&a+b&0\\4a+b&-4a-b&5a+2b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	**3p**
	$a=-\frac{1}{3}$ și $b=\frac{4}{3}$	**2p**

2.a)	$1*2=1\cdot 2+1+2-1+2^{1\cdot 2}=$ $=4+4=8$	**3p** **2p**
b)	$x*0=x\cdot 0+x+0-1+2^{x\cdot 0}=x$, pentru orice număr real x	**2p**
	$0*x=0\cdot x+0+x-1+2^{0\cdot x}=x$, pentru orice număr real x, deci $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**3p**
c)	$n*\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{2n^2-3n-2}{2n}$, pentru orice număr natural nenul n	**2p**
	$\frac{2n^2-3n-2}{2n}=0\Rightarrow 2n^2-3n-2=0$ și, cum n este număr natural nenul, obținem $n=2$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{\left(2+\frac{1}{x}\right)\cdot x-(2x+1+\ln x)}{x^2}=$	**3p**
	$=\frac{2x+1-2x-1-\ln x}{x^2}=-\frac{\ln x}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+1+\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right)=2$	**3p**
	Ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f este $y=2$	**2p**
c)	$f'(x)<0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(1,+\infty)$	**2p**
	$1<x<y\Rightarrow f(x)>f(y)$, deci $\frac{\ln y}{y}-\frac{\ln x}{x}<\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$, pentru orice $x,y\in(1,+\infty)$ cu $x<y$	**3p**
2.a)	$\int_3^5\left(f(x)-x^3\right)dx=\int_3^5 x\,dx=\frac{x^2}{2}\Big\vert_3^5=$	**3p**
	$=\frac{25}{2}-\frac{9}{2}=8$	**2p**
b)	$\int_0^2\frac{x^2}{f(x)-x+2}dx=\int_0^2\frac{x^2}{x^3+2}dx=\frac{1}{3}\int_0^2\frac{\left(x^3+2\right)'}{x^3+2}dx=\frac{1}{3}\ln\left(x^3+2\right)\Big\vert_0^2=$	**3p**
	$=\frac{\ln 10}{3}-\frac{\ln 2}{3}=\frac{\ln 5}{3}$	**2p**
c)	$g(x)=\left(x^2+1\right)e^{-x}$ și $G'(x)=g(x)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci $G''(x)=\left(-x^2+2x-1\right)e^{-x}$	**3p**
	$G''(x)=-(x-1)^2e^{-x}\le 0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci funcția G este concavă	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $4-6\sqrt{3}+3\left(2\sqrt{3}-1\right)=1$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5x-3$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x+3$. Determinați numărul real a pentru care $f(a)=g(a)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{2x+1}\cdot 2^3=1$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale, de două cifre distincte, se pot forma cu cifre din mulțimea $A=\{3,4,5,6\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,0)$, $B(0,2)$, $C(3,3)$ și M, mijlocul segmentului AB. Arătați că segmentele MO și MC au lungimile egale.

5p **6.** Se consideră $E(x)=2\sin x\sin 2x-\cos x$, unde x este număr real. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}3+a&2-2a\\1-a&1+3a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=1$.

5p **b)** Arătați că $A(0)\cdot(A(a)-A(0))=aI_2$, pentru orice număr real a.

5p **c)** Demonstrați că $\det\left(A\left(a^2\right)-aA(a)\right)\geq 0$, pentru orice număr real a.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=x^2-4xy+3y^2$.

5p **a)** Arătați că $0\circ 2=12$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $(2x)\circ x=-1$.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere întregi, cu $m<n$, pentru care $m\circ n=3$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=5+\frac{4x-4}{x^2}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{4(2-x)}{x^3}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $|f(x)-f(y)|\leq 1$, pentru orice x, $y\in[1,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2+4\ln x$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2\left(f(x)-4\ln x\right)dx=7$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^e x\left(f(x)-3x^2\right)dx=e^2+1$.

5p **c)** Demonstrați că $\int_1^{\sqrt{e}} f(x)F''(x)dx=\frac{(3e-1)(3e+5)}{2}$, pentru orice primitivă $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcției f.

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\left(\sqrt{6}-2\right)\left(\sqrt{6}+2\right)=2$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f\left(x\right)=x^2+1$. Determinați numerele reale a pentru care $f\left(a\right)=1-a$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_4\left(x^2+4\right)=\log_4\left(6x-4\right)$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale de două cifre, cu cifra zecilor număr impar, se pot forma cu elementele mulțimii $\left\{1,2,3,4,5\right\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A\left(1,-5\right)$ și $B\left(5,5\right)$. Determinați distanța de la punctul O la mijlocul segmentului AB.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $AC=6$ și $\text{tg}C=\sqrt{3}$. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu $18\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A\left(a\right)=\begin{pmatrix}1-a & a\\ -3a & 3a+1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A\left(2\right)\right)=5$.

5p **b)** Arătați că $A\left(a\right)-I_2=a\left(A\left(1\right)-I_2\right)$, pentru orice număr real a.

5p **c)** Determinați numărul întreg m pentru care $A\left(m\right)\cdot A\left(2m\right)=A\left(1\right)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=xy-x-y+4$.

5p **a)** Arătați că $0\circ 3=1$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $x\circ x=3x$.

5p **c)** Determinați numărul real a, știind că $x\circ a=x+a$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f\left(x\right)=e^x\left(x^2+2x-2\right)$.

5p **a)** Arătați că $f'\left(x\right)=e^x\left(x^2+4x\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f\left(x\right)}{f'\left(x\right)}=1$.

5p **c)** Demonstrați că $e^{x+4}\left(x^2+2x-2\right)\le 6$, pentru orice $x\in\left(-\infty,0\right]$.

2. Se consideră funcția $f:\left(0,+\infty\right)\to\mathbb{R}$, $f\left(x\right)=x^3+\dfrac{3}{x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2\left(f\left(x\right)-\dfrac{3}{x}\right)dx=\dfrac{15}{4}$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă $G:\left(0,+\infty\right)\to\mathbb{R}$ a funcției $g:\left(0,+\infty\right)\to\mathbb{R}$, $g\left(x\right)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}f\left(x\right)$ este crescătoare.

5p **c)** Arătați că $\int_1^{\sqrt{3}}\dfrac{1}{f\left(x\right)}dx=\dfrac{\pi}{12\sqrt{3}}$.

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $3-4i+i(4-i)=4$, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4-2x$. Arătați că $(f\circ f)(1)=0$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5\left(x^2-2x+6\right)=\log_5 6$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 3 și cu 7.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,2)$, $B(a,0)$ și $C(0,b)$. Determinați numerele reale a și b, știind că punctul A este mijlocul segmentului BC.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, cu $AB=AC=10$ și $BC=16$. Arătați că $AD=6$, unde AD este înălțime în triunghiul ABC.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&2\\-1&-2\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}x+1&2x+1\\x-1&2x-1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(B(2))=4$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care $B(0)\cdot B(1)=aA$.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $A\cdot B(x)=A\cdot(B(0)-3I_2)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+2X^2+mX-3$, unde m este număr real.

5p **a)** Pentru $m=0$, arătați că $f(1)=0$.

5p **b)** Determinați numărul real m pentru care polinomul f este divizibil cu polinomul $X+1$.

5p **c)** Determinați numărul real m pentru care $(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)=x_1x_2x_3$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{3x^2}{x^2+x-2}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{3x(x-4)}{\left(x^2+x-2\right)^2}$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $f(x)+f\left(x^2\right)\geq\dfrac{17}{3}$, pentru orice $x\in(1,2]$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x(x-1)^2$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_3^7\frac{f(x)}{(x-1)^2}\,dx=20$.

5p **b)** Arătați că $\displaystyle\int_2^3\frac{x}{f(x)}\,dx=\frac{1}{2}$.

5p **c)** Arătați că $\int_0^1 \frac{xf\left(e^x\right)}{e^x}dx=\frac{e^2-5}{4}$.

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că numerele $5-2\sqrt{6}$, 1 și $5+\sqrt{24}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+1$, unde a este număr real nenul. Determinați numărul real nenul a pentru care $(f\circ f)(1)=1$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^x\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{2-x}=32$.

5p **4.** Determinați numărul de submulțimi ordonate, cu câte două elemente, care se pot forma cu elementele mulțimii $M=\{0,1,2,3,4\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,1)$ și $B(2,5)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul B și este perpendiculară pe dreapta AB.

5p **6.** Arătați că $(\operatorname{tg}x+1)(\operatorname{ctg}x-1)=2\operatorname{ctg}2x$, pentru orice $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}a & 1 & a+1\\ 1 & a & -1\\ 2 & -a & 4\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}ax+y+(a+1)z=a\\ x+ay-z=4\\ 2x-ay+4z=-4\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=-9$.

5p **b)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui a pentru care sistemul are soluție unică.

5p **c)** Arătați că, dacă sistemul are soluția unică (x_0,y_0,z_0), atunci $x_0+y_0+z_0=2$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-3X^2+2X+m$, unde m este număr real.

5p **a)** Pentru $m=6$, arătați că $f(-1)=0$.

5p **b)** Determinați numărul real m pentru care polinomul f este divizibil cu polinomul $g=X^2+2$.

5p **c)** Determinați numărul real m pentru care $x_1^3+x_2^3+x_3^3=0$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\frac{\sqrt{x+1}}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=1-\frac{2x+1}{2e^x\sqrt{x+1}}$, $x\in(-1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $f(x)-x\le\sqrt{\frac{e}{2}}$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x\ln x$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2 3(f(x)-x\ln x)\,dx=7$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^e \frac{f(x)}{x^3}\,dx = 2\left(1-\frac{1}{e}\right)$.

5p **c)** Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{x+1}{f(x)}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=e$ are aria strict mai mare decât 1.

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $2(1+i)-i(2-i)=1$, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+10$. Determinați numărul real a pentru care punctul $A(2a,a)$ aparține graficului funcției f.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x^2+2}=2x$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale impare, de trei cifre, se pot forma cu elementele mulțimii $A=\{0,1,2,3,4\}$.

5p **5.** Determinați numărul real a pentru care vectorii $\vec{u}=a\vec{i}+(a-1)\vec{j}$ și $\vec{v}=\vec{i}+2\vec{j}$ sunt coliniari.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu măsura unghiului B egală cu $\frac{\pi}{6}$ și $BC=24$. Bisectoarea unghiului C al triunghiului ABC intersectează latura AB în punctul D. Determinați lungimea segmentului CD.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}x+1&-1&1\\0&x&0\\1&-1&x+1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=3$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $A(0)\cdot A(x)=A(0)$.

5p **c)** Determinați numerele reale a și b pentru care $(A(1))^{-1}=aA(1)+bI_3$, unde $(A(1))^{-1}$ este inversa matricei $A(1)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=xy+x+y-1+2^{xy}$.

5p **a)** Arătați că $1*2=8$.

5p **b)** Arătați că $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Determinați numărul natural nenul n pentru care $n*\left(-\frac{1}{n}\right)=0$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x+1+\ln x}{x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=-\frac{\ln x}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $\frac{\ln y}{y}-\frac{\ln x}{x}<\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$, pentru orice $x,y\in(1,+\infty)$ cu $x<y$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+x$.

5p **a)** Arătați că $\int_3^5\left(f(x)-x^3\right)dx=8$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^2 \frac{x^2}{f(x)-x+2}dx=\frac{\ln 5}{3}$.

5p **c)** Se consideră funcția $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{f(x)e^{-x}}{x}$. Arătați că orice primitivă $G:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcției g este concavă.

Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2-5i+i(5-3i)=2-5i+5i-3i^2=$	**3p**
	$=2+3=5$	**2p**
2.	$f(2)=12+m$, deci $12+m=15$	**3p**
	$m=3$	**2p**
3.	$7^{2x+1}=7^{x+2}$, de unde obținem $2x+1=x+2$	**3p**
	$x=1$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 18 numere care au cel puțin una dintre cifre egală cu 1, deci sunt 18 cazuri favorabile, de unde obținem $p=\frac{18}{90}=\frac{1}{5}$	**3p**
5.	$M(2,1)$ este mijlocul segmentului OB	**3p**
	$AM=4$	**2p**
6.	$\sin C=\frac{AB}{BC}=\frac{5}{5\sqrt{5}}=$	**3p**
	$=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=2\cdot 0-(-1)\cdot 1=$	**3p**
	$=0+1=1$	**2p**
b)	$B(4)=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $B(4)\cdot B(4)=\begin{pmatrix}15 & 4\\ -4 & -1\end{pmatrix}$	**3p**
	$B(4)\cdot B(4)+I_2=\begin{pmatrix}16 & 4\\ -4 & 0\end{pmatrix}=4B(4)$, deci $4B(4)=aB(4)$, de unde obținem $a=4$	**2p**
c)	$A\cdot B(x)=\begin{pmatrix}3x-3 & x-2\\ x & x-3\end{pmatrix}$, $B(x)\cdot A=\begin{pmatrix}3x-3 & -x\\ -x+2 & x-3\end{pmatrix}$, pentru orice număr real x	**3p**
	Cum $\begin{pmatrix}3x-3 & x-2\\ x & x-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x-3 & -x\\ -x+2 & x-3\end{pmatrix}$, obținem $x=1$	**2p**
2.a)	$0*3=(0+3)(4-0-3)=$	**3p**
	$=3\cdot 1=3$	**2p**
b)	$x*1=(x+1)(3-x)$, pentru orice număr real x	**2p**
	$(x+1)(3-x)=0$, de unde obținem $x=-1$ sau $x=3$	**3p**

c)	$(n+5)*(n-5)=4n(2-n)$, pentru orice număr natural n	**2p**
	Cum n și $N=4n(2-n)$ sunt numere naturale, obținem $n=0$, $n=1$ și $n=2$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=2x-1-\frac{2}{x+1}=$	**3p**
	$=\frac{2x^2+2x-x-1-2}{x+1}=\frac{2x^2+x-3}{x+1}$, $x\in(-1,+\infty)$	**2p**
b)	$f(0)=0$, $f'(0)=-3$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)$, adică $y=-3x$	**3p**
c)	$f'(x)=0\Rightarrow x=1$; pentru orice $x\in(-1,1]$, $f'(x)\le 0$, deci f este descrescătoare pe $(-1,1]$ și, pentru orice $x\in[1,+\infty)$, $f'(x)\ge 0$, deci f este crescătoare pe $[1,+\infty)$	**2p**
	Pentru orice $x\in(-1,+\infty)$, $f(x)\ge f(1)$ și, cum $f(1)=-2\ln 2$, obținem $x^2-x\ge 2\ln\frac{x+1}{2}$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\int_0^3\left(f(x)-3x\right)dx=\int_0^3\left(x^2+1\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Big\vert_0^3=$	**3p**
	$=\frac{27}{3}+3=12$	**2p**
b)	$\int_0^1\frac{1}{\left(f(x)-x^2\right)^2}dx=\int_0^1\frac{1}{(3x+1)^2}dx=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{(3x+1)'}{(3x+1)^2}dx=-\frac{1}{3(3x+1)}\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=-\frac{1}{12}+\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$	**2p**
c)	$g(x)=3xe^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$, deci $\mathcal{A}=\int_0^1\left\vert g(x)\right\vert dx=\int_0^1 3x\left(-e^{-x}\right)'dx=$	**2p**
	$=-3e^{-x}(x+1)\Big\vert_0^1=3\left(1-\frac{2}{e}\right)$	**3p**

Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2\cdot(1,2+0,1)+0,4=2\cdot 1,3+0,4=$	**2p**
	$=2,6+0,4=3$	**3p**
2.	$f(a)=2a+1$, $f(2)=5$	**2p**
	$2a+1-5=a$, de unde obținem $a=4$	**3p**
3.	$x^2-5x+5=x$, de unde obținem $x^2-6x+5=0$	**2p**
	$x=1$ sau $x=5$, care convin	**3p**
4.	Cifra unităților se poate alege în 2 moduri	**2p**
	Pentru fiecare alegere a cifrei unităților, cifra zecilor se poate alege în câte 4 moduri, deci se pot forma $2\cdot 4=8$ numere	**3p**
5.	$C(0,4)$	**2p**
	Mijlocul segmentului BC are coordonatele $(2,3)$	**3p**
6.	$AC=8$	**3p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\dfrac{8\cdot 8}{2}=32$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$B(5)=\begin{pmatrix}3 & 3\\ 1 & 5\end{pmatrix}\Rightarrow \det(B(5))=\begin{vmatrix}3 & 3\\ 1 & 5\end{vmatrix}=3\cdot 5-3\cdot 1=$	**3p**
	$=15-3=12$	**2p**
b)	$B(4)-B(2)=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 0 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 0\\ -2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$, $(B(4)-B(2))\cdot A=\begin{pmatrix}4 & 12\\ 4 & 12\end{pmatrix}=4A$	**3p**
	$4A=aA$, de unde obținem $a=4$	**2p**
c)	$A\cdot B(x)=\begin{pmatrix}4x-14 & 4x-2\\ 4x-14 & 4x-2\end{pmatrix}$, $A\cdot B(x)-4xI_2=\begin{pmatrix}-14 & 4x-2\\ 4x-14 & -2\end{pmatrix}$, de unde obținem $\det(A\cdot B(x)-4xI_2)=-16x(x-4)$, pentru orice număr real x	**3p**
	$-16x(x-4)=0$, de unde obținem $x=0$ sau $x=4$	**2p**
2.a)	$3\circ 3=3(3-2)+3(3-2)=$	**3p**
	$=3+3=6$	**2p**
b)	$2\circ x=x^2-2x$ și obținem $-2x=2$	**3p**
	$x=-1$	**2p**
c)	$x\circ y=x^2-2x+y^2-2y=$	**2p**
	$=x^2-2x+1+y^2-2y+1-2=(x-1)^2+(y-1)^2-2\geq -2$, pentru orice numere reale x și y	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}=$	**3p**
	$=\frac{\sqrt{x}}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{x\sqrt{x}+1}{x^2},\ x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$f(1)=-2,\ f'(1)=2$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)$, adică $y=2x-4$	**3p**
c)	$f'(x)>0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(0,+\infty)$, deci f este injectivă	**2p**
	$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ și f este continuă, deci f este surjectivă, de unde obținem că f este bijectivă	**3p**
2.a)	$\int_1^2\left(x^2+1\right)f(x)dx=\int_1^2 4xdx=2x^2\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=8-2=6$	**2p**
b)	$\int_2^3 f(x)dx=\int_2^3\frac{4x}{x^2+1}dx=2\int_2^3\frac{\left(x^2+1\right)'}{x^2+1}dx=2\ln\left(x^2+1\right)\Big\vert_2^3=$	**3p**
	$=2\ln 10-2\ln 5=2\ln 2$	**2p**
c)	$\int_1^m\left(\frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\right)^3dx=\int_1^m\frac{64}{(x+1)^3}dx=-\frac{32}{(x+1)^2}\Big\vert_1^m=-\frac{32}{(m+1)^2}+8$	**3p**
	$-\frac{32}{(m+1)^2}+8=6$ și, cum $m\in(1,+\infty)$, obținem $m=3$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$6-2\sqrt{5}+\sqrt{5}\cdot\left(2-\sqrt{5}\right)=6-2\sqrt{5}+2\sqrt{5}-\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}=$	**2p**
	$=6-5=1$	**3p**
2.	$f\left(a\right)=2a-3,\ f\left(1\right)=-1$	**3p**
	$2a-3-1=0$, de unde obținem $a=2$	**2p**
3.	$10^{x-1}=10^{-2x+2}$, de unde obținem $x-1=-2x+2$	**3p**
	$x=1$	**2p**
4.	Cifra zecilor se poate alege în 3 moduri	**3p**
	Pentru fiecare alegere a cifrei zecilor, cifra unităților se poate alege în câte 2 moduri, deci sunt $3\cdot 2=6$ numere	**2p**
5.	$M\left(2,3\right)$	**2p**
	$BM=5$	**3p**
6.	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\dfrac{AB\cdot AC}{2}$, deci $24=\dfrac{AB\cdot 6}{2}$	**3p**
	$AB=\dfrac{24\cdot 2}{6}=8$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1\cdot 2-1\cdot 1=$	**3p**
	$=2-1=1$	**2p**
b)	$B\left(x\right)-xA=\begin{pmatrix}1 & 4\\ x & 2x-3\end{pmatrix}$, de unde obținem $\det\left(B\left(x\right)-xA\right)=-2x-3$, pentru orice număr real x	**3p**
	$-2x-3=x$, de unde obținem $x=-1$	**2p**
c)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 5\end{pmatrix}$, $2A\cdot A\cdot A=\begin{pmatrix}10 & 16\\ 16 & 26\end{pmatrix}$	**3p**
	$B\left(x\right)+B\left(x+2\right)=\begin{pmatrix}2x+4 & 2x+10\\ 4x+4 & 8x+2\end{pmatrix}$, deci $\begin{pmatrix}2x+4 & 2x+10\\ 4x+4 & 8x+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 16\\ 16 & 26\end{pmatrix}$ și obținem $x=3$	**2p**
2.a)	$f=X^3+6X^2-2X-4\Rightarrow f\left(1\right)=1^3+6\cdot 1^2-2\cdot 1-4=$	**3p**
	$=1+6-2-4=1$	**2p**
b)	$x_1+x_2+x_3=-m,\ x_1x_2x_3=4$	**2p**
	$16=-m+4$, de unde obținem $m=-12$	**3p**
c)	$f\left(2\right)=8\Rightarrow 4m=8$, de unde obținem $m=2$	**2p**
	$f=X^3+2X^2-2X-4=\left(X+2\right)\left(X-\sqrt{2}\right)\left(X+\sqrt{2}\right)$, deci rădăcinile polinomului f sunt -2, $-\sqrt{2}$ și $\sqrt{2}$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{-x^2-2x(3-x)}{x^4}+\dfrac{1}{x}=$	**3p**
	$=\dfrac{x-6}{x^3}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{x^2+x-6}{x^3}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\ln x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{x}{x^2}\right)=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{1}{x}\right)=0$	**2p**
c)	$f'(x)=0\Rightarrow x=2$; pentru orice $x\in(0,2]$, $f'(x)\le 0$, deci f este descrescătoare pe $(0,2]$ și, pentru orice $x\in[2,+\infty)$, $f'(x)\ge 0$, deci f este crescătoare pe $[2,+\infty)$	**3p**
	$f(x)\ge f(2)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$ și, cum $f(2)=\dfrac{1}{4}+\ln 2$, obținem $4f(x)-1\ge\ln 16$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\displaystyle\int_2^4\left(f(x)-\frac{1}{\sqrt{x+3}}\right)dx=\int_2^4 3x\,dx=\frac{3x^2}{2}\Big|_2^4=$	**3p**
	$=\dfrac{48}{2}-\dfrac{12}{2}=18$	**2p**
b)	$\displaystyle\int_1^6\left(f(x)-3x\right)dx=\int_1^6\frac{1}{\sqrt{x+3}}dx=2\int_1^6\frac{(x+3)'}{2\sqrt{x+3}}dx=2\sqrt{x+3}\Big|_1^6=$	**3p**
	$=6-4=2$	**2p**
c)	$\displaystyle\int_{-2}^1\frac{1}{x+3}\left(f(x)-\frac{1}{\sqrt{x+3}}\right)dx=\int_{-2}^1\left(3-\frac{9}{x+3}\right)dx=3x\Big|_{-2}^1-9\ln(x+3)\Big|_{-2}^1=9(1-\ln 4)$	**3p**
	$9(1-2\ln 2)=9(a-2\ln 2)$, de unde obținem $a=1$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	Rația progresiei este $r=a_3-a_2=4$	**3p**
	$a_1=a_2-r=4$	**2p**
2.	$f(m)=3m-2$, pentru orice număr real m	**2p**
	$3m-2=m$, de unde obținem $m=1$	**3p**
3.	$9-x^2=5$, de unde obținem $x^2-4=0$	**2p**
	$x=-2$ sau $x=2$, care convin	**3p**
4.	Mulțimea A are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile	**2p**
	Numerele n din mulțimea A pentru care $\sqrt{2n+1}$ aparține mulțimii A sunt 0 și 4, deci sunt 2 cazuri favorabile, de unde obținem $p=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$	**3p**
5.	$m_{AC}=\frac{1}{2}$	**2p**
	$m_{BC}=-2\Rightarrow m_{AC}\cdot m_{BC}=-1$, deci triunghiul ABC este dreptunghic în C	**3p**
6.	$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	**3p**
	$E\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{2}{4}=2$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$B(1)=\begin{pmatrix}1&2\\-2&3\end{pmatrix}\Rightarrow\det(B(1))=\begin{vmatrix}1&2\\-2&3\end{vmatrix}=1\cdot3-2\cdot(-2)=$	**3p**
	$=3+4=7$	**2p**
b)	$B(0)=\begin{pmatrix}0&1\\-3&-1\end{pmatrix}$, $B(0)\cdot B(1)=\begin{pmatrix}-2&3\\-1&-9\end{pmatrix}$	**3p**
	$B(2)-B(0)\cdot B(1)=\begin{pmatrix}4&0\\0&16\end{pmatrix}=4A$	**2p**
c)	$C(a)=\begin{pmatrix}0&a+1\\a-3&-1\end{pmatrix}\Rightarrow\det(C(a))=-(a-3)(a+1)$, pentru orice număr real a	**3p**
	$\det(C(a))=0$, de unde obținem $a=-1$ sau $a=3$	**2p**
2.a)	$2*2=2\cdot2-2\cdot2-3\cdot2+6=$	**3p**
	$=4-4-6+6=0$	**2p**
b)	$x*6=4x-12$, pentru orice număr real x	**3p**
	$4x-12=x$, de unde obținem $x=4$	**2p**
c)	$2*x=2-x$, $x*(2*x)=-x^2+3x$, pentru orice număr real x	**2p**
	$-x^2+3x\geq2\Leftrightarrow-x^2+3x-2\geq0$, de unde obținem $x\in[1,2]$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{2\left(x^2+x+4\right)-2x(2x+1)}{\left(x^2+x+4\right)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{8-2x^2}{\left(x^2+x+4\right)^2}=\dfrac{2\left(4-x^2\right)}{\left(x^2+x+4\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x^2+x+4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{x^2}\right)}=0$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptota orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	$f'(x)=0\Rightarrow x=-2$ sau $x=2$; pentru orice $x\in(-\infty,-2]$, $f'(x)\le 0$, deci f este descrescătoare pe $(-\infty,-2]$; pentru orice $x\in[-2,2]$, $f'(x)\ge 0$, deci f este crescătoare pe $[-2,2]$; pentru orice $x\in[2,+\infty)$, $f'(x)\le 0$, deci f este descrescătoare pe $[2,+\infty)$	**2p**
	$x\in[4,+\infty)\Rightarrow 4-x\in(-\infty,0]$, deci $f(x)\le f(4)$ și $f(4-x)\ge f(-2)$ și, cum $f(-2)=-\dfrac{2}{3}$ și $f(4)=\dfrac{1}{3}$, obținem $f(x)-f(4-x)\le 1$, pentru orice $x\in[4,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\int_0^2(x+1)f(x)dx=\int_0^2(x+3)dx=\left(\dfrac{x^2}{2}+3x\right)\Big\vert_0^2=$	**3p**
	$=2+6=8$	**2p**
b)	$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\dfrac{x+3}{x+1}dx=\int_0^1\left(1+\dfrac{2}{x+1}\right)dx=x\Big\vert_0^1+2\ln(x+1)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=1+2\ln 2-2\ln 1=1+2\ln 2$	**2p**
c)	$\int_1^2\left(x^2-1\right)e^x f(x)dx=\int_1^2\left(x^2+2x-3\right)e^x dx=\left(x^2-3\right)e^x\Big\vert_1^2=e^2+2e$	**3p**
	$e(e+a)=e^2+2e$, de unde obținem $a=2$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$0,5+10\cdot(1-0,75)=0,5+10\cdot 0,25=$	**2p**
	$=0,5+2,5=3$	**3p**
2.	$f(m)=2m-1$, pentru orice număr real m	**2p**
	$g(-m)=-m+1\Rightarrow f(m)+g(-m)=2m-1-m+1=m$, pentru orice număr real m	**3p**
3.	$x^2+6=5x$, deci $x^2-5x+6=0$	**2p**
	$x=2$ sau $x=3$, care convin	**3p**
4.	Mulțimea A are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea A sunt 5 divizori ai lui 30, deci sunt 5 cazuri favorabile, de unde obținem $p=\frac{5}{9}$	**3p**
5.	$m_{AB}=1$	**2p**
	$m_{BC}=-1\Rightarrow m_{AB}\cdot m_{BC}=-1$, deci triunghiul ABC este dreptunghic în B	**3p**
6.	$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$	**3p**
	$E\left(\frac{\pi}{3}\right)=3\cdot\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=0$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(6)=\begin{pmatrix}6 & -12\\ 1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(6))=\begin{vmatrix}6 & -12\\ 1 & 0\end{vmatrix}=6\cdot 0-(-12)\cdot 1=$	**3p**
	$=0+12=12$	**2p**
b)	$A(4)=\begin{pmatrix}4 & -8\\ 1 & -2\end{pmatrix}$, $A(4)\cdot A(4)=\begin{pmatrix}8 & -16\\ 2 & -4\end{pmatrix}=2A(4)$	**3p**
	$aA(4)=2A(4)$, de unde obținem $a=2$	**2p**
c)	$A(m)+A(n)=\begin{pmatrix}m+n & -2m-2n\\ 2 & m+n-12\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(m)+A(n))=(m+n)(m+n-8)$, pentru orice numere naturale nenule m și n	**2p**
	$(m+n)(m+n-8)=0$ și, cum m și n sunt numere naturale nenule, cu $m<n$, obținem perechile $(1,7)$, $(2,6)$ și $(3,5)$	**3p**
2.a)	$1*3=1\cdot 3(1+3-1\cdot 3)=$	**3p**
	$=3\cdot 1=3$	**2p**
b)	$x*2=2x(2-x)$, pentru orice număr real x	**2p**
	$2x(2-x)=-x^2$, de unde obținem $x=0$ sau $x=4$	**3p**

c)	$\frac{1}{2m} * m = \frac{2m^2 - m + 1}{4m}$, pentru orice număr real nenul m	**2p**
	$\frac{2m^2 - m + 1}{4m} = m$, deci $2m^2 + m - 1 = 0$ și, cum m este număr întreg nenul, obținem $m = -1$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = \frac{2x \cdot x - \left(x^2 - 2\right)}{x^2} - \frac{3}{x} =$	**3p**
	$= \frac{x^2 + 2}{x^2} - \frac{3}{x} = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x) + 3\ln x}{x + 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 2}{x^2 + x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2\left(1 - \frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(1 + \frac{1}{x}\right)} =$	**3p**
	$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1 - \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} = 1$	**2p**
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ sau $x = 2$; pentru orice $x \in (0,1]$, $f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ este crescătoare pe $(0,1]$ și pentru orice $x \in [1,2]$, $f'(x) \leq 0 \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[1,2]$, de unde obținem $f(x) \leq f(1)$, pentru orice $x \in (0,2]$	**3p**
	$f(1) = -1$, deci $\frac{x^2 - 2}{x} - 3\ln x \leq -1$, de unde obținem $\frac{x^2 + x - 2}{x} \leq 3\ln x$, pentru orice $x \in (0,2]$	**2p**
2.a)	$\int_0^2 \left(f(x) - x^3\right) dx = \int_0^2 (x + 1) dx = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_0^2 =$	**3p**
	$= \frac{2^2}{2} + 2 = 4$	**2p**
b)	$\int_0^1 \frac{x^2}{f(x) - x} dx = \int_0^1 \frac{x^2}{x^3 + 1} dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{\left(x^3 + 1\right)'}{x^3 + 1} dx = \frac{1}{3}\ln\left(x^3 + 1\right)\Big|_0^1 =$	**3p**
	$= \frac{\ln 2}{3} - \frac{\ln 1}{3} = \frac{\ln 2}{3}$	**2p**
c)	$\int_a^0 e^{-x}\left(f'(x) - f(x)\right) dx = \int_a^0 \left(e^{-x} f(x)\right)' dx = e^{-x} f(x)\Big|_a^0 = 1 - e^{-a}\left(a^3 + a + 1\right)$, unde $a \in (-\infty, 0)$	**3p**
	$1 - e^{-a}\left(a^3 + a + 1\right) = 1 - a^3 e^{-a}$, de unde obținem $a = -1$, care convine	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z_1+iz_2=3-i+i(1+i)=3-i+i+i^2=$	**3p**
	$=3+(-1)=2$	**2p**
2.	$f(a)=5-a$, $g(a+1)=a+3$	**2p**
	$5-a=a+3$, de unde obținem $a=1$	**3p**
3.	$4x-x^2=3$, de unde obținem $x^2-4x+3=0$	**3p**
	$x=1$ sau $x=3$, care convin	**2p**
4.	Cifra unităților se poate alege în 4 moduri	**2p**
	Pentru fiecare alegere a cifrei unităților, cifra zecilor se poate alege în câte 3 moduri, deci se pot forma $4\cdot3=12$ numere	**3p**
5.	$C(4,0)$	**2p**
	$AC=\sqrt{4^2+3^2}=5$	**3p**
6.	$AC=4$	**2p**
	$AB=4\sqrt{3}$, deci $\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\dfrac{4\sqrt{3}\cdot4}{2}=8\sqrt{3}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}0&-3\\1&-2\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(0))=\begin{vmatrix}0&-3\\1&-2\end{vmatrix}=0\cdot(-2)-(-3)\cdot1=$	**3p**
	$=0+3=3$	**2p**
b)	$A(2)=\begin{pmatrix}2&3\\-1&4\end{pmatrix}$, $A(5)=\begin{pmatrix}5&12\\-4&13\end{pmatrix}$, $A(2)\cdot A(0)+A(5)=\begin{pmatrix}3&-12\\4&-5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&12\\-4&13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&0\\0&8\end{pmatrix}=8I_2$	**3p**
	$8I_2=mI_2$, de unde obținem $m=8$	**2p**
c)	$A(1-x)=\begin{pmatrix}1-x&-3x\\x&1-3x\end{pmatrix}$, $A(x)-A(0)\cdot A(1-x)=\begin{pmatrix}4x&-6x\\2x&0\end{pmatrix}$, de unde obținem $\det(A(x)-A(0)\cdot A(1-x))=12x^2$, pentru orice număr real x	**3p**
	$12x^2=3$, de unde obținem $x=-\dfrac{1}{2}$ sau $x=\dfrac{1}{2}$	**2p**
2.a)	$1\circ8=1+8+1-\sqrt{1\cdot8+1}=$	**3p**
	$=10-3=7$	**2p**
b)	$x\circ\dfrac{3}{x}=x+\dfrac{3}{x}-1$, pentru orice $x\in M$	**3p**
	$x+\dfrac{3}{x}-1=x$, de unde obținem $x=3$, care convine	**2p**

c)	$n\circ(n+2)=n+2$, $(n\circ(n+2))\circ(n+4)=n+4$, pentru orice număr natural nenul n	**3p**
	$n+4>\frac{n^2}{2}$ și, cum n este număr natural nenul, obținem $n=1$ sau $n=2$ sau $n=3$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(3x^2+4x\right)e^x+\left(x^3+2x^2\right)e^x=$	**3p**
	$=\left(x^3+5x^2+4x\right)e^x=x\left(x^2+5x+4\right)e^x$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f(0)=0$, $f'(0)=0$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)$, adică $y=0$	**3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-4$ sau $x=-1$ sau $x=0$; pentru $x\in[-4,-1]\Rightarrow f'(x)\geq 0$, deci f este crescătoare pe $[-4,-1]$ și pentru $x\in[-1,0]\Rightarrow f'(x)\leq 0$, deci f este descrescătoare pe $[-1,0]$	**2p**
	$f(-4)=-\frac{32}{e^4}$, $f(-1)=\frac{1}{e}$ și $f(0)=0$, deci $-\frac{32}{e^4}\leq f(x)\leq\frac{1}{e}$, de unde obținem $-\frac{32}{e^{x+4}}\leq x^2(x+2)\leq\frac{1}{e^{x+1}}$, pentru orice $x\in[-4,0]$	**3p**
2.a)	$\int_1^2\left(f(x)+\frac{2}{x+1}\right)dx=\int_1^2 3x^2dx=x^3\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=8-1=7$	**2p**
b)	$\int_1^5\left(3x^2-f(x)\right)dx=\int_1^5\frac{2}{x+1}dx=2\int_1^5\frac{(x+1)'}{x+1}dx=2\ln(x+1)\Big\vert_1^5=$	**3p**
	$=2\ln 6-2\ln 2=2\ln 3$	**2p**
c)	$\int_1^4\left(a+bg(x)\right)g'(x)dx=\int_1^4 ag'(x)dx+\int_1^4 bg(x)g'(x)dx=ag(x)\Big\vert_1^4+\frac{bg^2(x)}{2}\Big\vert_1^4=$	**3p**
	$=a\left(g(4)-g(1)\right)+\frac{b}{2}\left(g^2(4)-g^2(1)\right)$, pentru orice numere reale a și b	
	$g(1)=f(0)=-2$, $g(4)=f(1)=2$, deci $\int_1^4\left(a+bg(x)\right)g'(x)dx=4a$, pentru orice numere reale a și b	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $2-5i+i(5-3i)=5$, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=6x+m$, unde m este număr real. Determinați numărul real m pentru care $f(2)=15$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $7^{2x+1}=7^x\cdot 7^2$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cel puțin una dintre cifre egală cu 1.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,5)$ și $B(4,2)$. Determinați distanța dintre punctul A și mijlocul segmentului OB.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $AB=5$ și $BC=5\sqrt{5}$. Arătați că $\sin C=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}2&-1\\1&0\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}x&x-3\\3-x&x-4\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=1$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care $B(4)\cdot B(4)+I_2=aB(4)$.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $A\cdot B(x)=B(x)\cdot A$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=(x+y)(4-x-y)$.

5p **a)** Arătați că $0*3=3$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $x*1=0$.

5p **c)** Determinați numerele naturale n pentru care numărul $N=(n+5)*(n-5)$ este natural.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-x-2\ln(x+1)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{2x^2+x-3}{x+1}$, $x\in(-1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Arătați că $x^2-x\geq 2\ln\frac{x+1}{2}$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+3x+1$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^3\left(f(x)-3x\right)dx=12$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1\frac{1}{\left(f(x)-x^2\right)^2}dx=\frac{1}{4}$.

5p **c)** Arătați că aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{f(x)-x^2-1}{e^x}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$ este egală cu $3\left(1-\frac{2}{e}\right)$.

Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $2\cdot(1,2+0,1)+0,4=3$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$. Determinați numărul real a pentru care $f(a)-f(2)=a$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_8\left(x^2-5x+5\right)=\log_8 x$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale impare, de două cifre distincte, se pot forma cu elementele mulțimii $A=\{1,3,4,6,8\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,8)$, $B(4,2)$ și C, mijlocul segmentului OA. Determinați coordonatele mijlocului segmentului BC.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $AB=8$ și $C=\frac{\pi}{4}$. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu 32.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&3\\1&3\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}x-2&x-2\\x-4&x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(B(5))=12$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care $(B(4)-B(2))\cdot A=aA$.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $\det(A\cdot B(x)-4xI_2)=0$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=x(x-2)+y(y-2)$.

5p **a)** Arătați că $3\circ 3=6$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $2\circ x=x^2+2$.

5p **c)** Arătați că $x\circ y\geq -2$, pentru orice numere reale x și y.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2\sqrt{x}-\frac{1}{x}-3$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x\sqrt{x}+1}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este bijectivă.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{4x}{x^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2\left(x^2+1\right)f(x)\,dx=6$.

5p **b)** Arătați că $\int_2^3 f(x)\,dx=2\ln 2$.

5p **c)** Determinați $m \in (1, +\infty)$ pentru care $\int_1^m \left(\frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \right)^3 dx = 6$.

Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $6-2\sqrt{5}+\sqrt{5}\cdot\left(2-\sqrt{5}\right)=1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f\left(x\right)=2x-3$. Determinați numărul real a pentru care $f\left(a\right)+f\left(1\right)=0$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $10^{x-1}=10^{-2x}\cdot 10^{2}$.

5p **4.** Determinați câte dintre numerele naturale de două cifre distincte, care se pot forma cu cifre din mulțimea $A=\{1,2,3,4,5,6\}$, au ambele cifre pare.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A\left(4,6\right)$ și $B\left(6,0\right)$. Determinați distanța dintre punctele B și M, unde punctul M este mijlocul segmentului OA.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $AC=6$ și aria egală cu 24. Arătați că $AB=8$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ și $B\left(x\right)=\begin{pmatrix}x+1 & x+4\\ 2x & 4x-3\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=1$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $\det\left(B\left(x\right)-xA\right)=x$.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $B\left(x\right)+B\left(x+2\right)=2A\cdot A\cdot A$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+mX^2-2X-4$, unde m este număr real.

5p **a)** Pentru $m=6$, arătați că $f\left(1\right)=1$.

5p **b)** Determinați numărul real m pentru care $\left(x_1x_2x_3\right)^2=x_1+x_2+x_3+x_1x_2x_3$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Determinați rădăcinile polinomului f, știind că restul împărțirii lui f la polinomul $X-2$ este egal cu 8.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\left(0,+\infty\right)\to\mathbb{R}$, $f\left(x\right)=\dfrac{3-x}{x^2}+\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'\left(x\right)=\dfrac{x^2+x-6}{x^3}$, $x\in\left(0,+\infty\right)$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f\left(x\right)-\ln x\right)=0$.

5p **c)** Arătați că $4f\left(x\right)-1\geq\ln 16$, pentru orice $x\in\left(0,+\infty\right)$.

2. Se consideră funcția $f:\left(-3,+\infty\right)\to\mathbb{R}$, $f\left(x\right)=3x+\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$.

5p **a)** Arătați că $\int_2^4\left(f\left(x\right)-\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}\right)dx=18$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^6\left(f\left(x\right)-3x\right)dx=2$.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $\int_{-2}^{1}\dfrac{1}{x+3}\left(f\left(x\right)-\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}\right)dx=9\left(a-2\ln 2\right)$.

Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați termenul a_1 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, în care $a_2=8$ și $a_3=12$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-2$. Determinați numărul real m pentru care $f(m)=m$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_6\left(9-x^2\right)=\log_6 5$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $A=\{0,1,2,\ldots,9\}$. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea A, numărul $\sqrt{2n+1}$ să aparțină mulțimii A.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,0)$, $B(4,4)$ și $C(5,2)$. Arătați că triunghiul ABC este dreptunghic în C.

5p **6.** Se consideră expresia $E(x)=2\sin x\cdot\cos\frac{x}{2}+\left(\sin\frac{3x}{4}\right)^2$. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{3}\right)=2$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$ și $B(a)=\begin{pmatrix}a & a+1\\ a-3 & 4a-1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(B(1))=7$.

5p **b)** Arătați că $B(2)-B(0)\cdot B(1)=4A$.

5p **c)** Determinați numerele reale a pentru care matricea $C(a)=B(a)-aA$ **nu** este inversabilă.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=xy-2x-3y+6$.

5p **a)** Arătați că $2*2=0$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $x*6=x$.

5p **c)** Determinați mulțimea numerelor reale x pentru care $x*(2*x)\geq 2$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x}{x^2+x+4}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{2\left(4-x^2\right)}{\left(x^2+x+4\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Arătați că $f(x)-f(4-x)\leq 1$, pentru orice $x\in[4,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+3}{x+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^2(x+1)f(x)\,dx=8$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx=1+2\ln 2$.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $\int_1^2\left(x^2-1\right)e^x f(x)\,dx=e(e+a)$.

Examenul național de bacalaureat 2024

Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $0,5+10\cdot(1-0,75)=3$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x+1$. Arătați că $f(m)+g(-m)=m$, pentru orice număr real m.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2+6}=\sqrt{5x}$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea A, acesta să fie divizor al lui 30.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1)$, $B(2,2)$ și $C(4,0)$. Arătați că triunghiul ABC este dreptunghic în B.

5p **6.** Se consideră $E(x)=3\cos^2 x-\cos\frac{x}{2}\cdot\sin x$, unde x este număr real. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x & -2x \\ 1 & x-6 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(6))=12$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care $A(4)\cdot A(4)=aA(4)$.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere naturale nenule, cu $m<n$, pentru care $\det(A(m)+A(n))=0$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=xy(x+y-xy)$.

5p **a)** Arătați că $1*3=3$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $x*2=-x^2$.

5p **c)** Determinați numărul întreg nenul m pentru care $\frac{1}{2m}*m=m$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-2}{x}-3\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)+3\ln x}{x+1}=1$.

5p **c)** Demonstrați că $\frac{x^2+x-2}{x}\le 3\ln x$, pentru orice $x\in(0,2]$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+x+1$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^2\left(f(x)-x^3\right)dx=4$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 \frac{x^2}{f(x)-x}dx = \frac{\ln 2}{3}$.

5p **c)** Determinați $a \in (-\infty, 0)$, știind că $\int_a^0 e^{-x}\left(f'(x)-f(x)\right)dx = 1-a^3e^{-a}$.

Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numerele complexe $z_1 = 3 - i$ și $z_2 = 1 + i$. Arătați că $z_1 + iz_2 = 2$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 5 - x$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = x + 2$. Determinați numărul real a pentru care $f(a) = g(a+1)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3\left(4x - x^2\right) = 1$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale impare, de două cifre, cu cifra zecilor număr par, se pot forma cu elementele mulțimii $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,3)$, $B(2,0)$ și C. Știind că punctul B este mijlocul segmentului OC, determinați distanța dintre punctele A și C.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $B = \frac{\pi}{6}$ și mediana $AM = 4$. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu $8\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(x) = \begin{pmatrix} x & 3x-3 \\ 1-x & 3x-2 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(0)\right) = 3$.

5p **b)** Determinați numărul real m pentru care $A(2)\cdot A(0) + A(5) = mI_2$.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $\det\left(A(x) - A(0)\cdot A(1-x)\right) = 3$.

2. Pe mulțimea $M = (0,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x \circ y = x + y + 1 - \sqrt{xy+1}$.

5p **a)** Arătați că $1 \circ 8 = 7$.

5p **b)** Determinați $x \in M$ pentru care $x \circ \frac{3}{x} = x$.

5p **c)** Determinați numerele naturale nenule n pentru care $\left(n \circ (n+2)\right) \circ (n+4) > \frac{n^2}{2}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \left(x^3 + 2x^2\right)e^x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x) = x\left(x^2 + 5x + 4\right)e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Arătați că $-\frac{32}{e^{x+4}} \le x^2(x+2) \le \frac{1}{e^{x+1}}$, pentru orice $x \in [-4,0]$.

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 - \frac{2}{x+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2 \left(f(x) + \frac{2}{x+1}\right)dx = 7$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^5 \left(3x^2 - f\left(x\right)\right)dx = 2\ln 3$.

5p **c)** Se consideră funcția $g:\left(0,+\infty\right)\to\mathbb{R}$, $g\left(x\right)=f\left(\sqrt{x}-1\right)$. Arătați că $\int_1^4 \left(a+bg\left(x\right)\right)g'\left(x\right)dx = 4a$, pentru orice numere reale a și b.

Examenul de bacalaureat naţional 2017

Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z^2+2i=(1-i)^2+2i=1-2i+i^2+2i=$	**2p**
	$=1-1=0$	**3p**
2.	$f(0)=2017$	**2p**
	$(g\circ f)(0)=g(f(0))=g(2017)=0$	**3p**
3.	$x^2-3x=x-4\Leftrightarrow x^2-4x+4=0$	**3p**
	$x=2$	**2p**
4.	Mulțimea M are 100 de elemente, deci sunt 100 de cazuri posibile	**1p**
	În mulțimea M sunt 10 pătrate perfecte, deci sunt 10 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{10}{100}=\frac{1}{10}$	**2p**
5.	Panta unei perpendiculare pe dreapta d este egală cu -1	**2p**
	Ecuația dreptei care trece prin punctul A și este perpendiculară pe dreapta d este $y=-x+1$	**3p**
6.	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{6\cdot 4\cdot \sin\frac{\pi}{6}}{2}=\frac{6\cdot 4\cdot \frac{1}{2}}{2}=$	**3p**
	$=6$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & -2\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(0))=\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 2 & -2\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=2-(-2)=4$	**3p**
b)	$A(1+m)+A(1-m)=\begin{pmatrix}1+m-1 & -1\\ 2 & 1+m-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1-m-1 & -1\\ 2 & 1-m-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 4 & -2\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=2\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}=2A(1)$, pentru orice număr real m	**2p**
c)	$\det(A(m))=\begin{vmatrix}m-1 & -1\\ 2 & m-2\end{vmatrix}=m^2-3m+4$	**2p**
	Pentru orice număr real m, $m^2-3m+4\neq 0$, deci matricea $A(m)$ este inversabilă	**3p**
2.a)	$x*y=-3xy+9x+9y-27+3=$	**2p**
	$=-3x(y-3)+9(y-3)+3=-3(x-3)(y-3)+3$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
b)	$(x*y)*z=(-3(x-3)(y-3)+3)*z=9(x-3)(y-3)(z-3)+3$	**2p**
	$x*(y*z)=x*(-3(y-3)(z-3)+3)=9(x-3)(y-3)(z-3)+3=(x*y)*z$, pentru orice numere reale x, y și z, deci legea de compoziție „$*$” este asociativă	**3p**

c)	$(x*x)*x=9(x-3)^3+3$	**2p**
	$9(x-3)^3+3=12\Leftrightarrow(x-3)^3=1\Leftrightarrow x=4$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=3x^2-\dfrac{3}{x}=\dfrac{3x^3-3}{x}=$	**3p**
	$=\dfrac{3\left(x^3-1\right)}{x}=\dfrac{3(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\left(x^3-3\ln x\right)=+\infty$	**2p**
	Dreapta de ecuație $x=0$ este asimptotă verticală la graficul funcției f	**3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$	**1p**
	$x\in(0,1]\Rightarrow f'(x)\le 0$, deci f este descrescătoare pe $(0,1]$	**1p**
	$x\in[1,+\infty)\Rightarrow f'(x)\ge 0$, deci f este crescătoare pe $[1,+\infty)$	**1p**
	Cum $f(1)=1$, obținem $f(x)\ge 1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_1^2\left(x^2+3x+3\right)f(x)\,dx=\int_1^2(2x+3)\,dx=\left(x^2+3x\right)\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=10-4=6$	**2p**
b)	$\mathcal{A}=\int_0^3\lvert f(x)\rvert dx=\int_0^3\dfrac{2x+3}{x^2+3x+3}\,dx=\ln\left(x^2+3x+3\right)\Big\vert_0^3=$	**3p**
	$=\ln 21-\ln 3=\ln 7$	**2p**
c)	$\int_{-1}^0 f'(x)f(x)\,dx=\dfrac{1}{2}f^2(x)\Big\vert_{-1}^0=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{2}\left(f^2(0)-f^2(-1)\right)=\dfrac{1}{2}(1-1)=0$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2017

Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numărul complex $z=1-i$. Arătaţi că $z^2+2i=0$.

5p **2.** Calculaţi $(g\circ f)(0)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2017$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x-2017$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{x^2-3x}=3^{x-4}$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea $M=\{1,2,3,\ldots,100\}$, acesta să fie pătrat perfect.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(0,1)$. Determinaţi ecuaţia dreptei d, care trece prin punctul A şi este perpendiculară pe dreapta de ecuaţie $y=x-10$.

5p **6.** Determinaţi aria triunghiului ABC, ştiind că $AB=6$, $AC=4$ şi $A=\frac{\pi}{6}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix} m-1 & -1 \\ 2 & m-2 \end{pmatrix}$, unde m este număr real.

5p **a)** Calculaţi $\det(A(0))$.

5p **b)** Demonstraţi că $A(1+m)+A(1-m)=2A(1)$, pentru orice număr real m.

5p **c)** Demonstraţi că matricea $A(m)$ este inversabilă, pentru orice număr real m.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=-3xy+9x+9y-24$.

5p **a)** Arătaţi că $x*y=-3(x-3)(y-3)+3$, pentru orice numere reale x şi y.

5p **b)** Demonstraţi că legea de compoziţie „$*$” este asociativă.

5p **c)** Determinaţi numărul real x, pentru care $(x*x)*x=12$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3\ln x$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{3(x-1)(x^2+x+1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei verticale la graficul funcţiei f.

5p **c)** Demonstraţi că $f(x)\geq 1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x+3}{x^2+3x+3}$.

5p **a)** Calculaţi $\int_1^2 (x^2+3x+3)f(x)\,dx$.

5p **b)** Arătaţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=3$ are aria egală cu $\ln 7$.

5p **c)** Demonstraţi că $\int_{-1}^{0} f'(x)f(x)\,dx=0$.

Examenul de bacalaureat 2012

Proba E.c)

Proba scrisă la MATEMATICĂ

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(1+i)^2 = 2i$	**3p**
	$\lvert 2i \rvert = 2$	**2p**
2.	$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 + 3x + 2 = 0$	**1p**
	$x_1 = -1 \Rightarrow y_1 = -1$	**2p**
	$x_2 = -2 \Rightarrow y_2 = 0$	**2p**
3.	$2^{x+1} \leq 2^2$	**1p**
	$x + 1 \leq 2$	**2p**
	$S = (-\infty, 1]$	**2p**
4.	$p = \dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}$	**1p**
	Submulțimile cu 3 termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice sunt: $\{1,2,3\}$, $\{2,3,4\}$, $\{3,4,5\}$ şi $\{1,3,5\} \Rightarrow$ 4 cazuri favorabile	**2p**
	Numărul submulțimilor cu 3 elemente este $C_5^3 = 10 \Rightarrow$ 10 cazuri posibile	**1p**
	$p = \dfrac{2}{5}$	**1p**
5.	$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \Leftrightarrow a + 2 = 3$	**4p**
	$a = 1$	**1p**
6.	$\cos A = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC}$	**2p**
	$\cos A = -\dfrac{1}{5}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$	**2p**
	$\det A = 3m - 6$	**3p**
b)	Sistemul are o soluție unică dacă şi numai dacă $\det A \neq 0$	**2p**
	Finalizare: $m \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$	**3p**

c)	$\det A=0$ și $\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}\neq 0$, deci matricea sistemului are rangul doi	**1p**
	$z=\alpha \Rightarrow \begin{cases}2x+y=-3\alpha\\ x+2y=-3\alpha\end{cases} \Rightarrow x=-\alpha,\ y=-\alpha$	**2p**
	$x_0{}^2+y_0{}^2+z_0{}^2=3\Rightarrow(-\alpha)^2+(-\alpha)^2+\alpha^2=3\Rightarrow \alpha\in\{-1,1\}$	**1p**
	Soluția este $(x_0,y_0,z_0)=(1,1,-1)$	**1p**
2.a)	$X(p)\cdot X(q)=X(p+q+pq)$	**3p**
	$p,q\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}\Rightarrow (p+1)(q+1)\neq 0\Rightarrow p+q+pq\neq -1$, deci $X(p+q+pq)\in G$	**2p**
b)	Pentru orice $X(p)\in G$, există $X\left(-\frac{p}{1+p}\right)$ astfel încât $X(p)\cdot X\left(-\frac{p}{1+p}\right)=X(0)$	**3p**
	$-\frac{p}{1+p}\neq -1\Rightarrow X\left(-\frac{p}{1+p}\right)\in G$ și $X\left(-\frac{p}{1+p}\right)$ este inversul lui $X(p)$	**2p**
c)	$(X(p))^3=X(7)$	**1p**
	$(X(p))^3=X((p+1)^3-1)$	**3p**
	$(p+1)^3=8$, deci $p=1$ și soluția este $X(1)$	**1p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=3x^2-12$	**3p**
	$f'(x)\geq 0$ pentru orice $x\in[2,+\infty)$, deci f este crescătoare pe $[2,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{3x^2-12}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{6x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{6}=+\infty$	**3p**
c)	Șirul lui Rolle pentru funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-a$ este $-\infty,16-a,-16-a,+\infty$	**3p**
	Ecuația are trei soluții reale distincte dacă și numai dacă $a\in(-16,16)$	**2p**
2.a)	$F'(x)=f(x)$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)$	**2p**
	$f(x)>0$ pentru orice $x\in(-1,+\infty)$	**1p**
	F este strict crescătoare	**2p**
b)	$\int_0^1\frac{f(x)}{x+1}dx=\int_0^1\frac{2x+3}{(x+1)(x+2)}dx=\int_0^1\frac{dx}{x+1}+\int_0^1\frac{dx}{x+2}=$	**3p**
	$=\ln(x+1)\Big\|_0^1+\ln(x+2)\Big\|_0^1=\ln 3$	**2p**
c)	$\int_x^{2x} f(t)\,dt=(2t-\ln(t+2))\Big\|_x^{2x}=2x-\ln\frac{2x+2}{x+2}$, pentru $x>0$	**3p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-\ln\frac{2x+2}{x+2}}{x}=2$	**2p**

Examenul de bacalaureat 2012
Proba E.c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați modulul numărului complex $(1+i)^2$.

5p **2.** Determinați coordonatele punctelor de intersecție a graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=-x-2$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $2^{x+1}\le 4$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare una dintre submulțimile cu trei elemente ale mulțimii $A=\{1,2,3,4,5\}$, elementele submulțimii alese să fie termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **5.** Se consideră vectorii $\vec{u}=\vec{i}-2\vec{j}$ și $\vec{v}=a\vec{i}-\vec{j}$. Determinați numărul real a pentru care $\vec{u}\cdot\vec{v}=3$.

5p **6.** Calculați cosinusul unghiului A al triunghiului ABC în care $AB=4$, $AC=5$ și $BC=7$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră sistemul $\begin{cases}2x+y+3z=0\\x+2y+3z=0\\x+y+mz=0\end{cases}$, unde $m\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Calculați determinantul matricei sistemului.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui m pentru care sistemul are soluție unică.

5p **c)** În cazul $m=2$, determinați soluția (x_0,y_0,z_0) a sistemului pentru care $x_0>0$ și $x_0^2+y_0^2+z_0^2=3$.

2. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}3&-2\\3&-2\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și mulțimea $G=\left\{X(p)=I_2+pA\,\middle|\,p\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}\right\}$.

5p **a)** Arătați că $X(p)\cdot X(q)\in G$, pentru orice $X(p),\ X(q)\in G$.

5p **b)** Admitem că $(G,\cdot)$ este grup comutativ având elementul neutru $X(0)$. Determinați inversul elementului $X(p)$ în acest grup.

5p **c)** Rezolvați ecuația $(X(p))^3=I_2+7A$, unde $X(p)\in G$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-12x$.

5p **a)** Arătați că funcția este crescătoare pe intervalul $[2,+\infty)$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{f(x)}$.

5p **c)** Determinați mulțimea numerelor reale a pentru care ecuația $f(x)=a$ are trei soluții reale distincte.

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+3}{x+2}$.

5p **a)** Arătați că orice primitivă a lui f este strict crescătoare pe $(-1,+\infty)$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1\dfrac{f(x)}{x+1}dx$.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_x^{2x}f(t)\,dt}{x}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2014
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Simulare pentru elevii clasei a XII-a

Barem de evaluare şi de notare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\frac{1+i}{1-i}=i \Rightarrow a+ib=i$	**3p**
	$a=0,\ b=1$	**2p**
2.	$f(x)=0 \Rightarrow x^2-6x+8=0 \Rightarrow x_1=2,\ x_2=4 \Rightarrow G_f \cap Ox=\{(2,0),(4,0)\}$	**3p**
	$f(0)=8 \Rightarrow G_f \cap Oy=\{(0,8)\}$	**2p**
3.	$3^{x+2}+3^{x+1}=36 \Leftrightarrow 3^{x+1}=9$	**2p**
	$x+1=2 \Leftrightarrow x=1$	**3p**
4.	Sunt 72 de numere naturale de două cifre care nu conțin cifra 6, deci sunt 72 de cazuri favorabile	**2p**
	Sunt 90 de numere naturale de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{72}{90}=\frac{4}{5}$	**2p**
5.	$m_{AB}=\frac{1}{3},\ d \parallel AB \Rightarrow m_d=\frac{1}{3}$, unde d este paralela prin C la AB	**3p**
	$d: y=\frac{1}{3}x-2$	**2p**
6.	$\cos x+\sin x\cos x=\sin x+\sin x\cos x \Leftrightarrow \cos x=\sin x$	**2p**
	$x=\frac{\pi}{4}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+2 & 1 & 1 \\ a+2 & a & 1 \\ a+2 & 1 & a \end{vmatrix}=(a+2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a-1 & 0 \\ 1 & 0 & a-1 \end{vmatrix}=$	**3p**
	$=(a+2)\begin{vmatrix} a-1 & 0 \\ 0 & a-1 \end{vmatrix}=(a+2)(a-1)^2$	**2p**
b)	$\det(A(-1))=4$	**2p**
	Inversa matricei $A(-1)$ este $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$	**3p**

c)	$A(a)\cdot A(b)=\begin{pmatrix} ab+2 & a+b+1 & a+b+1 \\ a+b+1 & ab+2 & a+b+1 \\ a+b+1 & a+b+1 & ab+2 \end{pmatrix}$	**2p**
	$3ab+6a+6b+12=24\Rightarrow (a+2)(b+2)=8$	**1p**
	Perechile de numere naturale care verifică cerința sunt $(0,2)$ și $(2,0)$	**2p**
2.a)	$3xy-3x-3y+4=3(xy-x-y+1)+1=$	**3p**
	$=3(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
b)	$x*1=1*x=1$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\frac{1}{1007}*\frac{2}{1007}*\frac{3}{1007}*...*\frac{2014}{1007}=\left(\frac{1}{1007}*...*\frac{1006}{1007}\right)*\frac{1007}{1007}*\left(\frac{1008}{1007}*...*\frac{2014}{1007}\right)=1$	**3p**
c)	Elementul neutru este $\frac{4}{3}$	**1p**
	$x*x=\frac{4}{3}\Leftrightarrow 3(x-1)^2+1=\frac{4}{3}\Leftrightarrow (x-1)^2=\frac{1}{9}$	**2p**
	$x_1=\frac{2}{3}$, $x_2=\frac{4}{3}$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=1\Rightarrow$ dreapta $y=x+1$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	**3p**
b)	$f(2)=6$, $f'(2)=-2$	**3p**
	Ecuația tangentei este $y-f(2)=f'(2)(x-2)\Rightarrow y=-2x+10$	**2p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)^{x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2}{x^2-x}\right)^{x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{x+2}{x^2-x}\right)^{\frac{x^2-x}{x+2}}\right]^{\frac{x+2}{x^2-x}\cdot(x+3)}=$	**3p**
	$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+5x+6}{x^2-x}}=e$	**2p**
2.a)	$I_1=\int_0^1\frac{x}{x+1}dx=\int_0^1\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx=$	**2p**
	$=1-\ln 2$	**3p**
b)	$I_{n+1}+I_n=\int_0^1\frac{x^{n+1}}{x+1}dx+\int_0^1\frac{x^n}{x+1}dx=\int_0^1\frac{x^n(x+1)}{x+1}dx=$	**3p**
	$=\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big\vert_0^1=\frac{1}{n+1}$, pentru orice număr natural nenul n	**2p**
c)	$I_{n+1}-I_n=\int_0^1\frac{x^n(x-1)}{x+1}dx\le 0$, pentru orice număr natural nenul n	**1p**
	$2I_{n+1}\le\frac{1}{n+1}\le 2I_n$, pentru orice număr natural nenul n	**2p**
	$\frac{1}{2}\le(n+1)I_n\le\frac{n+1}{2n}$, pentru orice număr natural n, $n\ge 2$	**1p**
	$\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)I_n=\frac{1}{2}$	**1p**

Examenul de bacalaureat naţional 2014
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Simulare pentru elevii clasei a XII-a

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați numerele reale a și b, știind că $\frac{1+i}{1-i}=a+ib$ și $i^2=-1$.

5p **2.** Determinaţi coordonatele punctelor de intersecție cu axele de coordonate a graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-6x+8$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $9^{\frac{x+2}{2}}+3^{x+1}=36$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să nu conțină cifra 6.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,2)$, $B(2,3)$ și $C(0,-2)$. Determinați ecuația paralelei duse prin C la AB.

5p **6.** Determinați $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $\frac{1+\sin x}{\sin x}=\frac{1+\cos x}{\cos x}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\det(A(a))=(a+2)(a-1)^2$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Calculați inversa matricei $A(-1)$ în $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **c)** Determinați perechile de numere naturale (a,b) pentru care matricea $A(a)\cdot A(b)$ are suma elementelor egală cu 24.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=3xy-3x-3y+4$. Legea „$*$” este asociativă și are element neutru.

5p **a)** Arătați că $x*y=3(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Calculaţi $\frac{1}{1007}*\frac{2}{1007}*\frac{3}{1007}*\ldots*\frac{2014}{1007}$.

5p **c)** Determinaţi numerele reale x care sunt egale cu simetricele lor față de legea „$*$”.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+2}{x-1}$.

5p **a)** Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice la graficul funcţiei f.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=2$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)^{x+3}$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{x+1}dx$.

5p **a)** Calculaţi I_1.

5p **b)** Arătaţi că $I_{n+1}+I_n=\frac{1}{n+1}$, pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Arătați că $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)I_n=\frac{1}{2}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2015
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Clasa a XII-a
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z=\dfrac{(2+3i)(3+2i)}{4+9}=\dfrac{13i}{13}=i$	**3p**
	Partea reală a numărului z este egală cu 0	**2p**
2.	$\Delta=1+4a$	**2p**
	$1+4a=0\Leftrightarrow a=-\dfrac{1}{4}$	**3p**
3.	$4^x+3\cdot 4^x-16=0\Leftrightarrow 4\cdot 4^x=16$	**3p**
	$x=1$	**2p**
4.	Sunt $C_3^1\cdot C_4^1=12$ cazuri favorabile	**2p**
	Sunt $C_7^2=21$ de cazuri posibile	**1p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{12}{21}=\dfrac{4}{7}$	**2p**
5.	Mediatoarea d trece prin punctul $P(3,2)$, care este mijlocul segmentului MN	**2p**
	$m_{MN}=-1\Rightarrow m_d=1$	**1p**
	Ecuația dreptei d este $y=x-1$	**2p**
6.	$\sin(\pi-x)=\sin x$, $\cos(2\pi-x)=\cos x$	**2p**
	$(2\sin x)^2+(2\cos x)^2=4\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=4$, pentru orice număr real x	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)+A(-1)=\begin{pmatrix}0&0&-1\\1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&-1\\-1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&-2\\0&0&0\\0&-2&0\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=2\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}=2A(0)$	**2p**
b)	$A(x)+I_3=\begin{pmatrix}1&0&-1\\x&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A(x)+I_3\right)=\begin{vmatrix}1&0&-1\\x&1&0\\0&-1&1\end{vmatrix}=1+x$	**3p**
	$1+x=0\Leftrightarrow x=-1$	**2p**
c)	$aI_3-bA(-1)+cA(-1)\cdot A(-1)=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&a&0\\0&0&a\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0&-b\\-b&0&0\\0&-b&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&c&0\\0&0&c\\c&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&c&b\\b&a&c\\c&b&a\end{pmatrix}$	**2p**

	$\det\left(aI_3-bA(-1)+cA(-1)\cdot A(-1)\right)=\begin{vmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{vmatrix}=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)=$	**1p**
	$=\frac{1}{2}(a+b+c)\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right)\geq 0$, pentru orice numere reale pozitive a, b şi c	**2p**
2.a)	$x*y=xy-5x-5y+25+5=$	**2p**
	$=x(y-5)-5(y-5)+5=(x-5)(y-5)+5$, pentru orice numere întregi x şi y	**3p**
b)	Elementul neutru al legii de compoziţie „$*$” este 6	**1p**
	x este simetrizabil dacă există $x'\in\mathbb{Z}$ astfel încât $x*x'=x'*x=6$, de unde $x'=5+\frac{1}{x-5}$	**2p**
	Cum x' este număr întreg, obţinem $x=4$ sau $x=6$	**2p**
c)	$x*5=5$ şi $5*y=5$, pentru x şi y numere întregi	**2p**
	5 este divizor al lui 2015	**1p**
	2015 are 8 divizori naturali şi legea de compoziţie este asociativă, avem $d_1*d_2*\cdots*d_8=5$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=x'-\left(\ln(x+1)\right)'=$	**2p**
	$=1-\frac{1}{x+1}$, $x\in(-1,+\infty)$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-f(x)-\ln 2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(x+1)-\ln 2}{x-1}=$	**2p**
	$=\frac{1}{2}$	**3p**
c)	$f'(0)=0$, $f'(x)<0$, pentru orice $x\in(-1,0)$ şi $f'(x)>0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**3p**
	$f(x)\geq f(0)\Rightarrow \ln(x+1)\leq x$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=\frac{1}{2}\ln 2$	**2p**
b)	$\int_0^1\frac{f(x)+x^2f(x)}{x^4+1}dx=\int_0^1\frac{x}{x^4+1}dx=$	**2p**
	$=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(x^2\right)\Big\vert_0^1=\frac{\pi}{8}$	**3p**
c)	Din regula lui l`Hospital pentru cazul $\frac{0}{0}$, limita cerută este egală cu $\lim\limits_{x\to 1}\left(\int_1^x f(t)\,dt\right)'=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\frac{1}{2}$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2015
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Clasa a XII-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculaţi partea reală a numărului complex $z=\frac{3+2i}{2-3i}$.

5p **2.** Determinaţi numărul real a, ştiind că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x-a$ are graficul tangent axei Ox.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{2x}+3\cdot 4^x-16=0$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând una dintre submulţimile cu două elemente ale mulţimii $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$, aceasta să aibă un singur element număr par.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(2,3)$ şi $N(4,1)$. Determinaţi ecuaţia mediatoarei segmentului MN.

5p **6.** Arătaţi că $\left(\sin x+\sin(\pi-x)\right)^2+\left(\cos x+\cos(2\pi-x)\right)^2=4$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi $A(x)=\begin{pmatrix}0&0&-1\\x&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $A(1)+A(-1)=2A(0)$.

5p **b)** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\det\left(A(x)+I_3\right)=0$.

5p **c)** Arătaţi că $\det\left(aI_3-bA(-1)+cA(-1)\cdot A(-1)\right)\geq 0$, pentru orice numere reale pozitive a, b şi c.

2. Pe mulţimea numerelor întregi se defineşte legea de compoziţie asociativă şi cu element neutru $x*y=xy-5x-5y+30$.

5p **a)** Arătaţi că $x*y=(x-5)(y-5)+5$, pentru orice numere întregi x şi y.

5p **b)** Determinaţi elementele simetrizabile în raport cu legea de compoziţie „*”.

5p **c)** Calculaţi $d_1*d_2*\cdots*d_8$, unde $d_1,d_2,\ldots,d_8$ sunt divizorii naturali ai lui 2015.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln(x+1)$.

5p **a)** Calculaţi $f'(x)$, $x\in(-1,+\infty)$.

5p **b)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-f(x)-\ln 2}{x-1}$.

5p **c)** Demonstraţi că $\ln(x+1)\leq x$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$.

5p **a)** Calculaţi $\int_0^1 f(x)\,dx$.

5p **b)** Arătaţi că $\int_0^1 \dfrac{f(x)+x^2f(x)}{x^4+1}\,dx=\dfrac{\pi}{8}$.

5p **c)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}\int_1^x f(t)\,dt$.

Examenul de bacalaureat naţional 2016
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Clasa a XII-a
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(2a+1)+(2b-1)i=0$	**3p**
	Cum a şi b sunt numere reale, obţinem $a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$	**2p**
2.	$\Delta=m^2-4$	**2p**
	$-\frac{m^2-4}{4}=-3\Leftrightarrow m^2-16=0\Leftrightarrow m=-4$ sau $m=4$	**3p**
3.	$\log_3 x=\frac{1}{\log_3 x}\Rightarrow(\log_3 x+1)(\log_3 x-1)=0$	**3p**
	$x=\frac{1}{3}$ sau $x=3$, care verifică ecuaţia	**2p**
4.	Sunt 90 de numere naturale de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	Pătratele perfecte de o cifră sunt $0, 1, 4$ şi 9, deci sunt $3\cdot 4=12$ numere naturale de două cifre care au ambele cifrele pătrate perfecte, adică sunt 12 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{12}{90}=\frac{2}{15}$	**2p**
5.	Punctele A, B şi C sunt coliniare, deci $m_{AB}=m_{BC}$	**2p**
	$\frac{-3-a}{0+1}=\frac{1+3}{1-0}\Leftrightarrow a=-7$	**3p**
6.	$\sin^2\frac{\pi}{7}-2\sin\frac{\pi}{7}\cos a+\cos^2 a+\cos^2\frac{\pi}{7}-2\cos\frac{\pi}{7}\sin a+\sin^2 a=2\Leftrightarrow 2-2\sin\left(\frac{\pi}{7}+a\right)=2$	**3p**
	Cum $a\in(0,\pi)$, din relaţia $\sin\left(\frac{\pi}{7}+a\right)=0$, obţinem $a=\frac{6\pi}{7}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(1))=\begin{vmatrix}2&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{vmatrix}=$	**3p**
	$=0$	**2p**
b)	$\det(A(m))=\begin{vmatrix}2&1&m\\m&m&1\\1&m&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&1&m+1\\m&m&m+1\\1&m&m+1\end{vmatrix}=(m+1)\begin{vmatrix}2&1&1\\m-2&m-1&0\\-1&m-1&0\end{vmatrix}=(m+1)(m-1)^2$	**2p**
	Matricea $A(m)$ este inversabilă $\Leftrightarrow\det(A(m))\neq 0\Leftrightarrow(m+1)(m-1)^2\neq 0\Leftrightarrow m\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$	**3p**

c)	$A(0)=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}$, $\det(A(0))=1\neq 0$, $(A(0))^{-1}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&2&-2\\0&1&0\end{pmatrix}$	**3p**
	$X=\begin{pmatrix}2&1&0\\-1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&2&-2\\0&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&9&-7\end{pmatrix}$	**2p**
2.a)	$x*y=xy-4x-4y+16+4=$	**2p**
	$=x(y-4)-4(y-4)+4=(x-4)(y-4)+4$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
b)	$x*4=4*y=4$, pentru x și y numere reale	**2p**
	$1*2*3*\ldots*2016=((1*2*3)*4)*(5*\ldots*2016)=4*(5*\ldots*2016)=4$	**3p**
c)	$(a-4)(b-4)(c-4)=62$, unde a, b și c sunt numere naturale și $a<b<c$	**1p**
	$\begin{cases}a-4=-2\\b-4=-1\\c-4=31\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=3\\c=35\end{cases}$	**2p**
	$\begin{cases}a-4=1\\b-4=2\\c-4=31\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=5\\b=6\\c=35\end{cases}$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x(x+1)}=0$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcţiei f	**2p**
b)	$f'(x)=0\Leftrightarrow-\dfrac{2x+1}{x^2(x+1)^2}=0$	**3p**
	Coordonatele punctului sunt $x=-\dfrac{1}{2}$ și $y=-4$	**2p**
c)	$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^n=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{e}$	**2p**
2.a)	$\int_2^4\dfrac{1}{\ln x}f(x)\,dx=\int_2^4\dfrac{1}{\ln x}\cdot\dfrac{\ln x}{x}\,dx=\int_2^4\dfrac{1}{x}\,dx=\ln x\Big\vert_2^4=$	**3p**
	$=\ln 2$	**2p**
b)	$\int_1^e\dfrac{f(x)}{x}\,dx=\int_1^e\dfrac{\ln x}{x^2}\,dx=\int_1^e\left(-\dfrac{1}{x}\right)'\ln x\,dx=-\dfrac{1}{x}\ln x\Big\vert_1^e+\int_1^e\dfrac{1}{x^2}\,dx=$	**3p**
	$=-\dfrac{1}{e}-\dfrac{1}{x}\Big\vert_1^e=1-\dfrac{2}{e}$	**2p**
c)	Cum $x\in[1,e]$, obținem $0\leq\ln x\leq 1$, deci $0\leq\dfrac{\ln x}{x^{n+1}}\leq\dfrac{1}{x^{n+1}}$, pentru orice număr natural n	**2p**
	$0\leq\int_1^e\dfrac{\ln x}{x^{n+1}}\,dx\leq\int_1^e\dfrac{1}{x^{n+1}}\,dx=-\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{e^n}-1\right)$ și cum $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{e^n}-1\right)\right)=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\int_1^e\dfrac{f(x)}{x^n}\,dx=0$	**3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2016
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Clasa a XII-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați numerele reale a și b, știind că $(a+b)(i+1)=(a-b+1)(i-1)$, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Determinaţi numerele reale m, pentru care funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx+1$ are valoarea minimă egală cu -3.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3 x=\log_x 3$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă ambele cifre pătrate perfecte.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,a)$, $B(0,-3)$ și $C(1,1)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, ştiind că $AB+BC=AC$.

5p **6.** Determinaţi $a\in(0,\pi)$, ştiind că $\left(\sin\frac{\pi}{7}-\cos a\right)^2+\left(\cos\frac{\pi}{7}-\sin a\right)^2=2$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}2 & 1 & m\\ m & m & 1\\ 1 & m & 1\end{pmatrix}$, unde m este număr real.

5p **a)** Calculați $\det(A(1))$.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui m, pentru care matricea $A(m)$ este inversabilă.

5p **c)** Rezolvați ecuația matriceală $X\cdot A(0)=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 2\end{pmatrix}$, unde $X\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=xy-4x-4y+20$.

5p **a)** Arătați că $x*y=(x-4)(y-4)+4$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Calculați $1*2*3*\ldots*2016$.

5p **c)** Determinaţi numerele naturale a, b și c, știind că $a<b<c$ și $a*b*c=66$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x(x+1)}$.

5p **a)** Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

5p **b)** Determinați coordonatele punctului situat pe graficul funcției f, în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu axa absciselor.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f(1)+f(2)+\ldots+f(n)\right)^n$.

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

5p **a)** Calculaţi $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{\ln x} f(x)\,dx$.

5p **b)** Arătaţi că $\displaystyle\int_1^e \frac{f(x)}{x}\,dx = 1-\frac{2}{e}$.

5p **c)** Demonstraţi că $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_1^e \frac{f(x)}{x^n}\,dx = 0$.

Examenul de bacalaureat naţional 2017
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Clasa a XII-a

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\frac{2+i}{2-i}+\frac{2-i}{2+i}=\frac{(2+i)^2+(2-i)^2}{(2-i)(2+i)}=$	**2p**
	$=\frac{4+4i+i^2+4-4i+i^2}{2^2-i^2}=\frac{6}{5}$	**3p**
2.	$x_1+x_2=2m+3,\ x_1x_2=m^2+3m+2$	**2p**
	$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=4m^2+12m+9-4m^2-12m-8=1$, pentru orice număr real m	**3p**
3.	$\sqrt{x-3}=5-x\Rightarrow x-3=(5-x)^2$, deci $x^2-11x+28=0$	**3p**
	$x=7$, care nu verifică ecuația, sau $x=4$, care verifică ecuația	**2p**
4.	Cifra sutelor se poate alege în 4 moduri, cifra zecilor se poate alege în câte 4 moduri	**2p**
	Cifra unităților se poate alege, pentru fiecare mod de alegere a primelor două cifre, în câte 3 moduri, deci se pot forma $4\cdot4\cdot3=48$ de numere	**3p**
5.	$MP \parallel BC$, $NP \parallel AB$	**2p**
	$BNPM$ paralelogram, deci $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BP}$	**3p**
6.	$2\sin x\cos x=\cos x\Leftrightarrow\cos x(2\sin x-1)=0\Leftrightarrow\cos x=0$ sau $\sin x=\frac{1}{2}$	**3p**
	Cum $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$, obținem $x=\frac{\pi}{2}$ sau $x=\frac{5\pi}{6}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&a&3\\1&3&a\end{vmatrix}=a^2+3+3-a-9-a=$	**3p**
	$=a^2-2a-3=(a+1)(a-3)$, pentru orice număr real a	**2p**
b)	$A(m)A(2-m)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&m&3\\1&3&m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2-m&3\\1&3&2-m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&6-m&6-m\\m+4&-m^2+2m+10&7\\m+4&7&-m^2+2m+10\end{pmatrix}$	**2p**
	$A(2-m)A(m)=\begin{pmatrix}3&m+4&m+4\\6-m&-m^2+2m+10&7\\6-m&7&-m^2+2m+10\end{pmatrix}$, de unde obținem $m=1$	**3p**

c)	Sistemul are soluție unică, deci $a\neq -1$ și $a\neq 3$; pentru fiecare număr întreg a, $a\neq -1$ și $a\neq 3$, soluția sistemului este de forma $\left(\frac{a-1}{a+1},\frac{1}{a+1},\frac{1}{a+1}\right)$	**3p**
	Cum $a\in\mathbb{Z}$, obținem $\frac{a-1}{a+1},\ \frac{1}{a+1}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow a+1$ este divizor al lui 1, deci $a=-2$ sau $a=0$	**2p**
2.a)	$x*y=-5xy+10x+10y-20+2=$	**2p**
	$=-5x(y-2)+10(y-2)+2=2-5(x-2)(y-2)$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
b)	$n*n=2-5(n-2)^2$, $(n*n)*n=2+25(n-2)^3$	**3p**
	$2+25(n-2)^3=n\Leftrightarrow(n-2)\left(25(n-2)^2-1\right)=0$ și, cum n este număr natural, obținem $n=2$	**2p**
c)	$a*a=b\Leftrightarrow b-2=-5(a-2)^2$	**1p**
	$b*b=a\Leftrightarrow a-2=-5(b-2)^2$, deci $a-2=-125(a-2)^4$	**2p**
	$a-2=0$, de unde $a=b=2$ sau $a-2=-\frac{1}{5}$, de unde $a=b=\frac{9}{5}$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{x+2}{\left(x^2+2x+2\right)\sqrt{x^2+2x+2}}$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
	$x\in(-\infty,-2]\Rightarrow f'(x)\leq 0$, deci f este descrescătoare pe $(-\infty,-2]$	**1p**
	$x\in[-2,+\infty)\Rightarrow f'(x)\geq 0$, deci f este crescătoare pe $[-2,+\infty)$	**1p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$	**1p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x^2+2x+2}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{-2x-2}{x^2+2x+2}\right)^{\frac{x^2+2x+2}{-2x-2}}\right)^{\frac{-2x-2}{x^2+2x+2}\cdot x}=$	**2p**
	$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2x^2-2x}{x^2+2x+2}}=\frac{1}{e^2}$	**2p**
c)	$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-a$ este continuă și derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $g'(x)=f'(x)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, deci g este strict descrescătoare pe $(-\infty,-2)$ și strict crescătoare pe $(-2,+\infty)$	**2p**
	Cum $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-1-a>0$, $g(-2)=-\sqrt{2}-a<0$ și $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1-a>0$, pentru orice $a\in\left(-\sqrt{2},-1\right)$, ecuația $f(x)=a$ are exact două soluții reale distincte	**3p**
2.a)	$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x+1}}dx=2\sqrt{x+1}\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=2\sqrt{2}-2=2\left(\sqrt{2}-1\right)$	**2p**
b)	$x\in[0,1]\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{x+1}}\leq 1$ și $x^n\geq 0$, deci $\frac{x^n}{\sqrt{x+1}}\leq x^n$, pentru orice număr natural nenul n	**2p**
	$I_n=\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{x+1}}dx\leq\int_0^1 x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big\vert_0^1=\frac{1}{n+1}$, pentru orice număr natural nenul n	**3p**

c)	$I_n = 2\int_0^1 x^n \left(\sqrt{x+1}\right)' dx = 2x^n \left(\sqrt{x+1}\right)\Big\vert_0^1 - 2n\int_0^1 x^{n-1}\sqrt{x+1}\,dx = 2\sqrt{2} - 2n\int_0^1 x^{n-1}\frac{x+1}{\sqrt{x+1}}dx =$	**3p**
	$= 2\sqrt{2} - 2n\int_0^1 \frac{x^n + x^{n-1}}{\sqrt{x+1}}dx = 2\sqrt{2} - 2nI_n - 2nI_{n-1} \Rightarrow (2n+1)I_n = 2\sqrt{2} - 2nI_{n-1}$, pentru orice număr natural n, $n \geq 2$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Clasa a XII-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\frac{2+i}{2-i}+\frac{2-i}{2+i}=\frac{6}{5}$, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2-(2m+3)x+m^2+3m+2=0$. Arătați că $(x_1-x_2)^2=1$, pentru orice număr real m.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x-3}=5-x$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma doar cu cifre pare.

5p **5.** Se consideră triunghiul ABC și punctele M, N și P, mijloacele laturilor AB, BC, respectiv AC. Demonstrați că $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BP}$.

5p **6.** Determinați numerele reale x, știind că $\sin 2x=\cos x$ și $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a & 3\\ 1 & 3 & a\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+y+z=1\\ x+ay+3z=2\\ x+3y+az=2\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(a))=(a+1)(a-3)$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Determinați numerele reale m pentru care $A(m)A(2-m)=A(2-m)A(m)$.

5p **c)** Determinați numerele întregi a pentru care sistemul are soluție unică (x_0,y_0,z_0), iar x_0, y_0 și z_0 sunt numere întregi.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=-5xy+10x+10y-18$.

5p **a)** Arătați că $x*y=2-5(x-2)(y-2)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numerele naturale n, știind că $(n*n)*n=n$.

5p **c)** Arătați că, dacă $a*a=b$ și $b*b=a$, atunci $a=b=2$ sau $a=b=\frac{9}{5}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

5p **a)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\right)^{2x}=\frac{1}{e^2}$.

5p **c)** Demonstrați că pentru orice număr real a, $a\in\left(-\sqrt{2},-1\right)$, ecuația $f(x)=a$ are exact două soluții reale distincte.

2. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ și, pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,dx$.

5p **a)** Arătaţi că $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=2\left(\sqrt{2}-1\right)$.

5p **b)** Demonstrați că $I_n\le\dfrac{1}{n+1}$, pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Demonstrați că $(2n+1)I_n=2\sqrt{2}-2nI_{n-1}$, pentru orice număr natural n, $n\ge 2$.

Examenul de bacalaureat naţional 2018
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Clasa a XII-a
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a=5+\sqrt{5}$	**2p**
	Cum $2<\sqrt{5}<3$, obţinem $[a]=5+\left[\sqrt{5}\right]=7$	**3p**
2.	$(f\circ f)(x)=x+2m$, $f(x+1)=x+1+m$	**2p**
	$x+2m=x+1+m$, deci $m=1$	**3p**
3.	$\left(\frac{2}{3}\right)^{4x+1}\leq\left(\frac{2}{3}\right)^{3x+5}\Leftrightarrow 4x+1\geq 3x+5$	**3p**
	$x\in[4,+\infty)$	**2p**
4.	Numărul de submulţimi cu cel puţin 3 elemente ale mulţimii A este $C_{10}^3+C_{10}^4+\cdots+C_{10}^{10}=$	**3p**
	$=2^{10}-C_{10}^0-C_{10}^1-C_{10}^2=1024-1-10-45=968$	**2p**
5.	$\vec{u}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MQ}$, unde $MNQP$ este paralelogram	**2p**
	$m(\sphericalangle M)=90°$, deci $MNQP$ este dreptunghi şi $MQ=NP=10$	**3p**
6.	$\operatorname{tg}x+\frac{1}{\operatorname{tg}x}+2=0\Leftrightarrow\frac{(\operatorname{tg}x+1)^2}{\operatorname{tg}x}=0$	**2p**
	$\operatorname{tg}x=-1$ şi, cum $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, obţinem $x=\frac{3\pi}{4}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(x))=\begin{vmatrix} x & 0 & 2x-1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2x-1 & 0 & x \end{vmatrix}=\frac{x^2}{2}+0+0-\frac{(2x-1)^2}{2}-0-0=\frac{-3x^2+4x-1}{2}$	**3p**
	$x=\frac{1}{3}$ sau $x=1$	**2p**
b)	$A(x)+A(1-x)=\begin{pmatrix} x & 0 & 2x-1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2x-1 & 0 & x \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1-x & 0 & 1-2x \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1-2x & 0 & 1-x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$	**3p**
	$=2\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}=2A\left(\frac{1}{2}\right)$, pentru orice număr real x	**2p**

c)	$\begin{pmatrix} -5x^2+5x-1 & 0 & -4x^2+4x-1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ -4x^2+4x-1 & 0 & -5x^2+5x-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$	**3p**
	$x=\frac{1}{2}$	**2p**
2.a)	$x\circ y=\left(xy+\hat{3}x\right)+\left(\hat{3}y+\hat{9}\right)=$	**2p**
	$=x\left(y+\hat{3}\right)+\hat{3}\left(y+\hat{3}\right)=\left(x+\hat{3}\right)\left(y+\hat{3}\right)$, pentru orice $x,y\in\mathbb{Z}_{20}$	**3p**
b)	$\left(a+\hat{3}\right)\left(x+\hat{3}\right)=\hat{0}$, pentru orice $x\in\mathbb{Z}_{20}$	**2p**
	$a+\hat{3}=\hat{0}\Rightarrow a=\widehat{17}$	**3p**
c)	$\left(a+\hat{3}\right)\left(b+\hat{3}\right)=\hat{0}$	**2p**
	De exemplu, pentru $a=\hat{1}$ și $b=\hat{2}$, obținem $a+\hat{3}=\hat{4}$ și $b+\hat{3}=\hat{5}$, deci $a\circ b=\hat{0}$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=4x-\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=\frac{7}{2}$	**3p**
b)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{4}$	**1p**
	$f'(x)\le0$, pentru orice $x\in\left(0,\frac{1}{4}\right]$, deci f este descrescătoare pe $\left(0,\frac{1}{4}\right]$ și $f'(x)\ge0$, pentru orice $x\in\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$, deci f este crescătoare pe $\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$	**2p**
	f continuă pe $(0,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, $f(x)\ge f\left(\frac{1}{4}\right)$ și, cum $f\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{3}{8}$, obținem $\text{Im}\,f=\left[-\frac{3}{8},+\infty\right)$	**2p**
c)	$e^x>0$, deci $f\left(e^x\right)\ge-\frac{3}{8}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$	**3p**
	$2\left(e^x\right)^2-\sqrt{e^x}\ge-\frac{3}{8}$, deci $2e^{2x}-e^{\frac{x}{2}}+\frac{3}{8}\ge0$, pentru orice număr real x	**2p**
2.a)	$\int_0^1 f(\text{tg}\,x)\,dx=\int_0^1\text{arctg}(\text{tg}\,x)\,dx=\int_0^1 x\,dx=$	**3p**
	$=\frac{x^2}{2}\Big\vert_0^1=\frac{1}{2}$	**2p**
b)	$\int_0^1\frac{\text{arctg}\,x}{x^2+1}dx=\int_0^1(\text{arctg}\,x)'\text{arctg}\,x\,dx=\frac{1}{2}\text{arctg}^2\,x\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=\frac{1}{2}\text{arctg}^2\,1=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{4}\right)^2=\frac{\pi^2}{32}$	**2p**

c)	$(n+1)\int_0^1 x^n f(x)\,dx = \int_0^1 \left(x^{n+1}\right)' \operatorname{arctg} x\,dx = x^{n+1}\operatorname{arctg} x\Big\|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x^2+1}dx$	**2p**
	$x\in[0,1] \Rightarrow \frac{1}{2} \le \frac{1}{x^2+1} \le 1 \Rightarrow \frac{1}{2}\int_0^1 x^{n+1}dx \le \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x^2+1}dx \le \int_0^1 x^{n+1}dx$ și, cum $\int_0^1 x^{n+1}dx = \frac{1}{n+2}$, obținem $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n+2} \le (n+1)\int_0^1 x^n f(x)\,dx \le \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2(n+2)}$, pentru orice număr natural nenul n	**3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2018
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Clasa a XII-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați partea întreagă a numărului real $a=\sqrt[3]{125}+\sqrt{5}$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+m$, unde m este număr real. Determinați numărul real m, știind că $(f\circ f)(x)=f(x+1)$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale inecuaţia $\left(\frac{2}{3}\right)^{4x+1}\le\left(\frac{2}{3}\right)^{3x+5}$.

5p **4.** Determinați numărul de submulțimi cu cel puțin trei elemente ale mulțimii $A=\{0,1,2,\ldots,9\}$.

5p **5.** Se consideră triunghiul MNP cu $MN=6$, $MP=8$ și $m(\sphericalangle M)=90^\circ$. Calculați lungimea vectorului $\vec{u}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}$.

5p **6.** Determinaţi numărul real x, știind că $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x+2=0$ și $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x & 0 & 2x-1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2x-1 & 0 & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Determinați numerele reale x pentru care $\det(A(x))=0$.

5p **b)** Demonstrați că $A(x)+A(1-x)=2A\left(\frac{1}{2}\right)$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $A(x)\cdot A(1-x)=\frac{1}{2}A\left(\frac{1}{2}\right)$.

2. Pe mulţimea $\mathbb{Z}_{20}=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\ldots,\widehat{19}\}$ se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=xy+\hat{3}x+\hat{3}y+\hat{9}$.

5p **a)** Demonstrați că $x\circ y=\left(x+\hat{3}\right)\left(y+\hat{3}\right)$, pentru orice $x,y\in\mathbb{Z}_{20}$.

5p **b)** Determinați $a\in\mathbb{Z}_{20}$, știind că $a\circ x=\hat{0}$ pentru orice $x\in\mathbb{Z}_{20}$.

5p **c)** Dați exemplu de $a,b\in\mathbb{Z}_{20}\setminus\{\widehat{17}\}$ pentru care $a\circ b=\hat{0}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2-\sqrt{x}$.

5p **a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-1}{x-1}=\frac{7}{2}$.

5p **b)** Determinați imaginea funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $2e^{2x}-e^{\frac{x}{2}}+\frac{3}{8}\ge0$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg} x$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^1 f(\operatorname{tg} x)\,dx=\frac{1}{2}$.

5p **b)** Calculaţi $\int_0^1 \frac{f(x)}{x^2+1}dx$.

5p **c)** Demonstraţi că $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n+2}\le(n+1)\int_0^1 x^n f(x)\,dx\le\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2(n+2)}$, pentru orice număr natural nenul n.

Examenul de bacalaureat naţional 2019
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Clasa a XII-a

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z=6-3i+4i-2i^2-4-4i=4-3i$	**3p**
	$\lvert z\rvert=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$	**2p**
2.	$\Delta=(2m+1)^2-4m(m-1)=8m+1$	**2p**
	$\Delta\le 0$, deci $m\in\left(-\infty,-\frac{1}{8}\right]$	**3p**
3.	$2\log_2 x-\frac{1}{\log_2 x}=1\Rightarrow(2\log_2 x+1)(\log_2 x-1)=0$	**3p**
	$x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ sau $x=2$, care convin	**2p**
4.	Numărul de submulțimi cu cel mult două elemente ale mulțimii A este $C_n^0+C_n^1+C_n^2$, unde n este numărul de elemente ale mulțimii A	**3p**
	$1+n+\frac{n(n-1)}{2}=16$ și, cum n este număr natural, obținem $n=5$	**2p**
5.	M mijlocul laturii $BC\Rightarrow\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{MN}$	**2p**
	N mijlocul segmentului AM, deci $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{NA}$, deci $2\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{AN}+2\overrightarrow{NA}=\vec{0}$	**3p**
6.	$1+3\cos x=2\cos^2 x-1\Leftrightarrow 2\cos^2 x-3\cos x-2=0\Leftrightarrow(\cos x-2)(2\cos x+1)=0$	**3p**
	$\cos x=-\frac{1}{2}$ și, cum $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, obținem $x=\frac{2\pi}{3}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&a\\2&a&4\end{vmatrix}=8+a+2a-4-a^2-4=$	**3p**
	$=-a^2+3a=a(3-a)$, pentru orice număr real a	**2p**
b)	$\det(A(0))=0$ și un minor principal este $\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}\neq 0$	**2p**
	Minor caracteristic este $\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&2\\2&0&3\end{vmatrix}=3\neq 0$, deci sistemul de ecuații este incompatibil	**3p**

c)	Sistemul are soluție unică $(x_0, y_0, z_0) \Rightarrow a \in \mathbb{Z} \setminus \{0,3\}$ și soluția sistemului este $\left(1-\frac{2}{a}, \frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right)$	**3p**
	x_0, y_0 și z_0 sunt numere întregi, deci $\frac{1}{a}$ este număr întreg și, cum și a este număr întreg, obținem $a=-1$ sau $a=1$, care convin	**2p**
2.a)	$x \circ y = \sqrt{x^2y^2+x^2+y^2+1-1} =$	**2p**
	$= \sqrt{x^2\left(y^2+1\right)+\left(y^2+1\right)-1} = \sqrt{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)-1}$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
b)	$\sqrt{\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)-1}=1 \Leftrightarrow \left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)=2$	**2p**
	Cum a și b sunt numere naturale, obținem $a=1$, $b=0$ sau $a=0$, $b=1$	**3p**
c)	$\underbrace{1 \circ 1 \circ \ldots \circ 1}_{1 \text{ de } n \text{ ori}} = \sqrt{2^n-1}$, pentru orice număr natural n, $n \geq 2$	**2p**
	Dacă $\sqrt{2^n-1} \in \mathbb{N}$, există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $2^n-1=k^2 \Rightarrow k$ impar, deci există $m \in \mathbb{N}$ astfel încât $2^n-1=(2m+1)^2$, de unde obținem $2^{n-1}=2m^2+2m+1$, ceea ce este imposibil, pentru orice număr natural n, $n \geq 2$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+2}} - 1 =$	**3p**
	$= \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} - 1 = \frac{x+1-\sqrt{x^2+2x+2}}{\sqrt{x^2+2x+2}}$, $x \in \mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x\left(-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}-1+\frac{1}{x}\right)}{x} = -2$	**2p**
	$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x)+2x\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+2x+2}+x+1\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}-x-1} = 0$, deci dreapta de ecuație $y=-2x$ este asimptotă oblică spre $-\infty$ la graficul funcției f	**3p**
c)	$\sqrt{x^2+2x+2} > x+1 \Rightarrow f'(x) < 0$, pentru orice număr real x, deci funcția f este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$	**2p**
	f continuă pe $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$, deci $\text{Im } f = (2, +\infty)$	**3p**
2.a)	$\int_1^2 \frac{(3x-2)f(x)}{\ln(x+1)}dx = \int_1^2 \left(3x^2-2x\right)dx = \left(x^3-x^2\right)\Big\|_1^2 =$	**3p**
	$= 8-4-1+1 = 4$	**2p**
b)	$\int_0^1 x\ln(x+1)dx = \int_0^1 \left(\frac{x^2-1}{2}\right)'\ln(x+1)dx = \frac{x^2-1}{2}\ln(x+1)\Big\|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 (x-1)dx =$	**3p**
	$= -\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Big\|_0^1 = \frac{1}{4}$	**2p**
c)	$\lim\limits_{t \to 0} \frac{1}{t^3}\int_0^t f(x)dx = \lim\limits_{t \to 0} \frac{f(t)}{3t^2} =$	**3p**
	$= \lim\limits_{t \to 0} \frac{\ln(t+1)}{3t} = \frac{1}{3}$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Clasa a XII-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Calculați modulul numărului complex $z=(2-i)(3+2i)-4(1+i)$.
5p	**2.** Determinați valorile reale ale lui m pentru care $x^2-(2m+1)x+m(m-1)\geq 0$, pentru orice număr real x.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2\log_2 x-\log_x 2=1$.
5p	**4.** Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi A, știind că mulțimea A are exact 16 submulțimi cu cel mult două elemente.
5p	**5.** Se consideră triunghiul ABC, punctul M mijlocul laturii BC și punctul N mijlocul segmentului AM. Demonstrați că $2\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CN}=\vec{0}$.
5p	**6.** Determinați $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, știind că $1+3\cos x=\cos 2x$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & a\\ 2 & a & 4\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+y+z=1\\ x+2y+az=2\\ 2x+ay+4z=3\end{cases}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(a))=a(3-a)$, pentru orice număr real a.
5p	**b)** Pentru $a=0$, demonstrați că sistemul de ecuații este incompatibil.
5p	**c)** Determinați numerele întregi a pentru care sistemul de ecuații are soluție unică (x_0,y_0,z_0) și x_0, y_0 și z_0 sunt numere întregi.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=\sqrt{x^2y^2+x^2+y^2}$.
5p	**a)** Demonstrați că $x\circ y=\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)-1}$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**b)** Determinați perechile de numere naturale a și b, știind că $a\circ b=1$.
5p	**c)** Demonstrați că pentru orice număr natural n, $n\geq 2$, numărul $\underbrace{1\circ 1\circ\ldots\circ 1}_{1 \text{ de } n \text{ ori}}$ **nu** este natural.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+2x+2}-x+1$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x+1-\sqrt{x^2+2x+2}}{\sqrt{x^2+2x+2}}$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $-\infty$ la graficul funcției f.
5p	**c)** Determinați imaginea funcției f.

2. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln(x+1)$.

5p **a)** Calculaţi $\int_1^2 \frac{(3x-2)f(x)}{\ln(x+1)}dx$.

5p **b)** Arătaţi că $\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{4}$.

5p **c)** Calculaţi $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t^3}\int_0^t f(x)dx$.

Examenul de bacalaureat naţional 2014
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Simulare pentru elevii clasei a XII-a
Barem de evaluare şi de notare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z=1+i-1-i+1+i-1=$ $=i\Rightarrow \overline{z}=-i$	**3p** **2p**
2.	$\Delta=-4$ Valoarea maximă a funcției f este $-\frac{\Delta}{4a}=-1$	**2p** **3p**
3.	$3-x=\sqrt{x^2+3}\Rightarrow 9-6x+x^2=x^2+3$ $x=1$, care verifică ecuația	**3p** **2p**
4.	Sunt 81 de numere naturale de două cifre care au cifrele distincte, deci sunt 81 de cazuri favorabile Sunt 90 de numere naturale de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile $p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{81}{90}=\frac{9}{10}$	**2p** **1p** **2p**
5.	$AC=3,\ BC=2$ şi $m(\sphericalangle C)=90^\circ$ $\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{AC\cdot BC}{2}=3$	**3p** **2p**
6.	$(\sin x+\cos x)^2=1+2\sin x\cos x$ $(\sin x-\cos x)^2=1-2\sin x\cos x\Rightarrow(\sin x+\cos x)^2+(\sin x-\cos x)^2=2$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$D(1,0)=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&1&0\end{vmatrix}=$ $=0$	**2p** **3p**
b)	$D(a,b)=\begin{vmatrix}1&0&0\\1&a-1&b-1\\1&a^2-1&b^2-1\end{vmatrix}=$ $=(a-1)(b-1)\begin{vmatrix}1&0&0\\1&1&1\\1&a+1&b+1\end{vmatrix}=(a-1)(b-1)(b-a)$, pentru orice numere reale a şi b	**2p** **3p**
c)	$D(m,n)=(m-1)(n-1)(n-m)$ m şi n au aceeaşi paritate $\Rightarrow n-m$ este număr par, deci $D(m,n)$ este par m şi n au parităţi diferite $\Rightarrow m-1$ şi $n-1$ au parităţi diferite $\Rightarrow (m-1)(n-1)$ este număr par, deci $D(a,b)$ este par	**1p** **2p** **2p**
2.a)	$\hat{3}x=\hat{3}$ $x_1=\hat{1},\ x_2=\hat{3},\ x_3=\hat{5}$	**2p** **3p**

b)	$\hat{0}^3=\hat{0},\ \hat{1}^3=\hat{1},\ \hat{2}^3=\hat{2},\ \hat{3}^3=\hat{3},\ \hat{4}^3=\hat{4},\ \hat{5}^3=\hat{5}$	**3p**
	Deci $\text{Im } f=\{\hat{0}\}$	**2p**
c)	$x^3=x\Rightarrow x^{10}=x^2$, pentru orice $x\in\mathbb{Z}_6$	**2p**
	$H=\{x^2 \mid x\in\mathbb{Z}_6\}=\{\hat{0},\hat{1},\hat{3},\hat{4}\}$, deci mulţimea H are 4 elemente	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x},\ x\in(0,+\infty)$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=\frac{1}{4}$	**3p**
b)	$f(1)=1,\ f'(1)=0$	**2p**
	Ecuaţia tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Rightarrow y=1$	**3p**
c)	$x\in(0,1]\Rightarrow f'(x)\le 0$, deci f este descrescătoare pe $(0,1]$	**2p**
	$x\in[1,+\infty)\Rightarrow f'(x)\ge 0$, deci f este crescătoare pe $[1,+\infty)$	**2p**
	$f(x)\ge f(1)\Rightarrow f(x)\ge 1$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**1p**
2.a)	$\int_0^1(x+1)f(x)dx=\int_0^1 x^2dx=$	**2p**
	$=\frac{x^3}{3}\Big\vert_0^1=\frac{1}{3}$	**3p**
b)	$\int_1^e(x+1)f(x)\ln x\,dx=\int_1^e x^2\ln x\,dx=$	**2p**
	$=\left(\frac{x^3}{3}\cdot\ln x\right)\Big\vert_1^e-\int_1^e\frac{x^2}{3}dx=\frac{2e^3+1}{9}$	**3p**
c)	$\int\frac{x^2}{x+1}dx=\int\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx=\frac{x^2}{2}-x+\ln(x+1)+\mathcal{C}\Rightarrow F(x)=\frac{x^2}{2}-x+\ln(x+1)+c$	**3p**
	$F(0)=1\Rightarrow c=1$	**1p**
	$F(e-1)=\frac{e^2-4e+7}{2}$	**1p**

Examenul de bacalaureat naţional 2014
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Simulare pentru elevii clasei a XII-a

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați conjugatul numărului complex $z=1+i+i^2+i^3+i^4+i^5+i^6$.

5p **2.** Determinați valoarea maximă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x^2+4x-5$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3-\sqrt{x^2+3}=x$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele distincte.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3)$, $B(4,0)$ și $C(2,0)$. Determinaţi aria triunghiului ABC.

5p **6.** Arătați că $(\sin x+\cos x)^2+(\sin x-\cos x)^2=2$ pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră determinantul $D(a,b)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a & b\\ 1 & a^2 & b^2\end{vmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.

5p **a)** Calculați $D(1,0)$.

5p **b)** Arătați că $D(a,b)=(a-1)(b-1)(b-a)$ pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Demonstraţi că numărul $D(m,n)$ este par pentru orice numere întregi m și n.

2. Se consideră inelul $(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$, unde $\mathbb{Z}_6=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4},\hat{5}\}$.

5p **a)** Rezolvaţi în $\mathbb{Z}_6$ ecuația $\hat{3}x+\hat{2}=\hat{5}$.

5p **b)** Determinați mulțimea valorilor funcției $f:\mathbb{Z}_6\to\mathbb{Z}_6$, $f(x)=x^3-x$.

5p **c)** Determinaţi numărul elementelor mulţimii $H=\{x^{10}\mid x\in\mathbb{Z}_6\}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}+\ln x$.

5p **a)** Calculați $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstraţi că $f(x)\geq 1$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$.

5p **a)** Calculaţi $\int_0^1(x+1)f(x)dx$.

5p **b)** Calculaţi $\int_1^e(x+1)f(x)\ln x\,dx$.

5p **c)** Arătați că $F(e-1)=\frac{e^2-4e+7}{2}$, unde $F:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ este primitiva funcției f pentru care $F(0)=1$.

Examenul de bacalaureat naţional 2015
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Clasa a XII-a
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$-2+0,75=$ $=-1,25$	**3p** **2p**
2.	Punctele de intersecție cu axele de coordonate sunt $A(3,0)$ și, respectiv, $B(0,4)$ Distanța AB este egală cu 5	**2p** **3p**
3.	$\left(3^{-1}\right)^{2x+10}=3^4 \Leftrightarrow -2x-10=4$ $x=-7$	**3p** **2p**
4.	$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^n=2^n$ $2^n=64 \Leftrightarrow n=6$	**3p** **2p**
5.	$MN=4$ $NP=4 \Rightarrow \Delta MNP$ este isoscel	**2p** **3p**
6.	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=24$ $p=12$, deci $r=2$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det\left(A(2,0)\right)=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{vmatrix}=$ $=8$	**3p** **2p**
b)	$A(x,a)+A(x,-a)=\begin{pmatrix}x&a&a\\-a&x&a\\-a&-a&x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x&-a&-a\\a&x&-a\\a&a&x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x&0&0\\0&2x&0\\0&0&2x\end{pmatrix}=$ $=2x\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=2xA(1,0)$, pentru orice numere reale x și a	**2p** **3p**
c)	$\det\left(A(x,-3)\right)=\begin{vmatrix}x&-3&-3\\3&x&-3\\3&3&x\end{vmatrix}=x^3+27x$ $x\left(x^2+27\right)=0 \Leftrightarrow x=0$	**3p** **2p**
2.a)	$x\circ y=3xy+3x+3y+3-1=$ $=3x(y+1)+3(y+1)-1=3(x+1)(y+1)-1$, pentru orice numere reale x și y	**2p** **3p**
b)	$a\circ b=2 \Leftrightarrow (a+1)(b+1)=1$ Cum a și b sunt numere întregi, obţinem $a=-2, b=-2$ sau $a=0, b=0$	**2p** **3p**

c)	$(-1)\circ x=-1$, unde x este număr real	**2p**
	$(-1)\circ 0\circ 1\circ ...\circ 2015=(-1)\circ(0\circ 1\circ ...\circ 2015)=-1$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=e^x+xe^x-e^x=$	**3p**
	$=xe^x,\ x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x}{e^{-x}}-e^x+1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{e^{-x}}+1=1$	**3p**
	Dreapta $y=1$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$	**1p**
	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(-\infty,0]$, deci f este descrescătoare pe $(-\infty,0]$	**2p**
	$f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$, deci f este crescătoare pe $[0,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_0^1\left(4x^3+3x^2+2x+1\right)dx=\left(x^4+x^3+x^2+x\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=4$	**2p**
b)	$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=x^4+x^3+x^2+x+c$, unde $c\in\mathbb{R}$	**2p**
	$F(-1)=1\Rightarrow c=1$, deci $F(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$	**3p**
c)	$\int_0^a f(x)dx+\dfrac{1}{a}\int_a^0 f(x)dx=\int_0^a\left(4x^3+3x^2+2x+1\right)dx+\dfrac{1}{a}\int_a^0\left(4x^3+3x^2+2x+1\right)dx=$	**2p**
	$=\left(a^4+a^3+a^2+a\right)-\dfrac{1}{a}\left(a^4+a^3+a^2+a\right)=a^4-1$, pentru orice număr real nenul a	**3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2015
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Clasa a XII-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați numărul real care are partea întreagă -2 și partea fracționară $0,75$.

5p **2.** Calculați distanța dintre punctele de intersecție a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-\frac{4}{3}x+4$ cu axa Ox și, respectiv, cu axa Oy.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+10}=81$.

5p **4.** Determinați numărul natural n pentru care $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^n=64$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(-1,1)$, $N(3,1)$ și $P(3,5)$. Arătați că triunghiul MNP este isoscel.

5p **6.** Calculați raza cercului înscris în triunghiul ABC, știind că $AB=6$, $AC=8$ și $BC=10$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x,a)=\begin{pmatrix} x & a & a \\ -a & x & a \\ -a & -a & x \end{pmatrix}$, unde x și a sunt numere reale.

5p **a)** Calculați $\det(A(2,0))$.

5p **b)** Arătați că $A(x,a)+A(x,-a)=2xA(1,0)$, pentru orice numere reale x și a.

5p **c)** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuația $\det(A(x,-3))=0$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=3xy+3x+3y+2$.

5p **a)** Arătați că $x\circ y=3(x+1)(y+1)-1$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numerele întregi a și b, știind că $a\circ b=2$.

5p **c)** Calculaţi $(-1)\circ 0\circ 1\circ\ldots\circ 2015$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x-e^x+1$.

5p **a)** Calculați $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x^3+3x^2+2x+1$.

5p **a)** Calculați $\int_0^1 f(x)\,dx$.

5p **b)** Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(-1)=1$.

5p **c)** Arătați că pentru orice număr real nenul a are loc relația $\int_0^a f(x)\,dx+\frac{1}{a}\int_a^0 f(x)\,dx=a^4-1$.

Examenul de bacalaureat naţional 2016
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Clasa a XII-a
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2(a_1+9r)=a_1+4r+a_1+5r+36 \Leftrightarrow 9r=36$	**3p**
	$r=4$	**2p**
2.	$x^2+3x-1=x-1 \Leftrightarrow x^2+2x=0$	**3p**
	$x=-2$ sau $x=0$	**2p**
3.	$\log_2 \dfrac{(x-1)(x^2-1)}{x+1}=4 \Rightarrow (x-1)^2=16$	**3p**
	$x=-3$ sau $x=5$, care verifică ecuația	**2p**
4.	Sunt 90 de numere naturale de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 9 numere cu cifra unităților zero, 4 numere cu cifra zecilor cinci și cifra unităților număr par nenul și 4 numere cu cifra unităților cinci și cifra zecilor număr par, deci sunt 17 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{17}{90}$	**2p**
5.	$A(1,1),\ B(1,4) \Rightarrow AB \parallel Oy$ și $A(1,1),\ C(5,1) \Rightarrow AC \parallel Ox$, deci ΔABC este dreptunghic în A	**2p**
	Centrul cercului circumscris ΔABC este mijlocul laturii BC și are coordonatele $\left(3,\dfrac{5}{2}\right)$	**3p**
6.	$1+\cos 2x=2\cos^2 x$	**2p**
	$1-\cos 2x=2\sin^2 x \Rightarrow \dfrac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}=\dfrac{2\cos^2 x}{2\sin^2 x}=\text{ctg}^2 x$, pentru orice $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$M(0)=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&1\\0&-1&1\end{pmatrix} \Rightarrow \det(M(0))=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&1\\0&-1&1\end{vmatrix}=3+(-2)+0-0-(-1)-2=$	**3p**
	$=0$	**2p**
b)	$2M(x)-M(-x)=\begin{pmatrix}2&2&2\\4&6&2\\2x&4x-2&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&1\\-x&-2x-1&1\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&1\\3x&6x-1&1\end{pmatrix}=M(3x)$, pentru orice număr real x	**2p**

c)	$\Delta=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ n & 2n-1 & 1\\ n^2 & 2n^2-1 & 1\end{vmatrix}=n(n-1)$, deci $\mathcal{A}_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}\lvert\Delta\rvert=\frac{n(n-1)}{2}$	**3p**
	Cum pentru orice număr natural n, $n\geq 2$, numerele $n-1$ şi n sunt consecutive, produsul lor este număr par, deci $\mathcal{A}_{\Delta OAB}$ este număr natural	**2p**
2.a)	$1\circ\frac{1}{3}=6\cdot 1\cdot\frac{1}{3}-2\cdot 1-2\cdot\frac{1}{3}+1=$	**2p**
	$=\frac{1}{3}$	**3p**
b)	$x\circ e=6xe-2x-2e+1=6ex-2e-2x+1=e\circ x$, pentru orice număr real x	**2p**
	$x\circ e=x\Leftrightarrow(3x-1)(2e-1)=0$, pentru orice număr real x, deci $e=\frac{1}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziţie „$\circ$”	**3p**
c)	$x\circ\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\circ y=\frac{1}{3}$, pentru x şi y numere reale	**2p**
	$\frac{1}{1008}\circ\frac{2}{1008}\circ\frac{3}{1008}\circ\ldots\circ\frac{2016}{1008}=\left(\frac{1}{1008}\circ\frac{2}{1008}\circ\ldots\circ\frac{335}{1008}\right)\circ\frac{1}{3}\circ\left(\frac{337}{1008}\circ\frac{338}{1008}\circ\ldots\circ\frac{2016}{1008}\right)=\frac{1}{3}$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{1\cdot\left(x^4+3\right)-x\cdot 4x^3}{\left(x^4+3\right)^2}=\frac{3\left(1-x^4\right)}{\left(x^4+3\right)^2}=$	**3p**
	$=-\frac{3\left(x^4-1\right)}{\left(x^4+3\right)^2}=-\frac{3(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)}{\left(x^4+3\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f(0)=0$, $f'(0)=\frac{1}{3}$	**2p**
	Ecuaţia tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)$, adică $y=\frac{1}{3}x$	**3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1$ sau $x=1$	**1p**
	$x\in(-\infty,-1]\Rightarrow f'(x)\leq 0$, deci f descrescătoare pe $(-\infty,-1]$; $x\in[-1,1]\Rightarrow f'(x)\geq 0$, deci f crescătoare pe $[-1,1]$ şi $x\in[1,+\infty)\Rightarrow f'(x)\leq 0$, deci f descrescătoare pe $[1,+\infty)$	**1p**
	Cum $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$, $f(-1)=-\frac{1}{4}$, $f(1)=\frac{1}{4}$ şi $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, obţinem $-\frac{1}{4}\leq f(x)\leq\frac{1}{4}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$	**3p**
2.a)	$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=(x-1)e^x-2x+c$, unde $c\in\mathbb{R}$	**3p**
	$F(1)=0\Rightarrow c=2$, deci $F(x)=(x-1)e^x-2x+2$	**2p**
b)	$\int_0^1\left(x^2e^x-2x\right)dx=x^2e^x\Big\rvert_0^1-\int_0^1 2xe^x dx-x^2\Big\rvert_0^1=$	**3p**
	$=e-3$	**2p**
c)	$\int_1^x f(t)\,dt=F(x)-F(1)=(x-1)\left(e^x-2\right)$	**3p**
	$(x-1)\left(e^x-2\right)=0\Leftrightarrow x=1$ sau $x=\ln 2$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Clasa a XII-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați rația progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $2a_{10} = a_5 + a_6 + 36$.

5p **2.** Determinați abscisele punctelor de intersecţie a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+3x-1$ cu dreapta de ecuație $y=x-1$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuația $\log_2\frac{x-1}{x+1}+\log_2\left(x^2-1\right)=4$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă produsul cifrelor divizibil cu 10.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1)$, $B(1,4)$ și $C(5,1)$. Determinaţi coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC.

5p **6.** Arătați că $\frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}=\operatorname{ctg}^2 x$, pentru orice $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $M(x)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ x & 2x-1 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Calculaţi $\det(M(0))$.

5p **b)** Demonstrați că $2M(x)-M(-x)=M(3x)$, pentru orice număr real x.

5p **c)** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$, $A(n,2n-1)$ şi $B\left(n^2,2n^2-1\right)$, unde n este număr natural, $n\geq 2$. Demonstrați că aria triunghiului OAB este număr natural.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x\circ y=6xy-2x-2y+1$.

5p **a)** Calculați $1\circ\frac{1}{3}$.

5p **b)** Determinaţi elementul neutru al legii de compoziţie „$\circ$”.

5p **c)** Calculați $\frac{1}{1008}\circ\frac{2}{1008}\circ\frac{3}{1008}\circ\ldots\circ\frac{2016}{1008}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{x^4+3}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=-\frac{3(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)}{\left(x^4+3\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $-\frac{1}{4}\leq f(x)\leq\frac{1}{4}$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x-2$.

5p **a)** Determinaţi primitiva F a funcţiei f, pentru care $F(1)=0$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 x\,f(x)\,dx$.

5p **c)** Determinați numerele reale x, știind că $\int_1^x f(t)\,dt=0$.

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Clasa a XII-a
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2(a+ib)+(a-ib)=6+i \Leftrightarrow 3a+ib=6+i$, unde $z=a+ib$ și $a,b\in\mathbb{R}$	**2p**
	$a=2$, $b=1$, deci $z=2+i$	**3p**
2.	$f(1)+f(2)+\ldots+f(10)=(4\cdot1-5)+(4\cdot2-5)+\ldots+(4\cdot10-5)=4(1+2+\ldots+10)-10\cdot5=$	**3p**
	$=220-50=170$	**2p**
3.	$\log_2(x+3)=\log_2 2+\log_2(x+1)\Rightarrow x+3=2(x+1)$	**3p**
	$x=1$, care verifică ecuația	**2p**
4.	Sunt 90 de numere naturale de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 9 numere cu cifrele egale, deci sunt 9 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{9}{90}=\dfrac{1}{10}$	**1p**
5.	$m_{AB}=1\Rightarrow m_d=-1$, unde d este dreapta care trece prin C și este perpendiculară pe AB	**2p**
	Ecuația dreptei d este $y=-x+4$	**3p**
6.	$\dfrac{AB}{\sin C}=\dfrac{BC}{\sin A}\Rightarrow BC=\dfrac{3\sqrt{2}\cdot\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ}=$	**2p**
	$=\dfrac{3\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{1}{2}}=6$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&1\\4&9&1\end{pmatrix}$, $A(0)=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&0\\4&9&0\end{pmatrix}$	**2p**
	$A(1)-A(0)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$	**3p**
b)	$\det(A(x))=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&x\\4&9&x^2\end{vmatrix}=3x^2+18+4x-12-9x-2x^2=$	**3p**
	$=x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$, pentru orice număr real x	**2p**
c)	$\det(A(x))=x^2-5x+6=\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$	**2p**
	Valoarea minimă se obține pentru $a=\dfrac{5}{2}$	**3p**

2.a)	$x\circ y=4xy-4x-4y+4+1=$	**2p**
	$=4x(y-1)-4(y-1)+1=4(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
b)	$N=4(2016-1)(2017-1)+1=4\cdot 2015\cdot 2016+1=$	**2p**
	$=4\cdot 2015\cdot(2015+1)+1=4\cdot 2015^2+4\cdot 2015+1=(2\cdot 2015+1)^2=4031^2$	**3p**
c)	$a\circ b=13\Leftrightarrow 4(a-1)(b-1)+1=13\Leftrightarrow (a-1)(b-1)=3$	**2p**
	Cum a și b sunt numere naturale, obținem $a=2$, $b=4$ sau $a=4$, $b=2$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=2x\ln x+x^2\cdot\dfrac{1}{x}=$	**3p**
	$=2x\ln x+x=x(2\ln x+1)$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$f(1)=0$, $f'(1)=1$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)$, adică $y=x-1$	**3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$	**1p**
	$x\in\left(0,\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right]\Rightarrow f'(x)\le 0$, deci f descrescătoare pe $\left(0,\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right]$	**1p**
	$x\in\left[\dfrac{1}{\sqrt{e}},+\infty\right)\Rightarrow f'(x)\ge 0$, deci f crescătoare pe $\left[\dfrac{1}{\sqrt{e}},+\infty\right)$	**1p**
	Cum $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)=-\dfrac{1}{2e}$, obținem $f(x)\ge-\dfrac{1}{2e}\Leftrightarrow 1+2ef(x)\ge 0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_0^1 f(x)e^{-x}\,dx=\int_0^1(x-1)e^xe^{-x}dx=\int_0^1(x-1)\,dx=\left(\dfrac{x^2}{2}-x\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{2}-1=-\dfrac{1}{2}$	**2p**
b)	$F'(x)=(x+a+1)e^x$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
	$F'(x)=f(x)\Rightarrow(x+a+1)e^x=(x-1)e^x$ pentru orice număr real x, de unde obținem $a=-2$	**3p**
c)	$x^3f(x)=(x^4-x^3)e^x$ și, cum $x\in[0,1]\Rightarrow 1\le e^x$ și $x^4-x^3\le 0$, obținem $x^3f(x)\le x^4-x^3$	**3p**
	$\int_0^1 x^3f(x)\,dx\le\int_0^1(x^4-x^3)\,dx=\left(\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{x^4}{4}\right)\Big\vert_0^1=-\dfrac{1}{20}$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Clasa a XII-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați numărul complex z, știind că $2z+\overline{z}=6+i$, unde $\overline{z}$ este conjugatul lui z.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x-5$. Calculați $f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(10)$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuația $\log_2(x+3)=1+\log_2(x+1)$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele egale.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1)$ și $B(5,5)$. Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul $C(-2,6)$ și este perpendiculară pe dreapta AB.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB=3\sqrt{2}$, $m(\measuredangle ACB)=30^\circ$ și $m(\measuredangle BAC)=45^\circ$. Determinați lungimea laturii BC.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & x\\ 4 & 9 & x^2\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Calculați $A(1)-A(0)$.

5p **b)** Arătați că $\det(A(x))=(x-2)(x-3)$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $\det(A(a))\le\det(A(x))$, pentru orice număr real x.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=4xy-4x-4y+5$.

5p **a)** Arătați că $x\circ y=4(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Arătați că $N=2016\circ 2017$ este pătratul unui număr natural.

5p **c)** Determinați numerele naturale a și b pentru care $a\circ b=13$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=x(2\ln x+1)$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $1+2ef(x)\ge 0$, pentru orice număr real x, $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)e^x$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 f(x)e^{-x}\,dx=-\frac{1}{2}$.

5p **b)** Determinați numărul real a, știind că funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=(x+a)e^x$ este o primitivă a funcției f.

5p **c)** Arătați că $\int_0^1 x^3 f(x)\,dx\le-\frac{1}{20}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2018
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Clasa a XII-a
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z=3+4i$ $\overline{z}=3-4i$	**3p** **2p**
2.	Cum n este număr natural, $(n+4)(n-3)<0\Rightarrow n<3$ $n=0$, $n=1$ sau $n=2$	**2p** **3p**
3.	$\lg(x+1)=\lg(x-5)^2\Rightarrow x+1=(x-5)^2$ $x^2-11x+24=0\Rightarrow x=3$, care nu verifică ecuația și $x=8$, care verifică ecuația	**2p** **3p**
4.	O mulțime cu n elemente are C_n^2 submulțimi cu două elemente $\frac{n(n-1)}{2}=45\Rightarrow n=10$	**2p** **3p**
5.	$\vec{v}=2\overrightarrow{AC}$, deci $AC=10$ Cum $ABCD$ este dreptunghi, obținem $BD=10$	**3p** **2p**
6.	$(\sin x+\cos x)^2=2\Rightarrow \sin x\cos x=\frac{1}{2}$ $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2)=\begin{pmatrix}1&0&4\\-4&1&-8\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(2))=\begin{vmatrix}1&0&4\\-4&1&-8\\0&0&1\end{vmatrix}=$ $=1+0+0-0-0-0=1$	**2p** **3p**
b)	$\det(A(a)+aA(0))=\begin{vmatrix}a+1&0&2a\\-2a&a+1&-2a^2\\0&0&a+1\end{vmatrix}=(a+1)^3$ $(a+1)^3=2^3\Rightarrow a=1$	**3p** **2p**
c)	$(m+n)^3=m^3+n^3+18$ $mn(m+n)=6$ deci, cum m și n sunt numere naturale și $m<n$, obținem $m=1$ și $n=2$	**2p** **3p**
2.a)	$x*y=(xy+\hat{6}x)+(\hat{6}y+\hat{1})+\hat{1}=$ $=x(y+\hat{6})+\hat{6}(y+\hat{6})+\hat{1}=(x+\hat{6})(y+\hat{6})+\hat{1}$, pentru orice $x,y\in\mathbb{Z}_7$	**3p** **2p**
b)	$x*\hat{1}=(x+\hat{6})(\hat{1}+\hat{6})+\hat{1}=\hat{0}+\hat{1}=\hat{1}$ $\hat{1}*x=(\hat{1}+\hat{6})(x+\hat{6})+\hat{1}=\hat{0}+\hat{1}=\hat{1}=x*\hat{1}$, pentru orice $x\in\mathbb{Z}_7$	**2p** **3p**

c)	$\hat{0}*\hat{1}*\hat{2}*\hat{3}*\hat{4}*\hat{5}*\hat{6}=\left(\hat{0}*\hat{1}\right)*\hat{2}*\hat{3}*\hat{4}*\hat{5}*\hat{6}=$	**3p**
	$=\hat{1}*\left(\hat{2}*\hat{3}*\hat{4}*\hat{5}*\hat{6}\right)=\hat{1}$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(e^x\right)'\left(x^2-6x+9\right)+e^x\left(x^2-6x+9\right)'=$	**2p**
	$=e^x\left(x^2-6x+9+2x-6\right)=e^x\left(x^2-4x+3\right),\ x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$ şi $x=3$	**2p**
	$f'(x)>0$ pentru orice $x\in(-\infty,1)$, $f'(x)<0$ pentru orice $x\in(1,3)$ şi $f'(x)>0$ pentru orice $x\in(3,+\infty)$, deci punctele de extrem ale funcţiei f sunt $x=1$ şi $x=3$	**3p**
c)	f este crescătoare pe $x\in(-\infty,1]$ şi descrescătoare pe $x\in[1,3]$, deci $f(x)\le f(1)$ pentru orice $x\in(-\infty,3]$	**3p**
	$f(1)=4e$, deci $f(x)\le 4e\Leftrightarrow e^x(x-3)^2\le 4e\Leftrightarrow(x-3)^2\le 4e^{1-x}$, pentru orice $x\in(-\infty,3]$	**2p**
2.a)	$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\left(3x^2-4x+1\right)=0$, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}=0$ şi, cum $f(1)=0$, obţinem $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$, deci funcţia f este continuă în $x=1$	**3p**
	Cum funcţia f este continuă pe $(-\infty,1)$ şi pe $(1,+\infty)$, obţinem că f este continuă pe $\mathbb{R}$, deci funcţia f admite primitive pe $\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\int_{-1}^{e}f(x)\,dx=\int_{-1}^{1}f(x)\,dx+\int_{1}^{e}f(x)\,dx=\int_{-1}^{1}\left(3x^2-4x+1\right)dx+\int_{1}^{e}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx=$	**2p**
	$=\left(x^3-2x^2+x\right)\Big\vert_{-1}^{1}+\left(2\sqrt{x}\ln x-4\sqrt{x}\right)\Big\vert_{1}^{e}=4-2\sqrt{e}+4=2\left(4-\sqrt{e}\right)$	**3p**
c)	$\int_{e^n}^{e^{n+1}}f^2(x)\,dx=\int_{e^n}^{e^{n+1}}\dfrac{\ln^2 x}{x}\,dx=\dfrac{\ln^3 x}{3}\Big\vert_{e^n}^{e^{n+1}}=\dfrac{3n^2+3n+1}{3}$	**3p**
	$\dfrac{3n^2+3n+1}{3}=\dfrac{7}{3}$ şi, cum n este număr natural, obţinem $n=1$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Clasa a XII-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați conjugatul numărului complex $z=(1-i)(2+i)+5i$.

5p **2.** Determinați numerele naturale n pentru care $n^2+n-12<0$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuația $\lg(x+1)=2\lg(x-5)$.

5p **4.** Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi, știind că aceasta are 45 de submulțimi cu două elemente.

5p **5.** Se consideră dreptunghiul $ABCD$ și $\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$. Știind că lungimea vectorului $\vec{v}$ este egală cu 20, determinați lungimea vectorului $\overrightarrow{BD}$.

5p **6.** Arătați că, dacă x este număr real pentru care $\sin x+\cos x=\sqrt{2}$, atunci $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=2$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2x\\ -2x & 1 & -2x^2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Calculați $\det(A(2))$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care $\det(A(a)+aA(0))=8$.

5p **c)** Știind că $\det((m+n)A(x))=\det(mA(x))+\det(nA(x))+18$, pentru orice număr real x, determinați numerele naturale m și n, $m<n$.

2. Pe mulțimea $\mathbb{Z}_7$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=xy+\hat{6}x+\hat{6}y+\hat{2}$.

5p **a)** Demonstrați că $x*y=\left(x+\hat{6}\right)\left(y+\hat{6}\right)+\hat{1}$, pentru orice $x,\ y\in\mathbb{Z}_7$.

5p **b)** Demonstrați că $x*\hat{1}=\hat{1}*x=\hat{1}$, pentru orice $x\in\mathbb{Z}_7$.

5p **c)** Calculați $\hat{0}*\hat{1}*\hat{2}*\hat{3}*\hat{4}*\hat{5}*\hat{6}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\left(x^2-6x+9\right)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=e^x\left(x^2-4x+3\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați punctele de extrem ale funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $(x-3)^2\le 4e^{1-x}$, pentru orice $x\in(-\infty,3]$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}3x^2-4x+1, & x\in(-\infty,1)\\ \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}, & x\in[1,+\infty)\end{cases}$.

5p **a)** Demonstrați că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că $\int_{-1}^{e} f(x)\,dx=2\left(4-\sqrt{e}\right)$.

5p **c)** Determinați numărul natural n pentru care $\int_{e^n}^{e^{n+1}} f^2(x)\,dx=\frac{7}{3}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2019
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Clasa a XII-a

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$3(a+ib)+2(a-ib)=5+2i \Leftrightarrow 5a+ib=5+2i$, unde $z=a+ib$ cu a şi b numere reale	**3p**
	$a=1$ şi $b=2$, deci $z=1+2i$	**2p**
2.	$(f\circ f)(x)=f(x+a)=x+2a$, $(f\circ f\circ f)(x)=x+3a$	**3p**
	$x+3a=x+3$, pentru orice număr real x, deci $a=1$	**2p**
3.	$\log_3\dfrac{2x+3}{x}=1\Rightarrow\dfrac{2x+3}{x}=3$	**3p**
	$2x+3=3x\Rightarrow x=3$, care convine	**2p**
4.	Sunt 900 de numere naturale de trei cifre, deci sunt 900 de cazuri posibile	**1p**
	Sunt 90 de numere naturale de trei cifre care se divid cu 10, deci sunt 90 de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{1}{10}$	**2p**
5.	$\dfrac{a+1}{1}=\dfrac{5a-1}{3}\Leftrightarrow 3a+3=5a-1$	**3p**
	$a=2$	**2p**
6.	$\sin A=\dfrac{4}{5}$	**2p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\dfrac{AB\cdot AC\cdot\sin A}{2}=\dfrac{6\cdot 10\cdot\frac{4}{5}}{2}=24$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$M(-1)=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-1&0\\4&0&5\end{pmatrix}\Rightarrow\det(M(-1))=\begin{vmatrix}0&0&1\\0&-1&0\\4&0&5\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+0+0-(-4)-0-0=4$	**3p**
b)	$M(x)+M(y)=\begin{pmatrix}x+1&0&x+2\\0&x&0\\3-x&0&4-x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y+1&0&y+2\\0&y&0\\3-y&0&4-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y+2&0&x+y+4\\0&x+y&0\\6-x-y&0&8-x-y\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&0&0\\3&0&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}(x+y)+1&0&(x+y)+2\\0&x+y&0\\3-(x+y)&0&4-(x+y)\end{pmatrix}=M(0)+M(x+y)$, pentru orice numere reale x şi y	**2p**

c)	$M(m)\cdot M(1)=\begin{pmatrix}4m+6 & 0 & 6m+9\\ 0 & m & 0\\ 14-4m & 0 & 21-6m\end{pmatrix}$, $M(1)\cdot M(n)=\begin{pmatrix}11-n & 0 & 16-n\\ 0 & n & 0\\ 11-n & 0 & 16-n\end{pmatrix}$, unde m și n sunt numere naturale	**2p**
	$50+m=54-3n\Leftrightarrow m+3n=4$ și, cum m și n sunt numere naturale, obținem $m=1$, $n=1$ sau $m=4$, $n=0$	**3p**
2.a)	$x*y=1-4xy+4x+4y-4=$	**3p**
	$=1-4x(y-1)+4(y-1)=1-4(x-1)(y-1)$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
b)	$x*\frac{1}{x}=1-4(x-1)\left(\frac{1}{x}-1\right)=1-4(x-1)\cdot\frac{1-x}{x}=$	**3p**
	$=1+\frac{4(x-1)^2}{x}\geq 1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p**
c)	$x*x=1-4(x-1)^2$, $x*x*x=1+4^2(x-1)^3$, $x*x*x*x=1-4^3(x-1)^4$, unde x este număr real	**3p**
	$(x-1)\left(1+4^3(x-1)^3\right)=0$, deci $x=\frac{3}{4}$ sau $x=1$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=5\cdot\frac{1}{x}-2x-3=$	**3p**
	$=\frac{-2x^2-3x+5}{x}=\frac{(1-x)(2x+5)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$f''(x)=\frac{-2x^2-5}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
	$f''(x)<0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci funcția f este concavă pe $(0,+\infty)$	**3p**
c)	f este crescătoare pe $(0,1]$ și descrescătoare pe $[1,+\infty)$, deci $f(x)\leq f(1)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**3p**
	$f(1)=-4\Rightarrow 5\ln x-x^2-3x\leq -4$, deci $5\ln x\leq x^2+3x-4$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p**
2.a)	F este o primitivă a funcției $f\Rightarrow F'(x)=f(x)=\left(x^2+4x+5\right)e^x$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
	$f(x)>0\Rightarrow F'(x)>0$, pentru orice număr real x, deci funcția F este crescătoare pe $\mathbb{R}$	**3p**
b)	$\int_0^1\left(\left(x^2+4x+5\right)e^x-x^2e^x-5e^x\right)dx=\int_0^1 4xe^x dx=4(x-1)e^x\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=0-4\cdot(-1)=4$	**2p**
c)	Pentru orice $x\in[-3,-1]$, obținem $1\leq x^2+4x+5\leq 2$, deci $e^x\leq f(x)\leq 2e^x$	**2p**
	$\int_{-3}^{-1}e^x dx\leq\int_{-3}^{-1}f(x)dx\leq 2\int_{-3}^{-1}e^x dx$ și, cum $\int_{-3}^{-1}e^x dx=\frac{e^2-1}{e^3}\Rightarrow\frac{e^2-1}{e^3}\leq\int_{-3}^{-1}f(x)dx\leq\frac{2\left(e^2-1\right)}{e^3}$	**3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2019
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Clasa a XII-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați numărul complex z, știind că $3z+2\overline{z}=5+2i$, unde $\overline{z}$ este conjugatul lui z.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+a$, unde a este număr real. Determinați numărul real a pentru care $(f\circ f\circ f)(x)=x+3$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(2x+3)-\log_3 x=1$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să se dividă cu 10.

5p **5.** Determinați numărul real a pentru care vectorii $\vec{u}=(a+1)\vec{i}+(5a-1)\vec{j}$ și $\vec{v}=\vec{i}+3\vec{j}$ sunt coliniari.

5p **6.** Calculați aria triunghiului ABC, știind că $AB=6$, $AC=10$ și $\cos A=\frac{3}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $M(x)=\begin{pmatrix} x+1 & 0 & x+2 \\ 0 & x & 0 \\ 3-x & 0 & 4-x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Calculați $\det(M(-1))$.

5p **b)** Demonstrați că $M(x)+M(y)=M(0)+M(x+y)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați perechile de numere naturale m și n, știind că suma elementelor matricei $M(m)\cdot M(1)$ este egală cu suma elementelor matricei $M(1)\cdot M(n)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=4x+4y-4xy-3$.

5p **a)** Demonstrați că $x*y=1-4(x-1)(y-1)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Arătați că $x*\frac{1}{x}\geq 1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $x*x*x*x=x$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=5\ln x-x^2-3x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{(1-x)(2x+5)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este concavă pe $(0,+\infty)$.

5p **c)** Demonstrați că $5\ln x\leq x^2+3x-4$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(x^2+4x+5\right)e^x$.

5p **a)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1\left(f(x)-x^2e^x-5e^x\right)dx$.

5p **c)** Demonstrați că $\frac{e^2-1}{e^3}\leq\int_{-3}^{-1}f(x)dx\leq\frac{2\left(e^2-1\right)}{e^3}$.

MODEL PENTRU ADMITEREA ÎN CLASA A V-A

CONCURSUL „ MICII SPIRIŞTI”

SUBIECTUL I. (6x5 puncte=30 de puncte)

La următoarele 6 exerciţii un singur răspuns este corect.

Alegeti răspunsul corect şi scrieţi-l pe foaia de examen împreună cu litera corespunzătoare:

1. Rezultatul calculului $60-30:2\times3+0:5$ este:
a) 5; b) 45; c) 55; d) 15; e) nu se poate cacula.

2. Numărul de 17 ori mai mic decât 34289 este egal cu:
a) 217 b) 2007 c) 317; d) 34272; e) 2017.

3. Într-o tabără s-au întâlnit 27 de elevi şi au făcut schimb de fotografii, fiecare cu fiecare. Numărul de fotografii schimbate este:
a) 27; b) 650; c) 351; d) 54; e) 702.

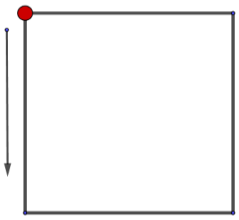
4. Se dă şirul: 1, 4, 7, 10, 13, ..., 2020. Al 30-lea termen din şir este:

a) 91 ; b) 89; c) 88; d) 86; e) 87.

5. Câte foi are o carte, dacă suma numerelor de pe paginile de la mijlocul ei este egală cu 51?

a) 24; b) 25; c) 26; d) 51; e) 50.

6. O buburuză pleacă dintr-un vârf al unui pătrat cu latura de 5cm şi merge 68 de cm pe laturile pătratului în acelaşi sens. Cât trebuie să mai meargă (în acelaşi sens) pentru a ajunge din nou în vârful din care a plecat?



a) 12 cm; b) 60cm; c) 22 cm; d) 42cm; e) 8cm.

SUBIECTUL II. (3x10puncte=30 de puncte)

La următoarele 3 cerinţe scrieţi doar răspunsul:

1. Valoarea numărului a din egalitatea $[164-(15+18:a):3\times2]:2+20=94$ este .....

2. Ana şi Dan împart 144 de bomboane astfel: de câte ori ia Ana 4 bomboane, Dan ia 5 bomboane. Câte bomboane ia Dan la final?.....

3. Dacă împărţim lungimea unui dreptunghi la lăţimea sa obţinem câtul 5 şi restul 3.
Ştiind că diferenţa dintre lungime şi lăţime este egală cu 63 cm, atunci perimetrul dreptunghiului este.....

COLEGIUL NATIONAL "SPIRU HARET", BUCUREŞTI

SUBIECTUL III. (30 puncte)

Scrieţi rezolvările complete pe foaia de concurs:

1. **(10 p)** 4 cărţi şi 5 pixuri costă 60 de lei, iar 12 cărţi şi 7 pixuri costă 148 lei.

   Cât costă o carte şi cât costă un pix?

2. **(10p)** Dacă adun o treime cu jumătate din preţul unui obiect obţin 300 de lei. Aflaţi preţul obiectului.

3. **(10p)** Suma a trei numere este 812. Dacă din primul număr scădem 100, la al doilea număr adunăm 200, iar pe al treilea îl micşorăm cu 300, obţinem trei numere pare consecutive, în ordine crescătoare. Aflaţi numerele iniţiale.

Toate subiectele sunt obligatorii. Punctajul maxim este de 90 de puncte.

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Timp de lucru- 60 minute

COLEGIUL NAŢIONAL "SPIRU HARET", BUCUREŞTI

Examenul de bacalaureat naţional 2014
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Barem de evaluare şi de notare

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z=i$ $\overline{z}=-i$ $a=0,\ b=-1$	**2p** **1p** **2p**
2.	$x_V=-2$ $y_V=-16$	**2p** **3p**
3.	$x^2-4=6x-12\Rightarrow x^2-6x+8=0$ $x_1=2$ nu convine şi $x_2=4$ verifică ecuaţia	**2p** **3p**
4.	Numerele divizibile cu 100 din mulţimea numerelor naturale de trei cifre sunt 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800 şi $900\Rightarrow 9$ cazuri favorabile Numărul numerelor naturale de trei cifre este $900\Rightarrow 900$ de cazuri posibile $p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{1}{100}$	**2p** **1p** **2p**
5.	$\overrightarrow{AC}=6\vec{i}-8\vec{j}\Rightarrow AC=10$ Lungimea vectorului $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AC}$ este egală cu 20	**2p** **3p**
6.	$B=\dfrac{\pi}{6}$ $\dfrac{BC}{\sin A}=\dfrac{AC}{\sin B}\Rightarrow AC=4\sqrt{2}$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(x)+A(-x)=\begin{pmatrix}x&1&2\\2&1&1\\1&0&-x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-x&1&2\\2&1&1\\1&0&x\end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix}0&2&4\\4&2&2\\2&0&0\end{pmatrix}=2A(0)$, pentru orice număr real x	**2p** **3p**
b)	$\det(A(x))=\begin{vmatrix}x&1&2\\2&1&1\\1&0&-x\end{vmatrix}=-x^2+2x-1$ $\det(A(x))=0\Leftrightarrow x=1$	**3p** **2p**
c)	$A(1)=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}$; pentru $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ avem $A(1)\cdot X=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+2z=0\\2x+y+z=0\\x-z=0\end{cases}$ care este sistem omogen Determinantul sistemului este egal cu $0\Rightarrow$ sistemul are o infinitate de soluţii $\Rightarrow$ există o infinitate de matrice X	**3p** **2p**

2.a)	$f(-1)=(-1)^3+m\cdot(-1)^2+m\cdot(-1)+1=$	**2p**
	$=-1+m-m+1=0$	**3p**
b)	$x_1+x_2+x_3=-m$ şi $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=m$	**2p**
	$x_1^2+x_2^2+x_3^2=m^2-2m$	**1p**
	$m^2-2m=-1\Leftrightarrow m=1$	**2p**
c)	$f=(X+1)\left(X^2+(m-1)X+1\right)$	**2p**
	f are toate rădăcinile reale $\Leftrightarrow (m-1)^2-4\geq 0\Leftrightarrow m\in(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+x+1}}\cdot\left(x^2+x+1\right)'=$	**2p**
	$=\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=\dfrac{1}{2}$	**2p**
	Dreapta de ecuaţie $y=x+\dfrac{1}{2}$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcţiei f	**1p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$	**1p**
	$f'(x)\geq 0$ pentru orice $x\in\left[-\dfrac{1}{2},+\infty\right)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $\left[-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$	**2p**
	$f'(x)\leq 0$ pentru orice $x\in\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]$	**2p**
2.a)	$I_1=\int_0^1(1-x)e^x dx=(1-x)e^x\big\|_0^1+\int_0^1 e^x dx=$	**3p**
	$=e-2$	**2p**
b)	$I_{n+1}=\int_0^1(1-x)^{n+1}\left(e^x\right)'dx=(1-x)^{n+1}e^x\big\|_0^1-\int_0^1\left((1-x)^{n+1}\right)'e^x dx=$	**2p**
	$=-1+(n+1)\int_0^1(1-x)^n e^x dx=-1+(n+1)I_n$, pentru orice număr natural nenul n	**3p**
c)	Demonstraţie prin inducţie matematică: $I_1=1!\left(e-1-\dfrac{1}{1!}\right)=e-2$, deci proprietatea este adevărată pentru $n=1$	**1p**
	Presupunem proprietatea adevărată pentru numărul natural nenul k. Avem $I_{k+1}=(k+1)I_k-1=(k+1)k!\left(e-1-\dfrac{1}{1!}-\ldots-\dfrac{1}{k!}\right)-1=(k+1)!\left(e-1-\dfrac{1}{1!}-\ldots-\dfrac{1}{(k+1)!}\right)$, deci proprietatea este adevărată pentru orice număr natural nenul n	**4p**

Examenul de bacalaureat naţional 2014
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinaţi numerele reale a şi b, ştiind că $a+ib$ este conjugatul numărului complex $z=\dfrac{1+i}{1-i}$.

5p **2.** Determinaţi coordonatele vârfului parabolei asociate funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+4x-12$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3\left(x^2-4\right)=\log_3\left(6x-12\right)$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulţimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să fie divizibil cu 100.

5p **5.** Se consideră punctele A, B şi C astfel încât $\overrightarrow{AB}=4\vec{i}-3\vec{j}$ şi $\overrightarrow{BC}=2\vec{i}-5\vec{j}$. Determinaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$.

5p **6.** Calculaţi lungimea laturii AC a triunghiului ABC, ştiind că $BC=8$, $A=\dfrac{\pi}{4}$ şi $C=\dfrac{7\pi}{12}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x & 1 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -x\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătaţi că $A(x)+A(-x)=2A(0)$, pentru orice număr real x.

5p **b)** Determinaţi numărul real x pentru care $\det\left(A(x)\right)=0$.

5p **c)** Arătaţi că există o infinitate de matrice $X\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ care verifică relaţia $A(1)\cdot X=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+mX^2+mX+1$, unde m este un număr real.

5p **a)** Calculaţi $f(-1)$.

5p **b)** Determinaţi numărul real m ştiind că $x_1^2+x_2^2+x_3^2=-1$, unde x_1,x_2,x_3 sunt rădăcinile complexe ale polinomului f.

5p **c)** Determinaţi valorile reale ale lui m pentru care toate rădăcinile polinomului f sunt reale.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$.

5p **a)** Calculaţi $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

5p **c)** Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\displaystyle\int_0^1(1-x)^n e^x\,dx$.

5p **a)** Calculaţi I_1.

5p **b)** Arătaţi că $I_{n+1}=(n+1)I_n-1$, pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Demonstraţi că $I_n=n!\left(e-1-\dfrac{1}{1!}-\ldots-\dfrac{1}{n!}\right)$, pentru orice număr natural nenul n.

Examenul de bacalaureat naţional 2014
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Barem de evaluare şi de notare

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$b_5 = b_2 q^3 \Rightarrow q^3 = 8$ $q = 2$	**3p** **2p**
2.	$f(0) = 7$ $(f \circ f)(0) = f(7) = 70$	**2p** **3p**
3.	$(x-3)^2 = x-1 \Rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0$ $x_1 = 2$ nu verifică ecuaţia şi $x_2 = 5$ verifică ecuaţia	**2p** **3p**
4.	Numerele divizibile cu 11 din mulţimea A sunt 11, 22, 33 şi $44 \Rightarrow 4$ cazuri favorabile Numărul elementelor mulţimii A este $50 \Rightarrow 50$ de cazuri posibile $p = \dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \dfrac{2}{25}$	**2p** **1p** **2p**
5.	$\dfrac{2}{1} = \dfrac{a+1}{2}$ $a = 3$	**3p** **2p**
6.	$\sin x = \dfrac{1}{2}$ $x = \dfrac{\pi}{6}$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$ $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot B = B \cdot A$	**2p** **3p**
b)	$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A+B) = 18$ $\det A + \det B = 4 + 5 = 9 \Rightarrow \det(A+B) > \det A + \det B$	**2p** **3p**
c)	$X^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow a = \pm 1,\ b = \pm 2 \Rightarrow$ sunt 4 matrice X care verifică cerinţele	**2p** **3p**
2.a)	$f = X^3 + X - 2 \Rightarrow f(1) = 1^3 + 1 - 2 =$ $= 2 - 2 = 0$	**3p** **2p**
b)	$(2-x_1)(2-x_2)(2-x_3) = f(2)$ $f(2) = 10 + a \Rightarrow a = -8$	**3p** **2p**

c)	$x_1+x_2+x_3=0,\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=1,\ x_1x_2x_3=-a$	**1p**
	$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=-\frac{1}{a},\ \frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_2}\cdot\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_3}\cdot\frac{1}{x_1}=0,\ \frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}\cdot\frac{1}{x_3}=-\frac{1}{a}$	**3p**
	Un polinom este $g=aX^3+X^2+1$	**1p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(\ln(x+1)\right)'-\left(\ln x\right)'=$	**2p**
	$=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**3p**
b)	$f'(x)=-\frac{1}{x(x+1)}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p**
	$f'(x)<0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)\Rightarrow f$ este descrescătoare	**3p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)-\ln x}{\frac{1}{x}}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=1$	**3p**
2.a)	$\int_0^1(x+2)f(x)dx=\int_0^1 xdx=$	**2p**
	$=\frac{x^2}{2}\Big\vert_0^1=\frac{1}{2}$	**3p**
b)	$f'(x)=\frac{2}{(x+2)^2}\Rightarrow f(x)+(x+2)f'(x)=1$ pentru orice $x\in(-2,+\infty)$	**3p**
	$\int_{2013}^{2014}1\cdot dx=x\Big\vert_{2013}^{2014}=1$	**2p**
c)	$V=\pi\int_1^2 g^2(x)dx=\pi\int_1^2(x+2)^2dx=$	**3p**
	$=\pi\frac{(x+2)^3}{3}\Big\vert_1^2=\frac{37\pi}{3}$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2014
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinaţi raţia progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ cu termeni reali, ştiind că $b_2=1$ şi $b_5=8$.

5p **2.** Calculaţi $(f\circ f)(0)$ pentru funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x+7$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2\log_5(x-3)=\log_5(x-1)$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulţimea $A=\{1,2,3,...,50\}$, acesta să fie număr divizibil cu 11.

5p **5.** Determinaţi numărul real a pentru care vectorii $\vec{v}=2\vec{i}+(a+1)\vec{j}$ şi $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}$ sunt coliniari.

5p **6.** Rezolvaţi în mulţimea $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ecuaţia $2\sin x-1=0$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătaţi că $A\cdot B=B\cdot A$.

5p **b)** Verificaţi dacă $\det(A+B)>\det A+\det B$.

5p **c)** Determinaţi numărul matricelor $X=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$ pentru care $X^2=A$, unde a şi b sunt numere reale.

2. Se consideră x_1, x_2, x_3 rădăcinile complexe ale polinomului $f=X^3+X+a$, unde a este număr real.

5p **a)** Pentru $a=-2$, arătaţi că $f(1)=0$.

5p **b)** Determinaţi numărul real a, ştiind că $(2-x_1)(2-x_2)(2-x_3)=2$.

5p **c)** Pentru $a\neq 0$, determinaţi un polinom de grad trei, având coeficienţii reali, care are rădăcinile $\frac{1}{x_1}$, $\frac{1}{x_2}$ şi $\frac{1}{x_3}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(x+1)-\ln x$.

5p **a)** Calculaţi $f'(x)$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Arătaţi că funcţia f este descrescătoare.

5p **c)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)$.

2. Se consideră funcţia $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{x+2}$.

5p **a)** Calculaţi $\int_0^1 (x+2)f(x)dx$.

5p **b)** Arătaţi că $\int_{2013}^{2014}\left(f(x)+(x+2)f'(x)\right)dx=1$.

5p **c)** Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{x}{f(x)}$.

CONCURS DE SELECȚIE PENTRU CLASA a V-a

MATEMATICĂ

MODEL 1

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii

Timp de lucru: 50 min.

Se acordă 10p din oficiu

Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete

I. **(20p)** Calculați
$1325-9\times[280-3\times(108-96:6)]:12$

II. Cristina are 10 trandafiri și 28 de garoafe.
a) **(15p)** Câte buchete poate să facă Cristina folosind toate florile dacă fiecare buchet conține cel puțin un trandafir, iar în fiecare buchet numărul garoafelor este cu 3 mai mare decât cel al trandafirilor?
b) **(15p)** Care este cel mai mare număr posibil de flori dintr-un astfel de buchet?

III. **(20p)** La un exercițiu, Ioana trebuie să înmulțească numărul 225 cu un număr format din 2 cifre consecutive. Din neatenție, Ioana schimbă ordinea acestor cifre și obține un alt produs. Calculați diferența dintre cele două produse.

IV. Un număr natural nenul n se împarte pe rând la 2, 4, 6, 8, 10, respective 12. Se știe că suma resturilor este 34.
a) **(10p)** Pot avea resturile parități diferite?
b) **(10p)** Demonstrați că două dintre resturi sunt egale.

CONCURS DE SELECȚIE PENTRU CLASA a V-a

MATEMATICĂ

MODEL 2

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii

Timp de lucru: 50 min.

Se acordă 10p din oficiu

Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete

I. **(25p)** Să se afle a din egalitatea:
$1209:\{500-[8\times(5\times a-2)+478]:6\}=3$

II. **(25p)** Am o sumă de bani. Dacă aș mai avea 15 lei, aș avea jumătate din a cincea parte din prețul jocului meu preferat. Știu că mai am nevoie de 528 de lei pentru a cumpăra acest joc. Ce sumă de bani am?

III. **(20p)** De cîte ori se mărește un număr de două cifre dacă la dreapta lui lipim același număr?

IV. **(20p)** Eva deschide o carte (numerotată până la ultima pagină) la mijloc. Adună numărul de pe una din cele două pagini din mijloc cu numărul de pe ultima pagină și obține numărul 409. Câte pagini are cartea?

COLEGIUL NAȚIONAL "ALEXANDRU IOAN CUZA"

GALAȚI

TESTE DE ADMITERE ÎN CLASA a V-a

MATEMATICĂ

Doina MORMENCHE

Cătălina TIRIM

Cristina Elena ANGHEL

2022

Cuprins

Introducere……..…2

Programa de examen pentru disciplina matematică…….……3

Modele de teste de admitere în clasa a V-a

Testul nr. 1.....4

Testul nr. 2.....5

Testul nr. 3.....6

Testul nr. 4.....7

Testul nr. 5.....8

Testul nr. 6.....9

Testul nr. 7.....10

Testul nr. 8.....11

Testul nr. 9 12

Testul nr. 10.....13

Testul nr. 11.....14

Testul nr. 12.....15

Testul nr. 13.....16

Testul nr. 14.....17

Testul nr. 15.....18

Soluții..……...19

Introducere

“Învățând matematică, înveți să gândești.” (Grigore Moisil)

Lucrarea “Teste de admitere în clasa a V-a la disciplina matematică” se adresează elevilor din clasa a IV-a care se pregătesc pentru examenul de admitere în clasa a V-a la Colegiul Național “Alexandru Ioan Cuza”, Galați. Lucrarea conține programa de examen și 15 modele de teste de admitere, elaborate de către profesorii de specialitate din școală.

Un test este alcătuit din patru probleme care evaluează competențele formate/dezvoltate pe parcursul ciclului primar. Fiecare test conține și răspunsurile la probleme, astfel că elevii își pot verifica nivelul de pregătire prin autoevaluare.

Timpul de lucru alocat unui test de matematică este de 60 de minute, iar pentru rezolvarea corectă a celor patru probleme se acordă 50 de puncte.

Punctajul final al testării pentru admiterea în clasa a V-a la Colegiul Național ”Alexandru Ioan Cuza” este egal cu suma punctajelor obținute la cele două discipline, matematică și limba și literatura română, în total maxim 100 de puncte.

Succes!

Autorii

Programa de examen pentru disciplina matematică

- ✓ Materia studiată la matematică în clasele I-IV.
- ✓ Scrierea și citirea numerelor naturale; identificarea caracteristicilor numerelor naturale și formei de scriere a unui număr natural în contexte variate; numere naturale pare și impare; compararea și ordonarea numerelor naturale; șiruri de numere naturale (cu rație constantă), aflarea unui termen precizat al șirului, calculul sumei unor termeni ai șirului de numere naturale.
- ✓ Adunarea numerelor naturale; proprietăți. Scăderea numerelor naturale.
- ✓ Înmulțirea unui număr natural mai mic decât 10 000 cu un număr de trei cifre, cu utilizarea terminologiei specifice. Împărțirea cu rest 0 a unui număr natural când împărțitorul are cel mult două cifre.
- ✓ Împărțirea cu rest a numerelor naturale când împărțitorul are cel mult două cifre.
- ✓ Descompunerea numerelor naturale de cel mult patru cifre: $\overline{ab} = 10 \times a + b$, $\overline{abc} = 100 \times a + 10 \times b + c$ și $\overline{abcd} = 1000 \times a + 100 \times b + 10 \times c + d$
- ✓ Probleme cu numere naturale care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor.
- ✓ Ordinea efectuării operațiilor ; utilizarea parantezelor: rotunde, pătrate, acolade.
- ✓ Metode de rezolvare a problemelor de aritmetică. Metoda figurativă. Metoda comparației. Metoda falsei ipoteze. Metoda mersului invers. Probleme de mișcare.
- ✓ Probleme de numărare. Paginarea unei cărți, numărul de perechi de numere naturale care satisfac o condiție dată, numărul de termeni ai unui șir de numere naturale sau dintr-un calcul ce satisfac o condiție dată.
- ✓ Probleme de logică, probabilități și perspicacitate (extrageri de bile, cartonașe numerotate, probleme de cântărire și măsurare etc.)

Modele de teste de admitere în clasa a V-a

Testul nr. 1

Problema 1 (3x 5=15 puncte)

a. Să se calculeze:

[1+(5x7-2x15)]:2x(2x8-15):[3:(1+14:7)+2]=

b. Să se determine numărul natural ”a” din egalitatea:

20+ {[1+(5x7-2x15)]:2x(2x8-15):[3:(1+14:7)+2]+a}: 2= 24

c. Ştiind că a, b, c, d sunt numere naturale, astfel încât 5a+b=58 şi 6c+d=86, să se calculeze o cincime din valoare numărului x=15a+3b+30c+5d+396.

Problema 2 (2x5=10 puncte)

Dintr-un autobuz au coborât la prima stație două cincimi din numărul de călători și încă 7. La a doua stație a coborât o pătrime din numărul de călători și au urcat 3 călători , iar la stația a treia a coborât o treime din călătorii existenți și încă 4 călători și au urcat 11 călători. La final în autobuz sunt 31 călători. Să se determine:

a. Câți călători erau la început în autobuz?
b. Câți călători au coborât la stația a treia?

Problema 3 (2x5=10 puncte)

Suma dintre vârstele tatălui, fetiței și băiatului este de 48 de ani. Diferența dintre soră și frate este de 2 ani. Știind că acum 4 ani tatăl avea de 5 ori suma vârstelor celor 2 copii, să se afle:

a. Vârsta actuală a tatălui.
b. Peste câți ani tatăl va avea dublul vârstei fiicei?

Problema 4 (10 puncte a.+5 puncte b.=15 puncte)

Pentru elevii clasei a IV-a de la o școală s-au cumpărat de 5 ori mai multe bomboane decât ciocolate. Fiecare elev primește câte 2 ciocolate și câte 9 bomboane. La urmă au rămas 6 ciocolate și 55 bomboane.

a. Câți elevi are acea clasă?
b. Câte bomboane au fost la început?

Test elaborat de prof. Mormenche Doina

Testul nr. 2

Problema 1 (3x5=15 puncte)

a. Să se calculaze:

99+ 5x {472+4x [255-3:(19- 6x3)+12]: 2-998}:10=

b. Se dau numerele naturale a, b, c astfel încât a x (b+c)= 5, c x (b+c)=15.

Aflați 12 x a+ 13x b+ 14x c.

c. Determinați numărul $\overline{abc}$= 5x $\overline{ab}$+4x $\overline{bc}$ și a, b, c cifre nenule.

Problema 2 (2x5=10 puncte)

Un melc urcă într-un copac înalt de 22 de metri astfel: pe timp de zi, între orele 7 dimineața și 19 seara, urcă 6 metri, iar în timpul nopții, între orele 19 seara și 7 dimineața, doarme, timp în care alunecă 1 metru. Să se calculeze:

a. Câți metri a parcurs în total melcul până în vârful copacului?

b. Dacă ascensiunea a început marți la ora 7 dimineața, în ce zi și la ce oră a ajuns melcul în vârful copacului?

Problema 3 (2x5=10 puncte)

Într-o livadă se plantează 60 de vișini. Dacă lucrează numai adulți, atunci vor termina în 3 ore. Dacă vor lucra adulți și copii împreună, atunci pomii vor fi plantați în 2 ore.

a. În cât timp se va termina plantatul pomilor dacă lucrează numai copiii?

b. Câți vișini ar putea planta adulții și copiii în 4 ore?

Problema 4 (10 puncte a.+5 puncte b.=15 puncte)

Un elev trebuie să rezolve corect 11 probleme. Pentru o problemă rezolvată corect primește 9 puncte, iar pentru o problemă greșită , i se scad 3 puncte.

a. Câte puncte primește elevul dacă a rezolvat corect doar 4 probleme?

b. Câte probleme a rezolvat corect, dacă elevul a primit 51 de puncte?

Test elaborat de prof. Mormenche Doina

Testul nr. 3

Problema 1 (3x 5=15 puncte)

a. Calculați: (101x 100+2 500: 100x 0+1248:12):4.

b. Aflați a din: [(5+a:3): 13+8]x 6-12=42.

c. Aflați numărul $\overline{abc}$, știind că cifra unităților este suma dintre cifra zecilor și cea a sutelor, cifra zecilor este dublul cifrei sutelor și $\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca} = 132$.

Problema 2 (2x5=10 puncte)

Un șofer parcurge în patru zile 600 km astfel: în ultimele trei zile a parcurs cu 30 km mai puțin decât în primele trei zile. Distanța parcursă în prima zi reprezintă jumătate din distanța parcursă în a doua zi sau o treime din distanța parcursă a treia zi.

a. Ce distanțe a parcurs șoferul în fiecare zi?

b. Câți km ar trebui să mai meargă în prima zi, dacă șoferul și-ar propune să parcurgă același număr de km în fiecare zi?

Problema 3 (2x5=10 puncte)

Pe monitorul unui calculator apare afișat numărul 202220222022…2022 (2022 de 1000 de ori). Un program șterge toate cifrele, una câte una, de la stânga la dreapta și afișează suma tuturor cifrelor șterse.

a. Dacă la un moment dat pe monitor apare suma 2022, câte cifre au fost șterse?

b. Câte cifre de 2 conține numărul afișat inițial?

Problema 4 (10 puncte a.+5 puncte b.=15 puncte)

Mihai colorează 2022 de pătrățele de pe o coală de matematică astfel: mai întâi un pătrățel negru, apoi 2 pătrățele cu roșu, apoi 3 pătrățele cu albastru și după aceea 4 pătrățele cu verde. Mihai reia procedeul până va colora toate pătrățelele.

a. Cu ce culoare a colorat Mihai ultimul pătrățel?

b. Câte pătrățele sunt, în final, colorate cu roșu?

Test elaborat de prof. Mormenche Doina

Testul nr. 4

Problema 1 (3x 5=15 puncte)

a. Efectuați calculul: 3 313- {4 675-[180: (312:13- 204:17)x 15]x 15 +15}=

b. Să se afle necunoscuta a din expresia: 75: {30- [24x (20- 12:a x 3)]: 12+7}+3=8

c. Câte numere de trei cifre $\overline{abc}$, au toate cifrele pare? Dar impare? Justificați.

Problema 2 (2x5=10 puncte)

Pinocchio are înălțimea de 154 cm, iar nasul său are lungimea de 6 cm. După fiecare minciună, lungimea nasului său se dublează și în același timp se lungește cu încă 5 cm. Aflați:

a. Cel mai mic număr de minciuni spuse de Pinocchio astfel încât nasul său să depășească înălțimea sa.

b. Cu cât ar fi trebuit să fie mai scund Pinocchio astfel încât înalțimea sa să fie egală cu lungimea nasului său după a III-a minciună?

Problema 3 (2x5=10 puncte)

Mama are 2 copii: Ana și Mihai. Când s-a născut Ana, Mihai avea 2 ani. Peste 4 ani mama va fi de 4 ori mai mare decât Mihai și de 5 ori mai mare decât Ana.

a. Care este vârsta fiecăruia în prezent?

b. Peste câți ani mama va avea dublul vârstei Anei?

Problema 4 (10 puncte a.+5 puncte b.=15 puncte)

În două cutii erau bomboane. Pun bomboane din prima cutie în a doua cutie, atâtea bomboane câte conține cutia a doua acum. La pasul al doilea, pun din cutia a doua în prima cutie tot atâtea bomboane câte se află în prima cutie. Apoi pun din prima în a doua cutie, atâtea câte conține acum a doua. În prima cutie rămân 24 de bomboane, iar în a doua cu 8 mai puține.

a. Câte bomboane erau la început în fiecare pungă?

b. Câte bomboane trebuie să transfer în a doua cutie din prima cutie, astfel încât să obțin același număr de bomboane în fiecare cutie?

Test elaborat de prof. Mormenche Doina

Testul nr. 5

Problema 1 (3x 5=15 puncte)

a. Efectuați calculul: {1+[(107+2 33:19)x 11- 2 350]x 4}+7=

b. Aflați-l pe ”a” din egalitatea: 8x {212-5x [a+3x(5x6-17)]}= 96

c. Determinați toate numerele naturale de forma abc, știind că: $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 555$.

Problema 2 (2x5=10 puncte)

Suma a patru numere naturale este 2021. Dacă împărțim pe primul la al doilea, pe al doilea la al treilea și pe al treilea la al patrulea obținem de fiecare data câtul 2 și restul 1. Aflați :

a. Care sunt valorile celor 4 numere numerele?

b. Care este restul împărțirii primului număr la cel de-al patrulea număr?

Problema 3 (2x5=10 puncte)

Bunica are 3 nepoți. Mihai este cel mai mic, iar Mioara are cu 2 ani mai mult decât Mihai și cu 4 ani mai puțin decât Irina. Știind că toți nepoții au la un loc de 3 ori mai puțin decât bunica și că împreună cu bunica au 92 de ani, să se afle:

a. Vârsta fiecăruia;

b. Care este diferența de vârstă dintre bunică și Mioara?

Problema 4 (10 puncte a.+5 puncte b.=15 puncte)

O carte de povești are paginile numerotate cu numerele : 3, 10, 17, 24.....794.

a. Ce număr se află scris pe a 100-a pagină?

b. Suma cifrelor unui număr de pe o pagină este 23. Ce număr această pagină ?

Test elaborat de prof. Mormenche Doina

Testul nr. 6

Problema 1 (2x5=10 puncte)

a. Calculați: (1615 : 17 -13) x 8 - 640 =

b. Să se determine numărul natural *a* din egalitatea:

5 x { 211 – *a* x [(1615 : 17 – 13) x 8 – 640]}- 4 =91

Problema 2 (2x5=10 puncte)

Suma a două numere naturale este 324. Dacă primul număr se mărește cu 12, iar al doilea număr se micșorează cu 12, atunci primul număr este de trei ori mai mic decât al doilea.

a. Să se determine cele două numere naturale.
b. Calculați încincitul sumei numerelor *a* și *b*.

Problema 3 (10 puncte a.+5 puncte b.=15 puncte)

În primăvara trecută, nenea Petre și-a vizitat rudele de la Timișoara. A mers 4 ore cu trenul și 2 ore cu autobuzul, parcurgând în total 410 km. Anul acesta folosește aceleași mijloace de transport care-și menține vitezele, pentru a ajunge la Arad. Călătorește 3 ore cu trenul și 3 ore cu autobuzul, parcurgând astfel 405 km.

a. Care este viteza trenului?
b. Dar a autobuzului?

Problema 4 (10 puncte a.+5 puncte b.=15 puncte)

Veronica are o sumă de bani. După ce triplează această sumă, cheltuiește 5 lei. Dublează apoi suma rămasă și mai cheltuiește 4 lei. Din noul rest cheltuiește o pătrime și încă 3 lei. Constată că i-au mai rămas 99 lei.

a. Câți lei a avut Veronica?
b. Calculați împătritul sumei inițiale.

Test elaborat de prof. Tirim Cătălina

Testul nr. 7

Problema 1 (5 puncte a.+10 puncte b.=15 puncte)

a. Să se calculeze:

(162:9 - 3)x (9 – 9 : 9)=

b. Să se determine numărul natural *a* din egalitatea:

8 x {212 – 5 x [(162 : 9 – 3) x (9 – 9 : 9): *a* – 20]}- 4 = 92

Problema 2 (2x5=10 puncte)

La suma numerelor 123 000 şi 39 445 adună încincitul numărului 121, apoi scade suma dintre cel mai mic număr par de 3 cifre şi cel mai mare număr impar de 3 cifre distincte.

a. Cât ai obținut?
b. Cu cât este mai mic acest număr decât 1 000 000?

Problema 3 (2x5=10 puncte)

În sala de festivități a unei școli se desfășoară un spectacol. Dacă în fiecare bancă s-ar aşeza câte 4 elevi, atunci ar mai trebui 15 bănci, iar dacă în fiecare bancă s-ar aşeza câte 6 elevi, atunci ar rămâne 10 bănci libere şi în una ar fi 2 elevi.

a. Câte bănci sunt în sala de festivități?
b. Câți elevi ar ai trebui să vină pentru ca în fiecare bancă să fie câte 5 elevi?

Problema 4 (10 puncte a.+5 puncte b.=15 puncte)

Daria are de citit o carte. În prima zi citește trei optimi din numărul paginilor cărții.

a. Să se calculeze numărul paginilor cărții, știind că dacă Daria ar mai fi citit 25 de pagini, ar fi ajuns la jumătatea cărții.
b. Să se calculeze numărul paginilor cărții, știind că dacă Daria a citit cu 16 pagini mai mult decât o treime din numărul total al paginilor cărții.

Test elaborat de prof. Tirim Cătălina

Testul nr. 8

Problema 1 (5 puncte a.+10 puncte b.=15 puncte)

a. Calculați: 3+ (208 : 13 – 3) : (15 – 10 : 5)=

b. Să se determine numărul *a* din egalitatea :

{[3 + (208 : 13 – 3) : (15 – 10 : 5)]: a + 2 }x 2 – 1 = 11

Problema 2 (2x5=10 puncte)

Fie 5 numere naturale. Primele două sunt consecutive impare, următoarele două au suma 152, iar al treilea este cu 12 mai mare decât triplul celui de al patrulea. Al cincilea număr este cu 5 mai mare decât o treime din primul. Suma dintre primul și ultimul număr este 33.

a. Să se determine cele 5 numere naturale.

b. Calculați suma celor 5 numere identificate.

Problema 3 (2x5=10 puncte)

Un motociclist are de parcurs distanța dintre două localități în patru zile. În prima zi parcurge o treime din distanță plus 25 km. A doua zi parcurge cu 15 km mai puțin decât două cincimi dint rest, a treia zi parcurge cu 12 km mai mult decât patru șeptimi din noul rest, iar în ultima zi 132 km.

a. Câți km a parcurs motociclistul a treia zi?

b. Ce distanță are de parcurs motociclistul?

Problema 4 (10 puncte a.+5 puncte b.=15 puncte)

Se consideră șirul: 3, 11, 19, 27, 35 … 995.

a. Determinați suma numerelor șirului.

b. Determinați termenul din mijloc.

Test elaborat de prof. Tirim Cătălina

Testul nr. 9

Problema 1 (5 puncte a.+10 puncte b.=15 puncte)

a. Să se calculeze: (621 : 3 – 107) x (2 + 2 : 2) =

b. Să se determine numărul natural a din egalitatea:

1 + {[(621 : 3 – 107) x (2 + 2 : 2) : *a* + 3] x 3 + 26 }x 2 = 83

Problema 2 (2x5=10 puncte)

Pentru 5 costume de copii și 4 costume de damă sunt necesari 22 m stofă, iar pentru 3 costume de copii și 5 costume de damă sunt necesari 21 m stofă. Știind că 1 m de stofă costă 31 lei, aflați:

a. Cât costă 1 costum de copii și 1 costum de damă?
b. Cât cheltuiește o familie care cumpără stofă pentru 2 costume de copii și 1 costum de damă?

Problema 3 (2x5=10 puncte)

Mirela într-o pușculiță o sumă mai mica decât 800 lei. Dacă ar mări de 4 ori suma pe care o are , ar depăși 800 lei cu tot atâția lei câți îi lipsesc pentru a avea această sumă.

a. Câți lei are Mirela?
b. Calculați câți lei îi rămân după ce își cumpără un dicționar care costă 120 lei.

Problema 4 (10 puncte a.+5 puncte b.=15 puncte)

Se dă șirul cu numere: 2, 8, 14, 20, 26 …

a. Care este suma primilor 100 termeni ai șirului?
b. Arătați dacă 2010 se află în acest șir.

Test elaborat de prof. Tirim Cătălina

Testul nr. 10

Problema 1 (5 puncte a.+10 puncte b.=15 puncte)

a. Calculați: {345x (19- 17): 10+ 31:[51:3+ 84:12 x (51- 7x 7)] x3}:8=

b. Determinați numărul natural ”a” din egalitatea:

1 998+ (2 000 000- 980 x a): 5 300= 16x 107+ 16x 18

Problema 2 (2x5=10 puncte)

Trei copii au 72 de nuci. După ce primul consumă câteva nuci, al doilea de două ori mai multe decât acesta, iar al treilea de 3 ori mai multe decât primul, fiecare rămâne cu atâtea nuci câte au consumat împreună.

a. Câte nuci a avut fiecare copil?

b. Câte nuci trebuie să-i dea primul copil celui de-al treilea pentru a avea o treime din numărul lui de nuci (de la început)?

Problema 3 (2x5=10 puncte)

La un concurs au participat băieți și fete. Numărul băieților este cât jumătate plus 5 din numărul fetelor. După prima probă au fost eliminați 2 băieți și 5 fete, rămânând în concurs un număr egal de băieți și fete.

a. Câți băieți și câte fete au participat la concurs?

b. Câte fete ar trebui să mai participe la concurs pentru a avea un număr triplu față de numărul băietilor.

Problema 4 (10 puncte a.+5 puncte b.=15 puncte)

Pe o tablă sunt scrise 8 numere consecutive în ordine crescătoare. Se șterge unul dintre cele opt numere.

a. Ce număr a fost șters, dacă suma numerelor rămase este 2022?

b. Câte soluții are problema?

Test elaborat de prof. Tirim Cătălina

Testul nr. 11

Problema 1 (10 puncte a. +5 puncte b. +5puncte c. =20 puncte)

a. Fie numerele: $x = 17 \times 12 - 576 : 6 : 4 - 163, \quad y = (216 : 18 + 27 \times 8) : 12.$
Comparați numerele x și y.

b. Să se afle necunoscuta:
$[364 : 7 : (128 \times 5 - 124 \times 3 - n)] \times 45 - 23 \times 13 = 286$

c. Suma a trei numere impare consecutive este 225. Aflați numerele.

Problema 2 (2x5=10 puncte)

În trei cutii sunt 70 portocale. În prima cutie sunt de 2 ori mai multe decât în cea de-a doua cutie, iar în cea de-a treia cutie sunt cu 5 portocale mai puține decât în prima cutie.

a. Este posibil ca în cea de-a doua cutie să fie 20 de potocale? Justificați!

b. Câte portocale sunt în fiecare cutie?

Problema 3 (2x5=10 puncte)

Ioana are o sumă de bani. Cu $\frac{1}{4}$ din sumă cumpără o carte. Cu $\frac{3}{6}$ din banii rămaşi plăteşte 3 caiete. După ce plătește cu $\frac{1}{3}$ din noul rest un pix, constată că i-au mai rămas 32 lei.

a. Află ce sumă a avut Ioana.

b. Știind că fiecare caiet are același preț, aflați de câți bani mai are nevoie Ioana pentru a cumpăra încă 7 caiete.

Problema 4 (2x5=10 puncte)

În șirul 6, 9, 12,15, ... sunt 32 numere.

a. Determinați câte numere din șir conțin cifra 0.

b. Calculați suma numerelor din șir.

Test elaborat de prof. Anghel Cristina Elena

Testul nr. 12

Problema 1 (3x5=15 puncte)

a. Să se efectueze calculul: $12 - 3 \times [666 : 74 \times 3 - 144 : (454 - 16 \times 28)]$

b. Să se afle necunoscuta:

$$[73 + 2 \times (156 : n - 29) : 4 - 18] : 3 = 20$$

c. Scrieți toate numerele care împărțite la 13 dau câtul 6 și restul un număr impar.

Problema 2 (2x5=10 puncte)

Într-o livadă s-au plantat 230 de meri, pruni și vișini. Numărul prunilor este cu 10 mai mic decât al merilor, iar al vișinilor cu 40 mai mare decât al prunilor.

a. Câți pomi de fiecare fel s-au plantat?

b. Câți meri mai trebuie plantați, pentru ca numărul merilor să reprezinte trei pătrimi din numărul vișinilor.

Problema 3 (5 puncte a. +10puncte b.=15 puncte)

Ana cumpără 2 kg de ceapă și 5 kg de cartofi, plătind pentru cumpărături 16 lei. Lara cumpără cu același preț 6 kg de ceapă și 4 kg de cartofi și plătește 26 de lei.

a. Știind că Dana dorește să cumpere ceapă și cartofi o cantitate de 2 ori mai mare decât Ana și, în plus, jumătate din cantitatea cumpărată de Lara, aflați câte kilograme din fiecare categorie de legume cumpără Dana și ce sumă plătește pentru acestea.

b. Află prețul unui kilogram de ceapă și prețul unui kilogram de cartofi.

Problema 4 ()

Se consideră șirul de numere: 3, 5, 7, 9, ...187.

a. Să se determine numărul termenilor din șir.

b. Să se determine al 63-lea termen din șir.

Test elaborat de prof. Anghel Cristina Elena

Testul nr. 13

Problema 1 (3x5=15 puncte)

a. Să se efectueze calculul: $[17 \times 3 - 4 \times (38 \times 17 - 125 \times 5) : 14] : 15 \times 2$.

b. Să se afle necunoscuta:

$$[12 \times (2 \times n - 7) - 9] : 3 = 432 : 48$$

c. De câte ori s-a folosit cifra 5 pentru numerotarea unei cărți care are 139 de pagini?

Problema 2 (2x5=10 puncte)

O școală dintr-o localitate are 12 săli de clasă, fiecare cu câte 9 bănci de trei locuri.

a. Este suficient mobilier pentru cei 360 de elevi școlarizați? Justificați!

b. Câte bănci ar trebui să fie în total în fiecare clasă, știind că într-o clasă pot fi maxim 31 de elevi?

Problema 3 (10 puncte a. +5puncte b.=15 puncte)

Tatăl, mama și fiica au împreună 93 de ani. Se știe că vârsta mamei este de patru ori mai mare decât vârsta fiicei, iar tatăl este cu 3 ani mai mare decât mama.

a. Să se afle vârsta fiecărui membru al familiei.

b. Peste câți ani vârsta fiicei va fi de 3 ori mai mică decât vârsta mamei?

Problema 4 (2x5=10 puncte)

Se dă șirul de numere 1, 8, 15, 22, 29, ..., 701.

a. Să se determine numărul termenilor din șir.

b. Să se calculeze suma primilor 15 termeni.

Test elaborat de prof. Anghel Cristina Elena

Testul nr. 14

Problema 1 (5 puncte a. +5 puncte b. +10 puncte c.=20 puncte)

a. Se dau numerele: $a = 63 \times 8 : 14 \times 9 : 54$ și $b = 1007 - 889 + 33 - 148 + 1$. Calculați suma numerelor a și b.

b. Andreea se gândește la un număr pe care îl înmulțește cu 5, din rezultat scade 40, pe noul rezultat îl împarte la 3, iar apoi adună cu 11. Dacă rezultatul final este dublul numărului 8, aflați numărul la care s-a gândit Andreea.

c. Determinați toate numerele de forma $\overline{abc}$ care verifică relațiile: $\overline{abc} - \overline{ac} + b = 382$ și $c \leq a$.

Problema 2 (2x5=10 puncte)

a. Rareș a rezolvat în 6 zile 42 probleme. În câte zile rezolvă 133 probleme, dacă ritmul zilnic de rezolvare al problemelor este același?

b. 5 zidari construiesc o casă în 120 zile. Aflați numărul de zile în care 12 zidari construiesc aceeași casă.

Problema 3 (2x5=10 puncte)

Într-o curte aleargă rațe și iepuri. În total sunt 36 capete și 104 picioare.

a. Este posibil ca în curte să fie 27 de iepuri? Justificați!

b. Aflați numărul rațelor și numărul iepurilor din acea curte.

Problema 4 (2x5=10 puncte)

Un elev citește o carte în 15 zile, astfel: în fiecare zi citește cu 4 pagini mai mult decât în ziua precedentă. Se știe că, în a șasea zi, elevul a citit 31 de pagini.

a. Aflați câte pagini a citit în prima zi.

b. Determinați câte pagini are cartea.

Test elaborat de prof. Anghel Cristina Elena

Testul nr. 15

Problema 1 (3x5=15 puncte)

a. Se dau numerele: $a = (93 \times 17 - 93 \times 16) : 3$ și $b = (105 - 3 \times 19) \times 37 - 36 \times 48$. Să se afle câtul și restul împărțirii numărului b la a.

b. Să se afle termenul necunoscut: $150 - (143 - 3780 : 35) \times 4 = 14 \times n + 1720 : 172$.

c. Calculați suma numerelor pare cuprinse între 15 și 47.

Problema 2 (2x5=10 puncte)

Un biciclist parcurge un traseu în 3 etape: în prima etapă parcurge un sfert din lungimea traseului, în a doua etapă parcurge trei cincimi din restul drumului, iar în a treia etapă ultimii 18 km.

a. Este posibil ca traseul să aibă lungimea de 80 km? Justificați!

b. Determinați lungimea traseului parcurs de biciclist.

Problema 3 (5 puncte a. +10 puncte b.=15 puncte)

La un centru de legume și fructe s-au adus 100 de lăzi cu ardei și roșii, în total 2700 kg. O ladă cu ardei cântărește 25 kg, iar o ladă cu roșii 30 kg.

a. Câte lăzi cu roșii și câte cu ardei s-au adus?

b. Dacă în prma zi s-a vândut o treime din cantitatea de ardei și jumătate din cantitatea de roșii și dacă un 1 kg de roșii costă 6 lei, iar 1 kg de ardei costă 8 lei, aflați câți lei s-au încasat pe marfa vândută.

Problema 4 (2x5=10 puncte)

Se dă șirul de numere 1, 3, 7, 13, 21, ...

a. Scrieți următoarele 5 numere din șir.

b. Este posibil ca numărul de pe poziția 51 să fie 2551? Justificați!

Test elaborat de prof. Anghel Cristina Elena

Colegiul Național „Mircea cel Bătrân” Constanța

Admitere clasa a V-a, 3 iulie 2021

Varianta 1

Partea A (15 puncte)

Pentru aceste cerințe, scrie pe foaia de concurs numărul exercițiului și litera corespunzătoare răspunsului pe care îl consideri corect:

1. Dacă $a \times b + a \times c = 513$, rezultatul calculului $6 \times a \times (b + c)$ este:

a) 3592 b) 3078 c) 3591 d) 3590

2. În urmă cu un an, cei patru membri ai unei familii însumau 84 de ani. Peste câți ani vor avea împreună 100 de ani?

a) 2 ani b) 16 ani c) 4 ani d) 3 ani

3. Dacă împarți jumătatea numărului a la jumătatea numărului b obții câtul 2 și restul 15. Știind că diferența celor două numere este 140, află dublul lui a:

a) 500 b) 250 c) 125 d) 280

4. Matei face 1000 de pași de acasă până la bunicii săi. Un pas de-al său măsoară 34 de centimetri. Distanța în metri este :

a) 134 b) 34000 c) 340 d) 34

5. Maria și Andreea înșiră mărgele pentru a face un colier. Maria înșiră de la un capăt 5 mărgele în 3 minute, iar Andreea înșiră din celălalt capăt câte 6 mărgele în 4 minute. Ele vor termina colierul de 38 de mărgele în:

a) 12 minute b) 38 minute c) 48 minute d) 54 minute

Partea B (75 puncte)

Pentru aceste probleme, scrie rezolvările complete:

Subiectul I (30 puncte)

a) Aflați numărul natural n, dacă: $6 \times \left\{ 6 + 6 : 6 + 6 \times \left[6 : 6 + 6 \times \left(6 : n + 6 \right) \right] \right\} = 2022$

b) Suma a trei numere este 250. Dacă îl împărțim pe primul la al doilea și pe al doilea la al treilea, de fiecare dată obținem câtul 2 și restul 3. Aflați numerele.

Subiectul II (30 puncte)

Într-o clasă sunt 31 de elevi, băieţi şi fete. De 1 Martie, primul băiat care a ajuns la şcoală a adus mărţişoare pentru 6 fete, al doilea băiat a adus mărţişoare pentru 7 fete, următorul pentru 8 fete şi aşa mai departe, până la ultimul, care a adus mărţişoare pentru toate fetele (un băiat dă un singur mărțișor unei fete).

a) Câți băieți sunt în clasă?

b) Câte mărțișoare s-au dat în total fetelor?

Subiectul III (15 puncte)

Se consideră suma $36+34+32+25+23+21+19+17+15+8+6+4$

a) Calculați suma, eventual grupând convenabil termenii.

b) Dacă se înlocuiesc în sumă două semne "$+$" cu semne "$-$" se obține rezultatul 176. În fața căror numere se pune semnul "$-$"? (Justificare!)

c) Dacă se înlocuiesc în sumă, mai multe semne "$+$" cu semne "$-$" se poate obține rezultatul 11?

Se acordă din oficiu 10 puncte

Timp de lucru: 90 minute

Colegiul Național „Mircea cel Bătrân” Constanța

Admitere clasa a V-a, 3 iulie 2021

Varianta 2

Partea A (15 puncte)

Pentru aceste cerințe, scrie pe foaia de concurs numărul exercițiului și litera corespunzătoare răspunsului pe care îl consideri corect:

1. Cosmin are un plic cu timbre. El îi dă Anei 7 timbre apoi mai primește de la Ion 9 timbre. Acum Cosmin are 11 timbre. Câte timbre avea la început Cosmin în plic?

a) 16 b) 7 c) 9 d) 18

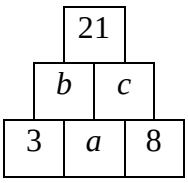
2. Avem două numere: unul de două cifre și altul de trei cifre. Diferența lor este 989. Atunci suma celor două numere este:

a) 109 b) 1008 c) 1009 d) 1011

3. Rezultatul calculului $99-9:9$ este:

a) 10 b) 9 c) 90 d) 98

4. Fiecare număr din figură este egal cu suma numerelor pe care se sprijină.



Atunci numărul *b* este egal cu:

a) 8 b) 7 c) 6 d) 4

5. Dacă numerele $\overline{ab37c}$ și $\overline{2938d}$ sunt consecutive, atunci $a+b+c+d$ este:

a) 18 b) 20 c) 16 d) 24

Partea B (75 puncte)

Pentru aceste probleme, scrie rezolvările complete:

Subiectul I (30 puncte)

a) Aflați numărul a din egalitatea:

$2021-2020:\{2019-2018:[2017-2016:(a-2020)]\}=1$

b) Să se determine numerele naturale de două cifre $\overline{xy}$ care verifică: $\overline{xy}+\overline{yx}=4\times\overline{xx}$.

Subiectul II (30 puncte)

Un autocar are de parcurs în patru zile 2021 kilometri. Aflați cât a parcurs autocarul în a treia zi, dacă în ultima zi a parcurs cu un kilometru mai mult decât a parcurs în primele trei zile, iar în a doua zi a parcurs cu 10 kilometri mai puțin decât în prima zi și de trei ori mai puțin decât în a treia zi.

Subiectul III (15 puncte)

Se dau șapte numere naturale diferite între ele. Dacă adunăm diferențele dintre cel mai mare și fiecare dintre celelalte numere, obținem suma 21.

a) Aflați diferența dintre cel mai mare număr și cel mai mic număr din cele șapte numere.

b) Aflați cele șapte numere știind că ele au suma egală cu 1435.

Se acordă din oficiu 10 puncte

Timp de lucru: 90 minute

Colegiul Național „Mircea cel Bătrân” Constanța

Admitere clasa a V-a, 3 iulie 2021

Varianta 3

Partea A (15 puncte)

Pentru aceste cerințe, scrie pe foaia de concurs numărul exercițiului și litera corespunzătoare răspunsului pe care îl consideri corect:

1. Care dintre următoarele numere are suma cifrelor mai mare decât produsul cifrelor?

a) 312 b) 712 c) 431 d) 115

2. Patru copii au împreună 28 ani. Câţi ani vor avea împreună copiii peste 5 ani:

a) 33 b)23 c) 48 d) 38

3. După ce a parcurs jumătate din drum şi încă 12 km, un biciclist constată că mai are de parcurs încă un sfert din el. Ce lungime are drumul?

a) 36 km b) 48 km c) 60 km d) 40 km

4. Pentru a realiza o machetă, Pavel cumpără 40 de bețișoare de aceeași lungime. Pe jumătate din ele le rupe în două. Pe jumătate din cele rupte în două, le rupe din nou în două. Câte bucățele de diferite dimensiuni are acum?

a) 80 b) 60 c) 120 d) 50

5. Adunând unui termen 12 și scăzând din celălalt 18 numerele devin egale. La început diferența celor doi termeni era egală cu

a) 6 b) 18 c) 30 d)15

Partea B (75 puncte)

Pentru aceste probleme, scrie rezolvările complete:

Subiectul I (30 puncte)

Aflați numărul natural n, dacă: $3333-\left\{\overline{aa}:a+\left[\left(n-\overline{bbbb}:b\right)+333:3\right]\cdot 3+333+33:3\right\}\cdot 3=1269$,

unde a și b sunt cifre diferite de zero.

Subiectul II (30 puncte)

Suma a cinci numere este 91. Dacă din primul scădem 8, din al doilea scădem 3, din al treilea scădem 7, din al patrulea scădem 2 și din al cincilea scădem 6, obținem numere consecutive impare în această ordine. Aflați numerele.

Subiectul III (15 puncte)

Trei numere consecutive se împart la un număr natural de două cifre, iar suma celor trei resturi este 103.

a) Arătați că unul dintre cele trei resturi este zero.

b) Aflați numărul la care s-au efectuat cele trei împărțiri.

Se acordă din oficiu 10 puncte

Timp de lucru: 90 minute

Colegiul Național „Mircea cel Bătrân” Constanța

Admitere clasa a V-a, 3 iulie 2021

Varianta 4

Partea A (15 puncte)

Pentru aceste cerințe, scrie pe foaia de concurs numărul exercițiului și litera corespunzătoare răspunsului pe care îl consideri corect:

1. Dublul unui număr este 48. Atunci jumătatea lui este:

a) 48 b) 96 c) 24 d) 12

2. Pe o alee sunt plantați 23 de pomi la distanțe egale. Între primul și al treilea pom sunt 12 metri. Câți metri sunt între primul și ultimul pom?

a) 92 b) 132 c) 138 d) 144

3. Suma a două numere este 56, iar unul dintre ele este de 7 ori mai mare decât celălalt. Atunci produsul celor două numere este:

a) 384 b) 343 c) 392 d) 176

4. Ana și Cosmin împart 72 de bomboane astfel: de câte ori ia Ana 4 bomboane, Cosmin ia 5 bomboane. Câte bomboane are Cosmin în final?

a) 40 b) 32 c) 45 d) 35

5. Andreea s-a gândit la un număr, l-a împărțit la 4, a scăzut apoi 5 și a obținut 13. Numărul la care s-a gândit Andreea este:

a) 61 b) 32 c) 72 d) 92

Partea B (75 puncte)

Pentru aceste probleme, scrie rezolvările complete:

Subiectul I (30 puncte)

a) Află $y+z+t$ știind că:

$[90-(y\times y+4)]:5=1$

$[60+4\times z-(5\times 3-y)]:3=30-20:5$

$7\times(2\times y+3\times z-2\times t)=70$

b) Determinați numărul $\overline{cnmb}$ știind că are suma cifrelor egală cu 24 și $\overline{2nmb}+2\times\overline{nmb}=4688$

Subiectul II (30 puncte)

Șase fermieri cultivă cireșe. Ei au cules în total 2021 kilograme de cireșe. Cantitățile recoltate de primii doi fermieri sunt reprezentate de două numere pare consecutive. Al treilea și al patrulea fermier au cules în total 720 kilograme, iar al treilea a cules a cincea parte din cât a cules cel de-al patrulea fermier. Diferența dintre ce a recoltat al șaselea fermier și ce a recoltat al cincilea fermier, este de 321 kilograme, iar unul dintre ei a obținut doar un sfert din ce a cules celălalt. Câte kilograme de cireșe a cules fiecare fermier?

Subiectul III (15 puncte)

Avem un număr par de numere naturale a căror sumă este 1883. Împărțind fiecare dintre aceste numere la un număr natural nenul n, obținem resturi egale cu 63 sau 64, iar suma tuturor acestor resturi este 761.

a) Calculați $2\times3\times11\times17$.

b) Câte resturi sunt egale cu 63 și câte sunt egale cu 64?

c) Să se determine cel mai mic număr natural n care verifică condițiile din enunț.

Se acordă din oficiu 10 puncte

Timp de lucru: 90 minute

Colegiul Național Mircea cel Bătrân Constanța

Admitere clasa a V-a, 27 iunie 2020

Varianta 1

Partea A (15 puncte)

Pentru aceste cerințe, scrie pe foaia de concurs numărul exercițiului și litera corespunzătoare răspunsului pe care îl consideri corect:

1. Raluca şi Maria au împreună 25 de ani. Câţi ani vor trece până vor avea împreună 37 de ani ?
a) 10 b) 6 c) 12 d) 8
2. Diferenţa dintre cel mai mare si cel mai mic număr impar de două cifre distincte este egală cu
a) 84 b)88 c) 89 d) 87
3. Suma a trei numere naturale consecutive este egală cu 51. Cel mai mic dintre numere are suma cifrelor egală cu
a) 16 b) 7 c) 9 d) 5
4. La produsul numerelor 735 şi 7 adăugaţi câtul lor. Care este rezultatul obţinut ?
a) 5160 b) 5150 c) 5145 d) 5250
5. La ce număr am adunat 25 dacă un sfert din rezultatul obţinut este egal cu 50 ?
a) 75 b) 125 c) 55 d) 175

Partea B (75 puncte)

Pentru aceste probleme, scrie rezolvările complete:

Subiectul I (30 puncte)

Corina are doi copii: Maria și Andrei. În urmă cu doi ani, Maria era cu 3 ani mai mare decât Andrei. Peste 5 ani, vârsta Corinei va fi de 4 ori vârsta lui Andrei și de 3 ori vârsta Mariei.

a) Determinați vârstele copiilor în prezent.
b) Peste câți ani vârsta mamei va fi de două ori mai mare decât suma vârstelor celor doi copii?

Subiectul II (30 puncte)

Un sportiv își planifică în fiecare din cele 7 zile ale săptămânii în mod egal un anumit număr de kilometri de alergat. În realitate el aleargă în prima zi o zecime din acest număr iar apoi, în fiecare zi, cu 3 kilometri mai mult decât în ziua precedentă, reușind astfel să realizeze numărul de kilometri planificat pentru acea săptămână.

a) Să se determine distanța alergată de sportiv în prima zi.
b) Cât a alergat sportivul în ultimele 3 zile?

Subiectul III (30 puncte)

Un număr natural este cu 14 mai mare decât celălalt număr. Dacă se împarte numărul mai mare la cel mai mic se obține câtul 2.

a) Aflați numerele dacă restul împărțirii este 2.
b) Aflați numerele dacă restul împărțirii are cea mai mică valoare.
c) Aflați numerele dacă restul împărțirii are cea mai mare valoare.

Se acordă din oficiu 10 puncte

Timp de lucru: 90 minute

Colegiul Național Mircea cel Bătrân Constanța

Admitere clasa a V-a, 27 iunie 2020

Varianta 2

Partea A (15 puncte)

Pentru aceste cerințe, scrie pe foaia de concurs numărul exercițiului și litera corespunzătoare răspunsului pe care îl consideri corect:

1. Produsul a trei numere este 144. Dacă primul număr este 2, al doilea este 6, cât este cel de-al treilea număr?
a) 8 b) 16 c) 18 d) 12
2. Dacă suma a două numere este 45, iar unul dintre ele este o pătrime din celălalt, cât este produsul celor două numere?
a) 342 b) 324 c) 500 d) 314
3. Dacă $a = 7$, care din următoarele afirmații este adevărată?
a) $3a + 2 = 19$ b) $2a - 5 = 9$ c) $a + 12 = 18$ d) $15 - 2a = 3$
4. Emi citește în fiecare zi câte 10 pagini dintr-o carte care are 57 de pagini. În câte zile va termina Emi de citit cartea?
a) 4 zile b) 5 zile c) 6 zile d) 7 zile
5. Suma dintre cel mai mic număr par format din trei cifre diferite două câte două şi cel mai mare număr par format din două cifre identice este egală cu:
a) 190 b) 212 c) 208 d) 180

Partea B (75 puncte)

Pentru aceste probleme, scrie rezolvările complete:

Subiectul I (30 puncte)

- **a)** Să se scrie 2021 ca sumă de două numere naturale consecutive
- **b)** Se poate scrie 2021 ca sumă de 3 numere naturale consecutive? Dar ca sumă de 4 numere naturale consecutive?
- **c)** Folosind cifra 3 de 12 ori, paranteze și operații aritmetice, să se scrie o expresie al cărei rezultat este 2021.

Subiectul II (30 puncte)
Pentru a participa la maraton, un sportiv aleargă în fiecare zi, de fiecare dată mai mulți kilometri decât în ziua precedentă, alergând în total, în cinci zile, 31 km.

- **a)** Arătaţi că distanţele parcurse în fiecare zi nu pot fi numere consecutive.
- **b)** Câți kilometri a alergat în a patra zi, dacă în prima zi a alergat de trei ori mai puțin decât în a cincea zi.

Subiectul III (30 puncte)
Suma dintre câtul și restul unei împărţiri a două numere naturale este 53 iar restul depăşeşte cu 1 triplul câtului. Aflaţi deîmpărţitul ştiind că este un număr natural cuprins între 740 şi 750.

Se acordă din oficiu 10 puncte

Timp de lucru: 90 minute

Colegiul Național Mircea cel Bătrân Constanța

Admitere clasa a V-a, 27 iunie 2020

Varianta 3

Partea A (15 puncte)

Pentru aceste cerințe, scrie pe foaia de concurs numărul exercițiului și litera corespunzătoare răspunsului pe care îl consideri corect:

1. Dacă împarți la 5 diferența numerelor 72 și 27 ce număr se obține?
a) 45 b) 9 c) 5 d) 18
2. Ce număr trebuie scăzut din dublul numărului 202, pentru a obține 57?
a) 344 b) 290 c) 347 d) 145
3. Produsul a două numere cuprinse între 1 și 10 este 30. Care este suma lor?
a) 11 b) 6 c) 21 d) 30
4. Dacă suma a două numere este 225, iar diferenţa lor este 175, care este produsul celor două numere?
a) 1500 b) 2000 c) 4000 d) 5000
5. Un elev calculează suma numerelor până la 20. Din greşeală adună un număr de două ori şi obţine 219. Numărul adunat de două ori este:
a) 8 b) 9 c) 10 d) 15

Partea B (75 puncte)

Pentru aceste probleme, scrie rezolvările complete:

Subiectul I (30 puncte)

a) Să se calculeze $\left[\left(251+10-10:10\right):4+15\right]:4$

b) Să se determine numărul natural *n* din egalitatea

$$\left[\left(251+10-10:10\right):4+15\right]:4-\left(2\times n-4\right)-6:2=9$$

c) Să se determine numerele naturale $\overline{abc}$ care verifică $\overline{abc}+\overline{ab}+c=390$.

Subiectul II (30 puncte)
Ioana a citit 6 poveşti, în total 71 de pagini. Numărul de pagini al primei poveşti este mai mare decât numărul de pagini al celei de a doua poveşti . Următoarele două poveşti însumează 25 de pagini, a treia având un sfert din numărul de pagini al celeilalte. A cincea poveste are cu 18 pagini mai mult decât a şasea, iar a şasea poveste are de patru ori mai puţine decât a cincea.

a) Câte pagini au ultimele patru poveşti împreună?
b) Câte pagini are fiecare poveste?

Subiectul III (15 puncte)
Un elev și-a propus să rezolve 38 de probleme în 4 zile, rezolvând în fiecare zi mai multe probleme decât în ziua precedentă. Aflați câte probleme ar trebui să rezolve elevul în fiecare zi, astfel încât numărul problemelor rezolvate în ultima zi să fie de 3 ori mai mare decât numărul problemelor rezolvate în prima zi.

Se acordă din oficiu 10 puncte

Timp de lucru: 90 minute

Colegiul Național Mircea cel Bătrân Constanța

Admitere clasa a V-a, 27 iunie 2020

Varianta 4

Partea A (15 puncte)

Pentru aceste cerințe, scrie pe foaia de concurs numărul exercițiului și litera corespunzătoare răspunsului pe care îl consideri corect:

1. Suma a două numere este 35. Dacă unul dintre ele este 18, care este celălalt număr ?
a) 11 b) 17 c) 15 d) 19
2. Numărul numerelor pare cuprinse între 5 și 37 este:
a) 12 b) 18 c) 16 d) 17
3. Suma dintre produsul și câtul numerelor 121 și 11 este:
a) 1342 b) 1331 c) 1320 d) 1332
4. Dublul sfertului unui număr este 372. Numărul este:
a) 642 b) 372 c) 1488 d) 744
5. Numerele 315, 316, 317, 318 se împart, pe rând, la 9. Suma resturilor obținute este:
a) 3 b) 4 c) 6 d) 5

Partea B (75 puncte)

Pentru aceste probleme, scrie rezolvările complete:

Subiectul I (30 puncte)

a) Să se calculeze $\left(429:3-63\right)\times 12+40$

b) Să se determine numărul natural *n* din egalitatea

$$\left\{\left[\left(429:3-63\right)\times 12+40\right]:n+15\right\}:5+25=30$$

c) Pătrimea unui număr natural micșorată cu 16 reprezintă cel mai mic număr natural cu 3 cifre distincte cu suma cifrelor 21. Să se determine numărul.

Subiectul II (30 puncte)

Un copil are în total 100 de fructe, nuci și mere. El schimbă cu un prieten câte nouă nuci pentru două mere, terminând toate nucile după un număr de schimburi și rămânând în final cu 44 de mere.

a) Câte schimburi s-au făcut și câte mere a primit de la prietenul său?
b) Câte nuci a avut inițial elevul?

Subiectul III (15 puncte)

Spunem că un număr natural *n* este *"deosebit"* dacă există numerele naturale *m* și *p* nenule, diferite astfel încât $n+m+p=2020$.

a) Arătaţi că numărul 2010 este *"deosebit"*.
b) Arătaţi că numărul 2018 nu este *"deosebit"*.
c) Arătaţi că există numere distincte *"deosebite"* x și y pentru care numărul $x+y$ nu este *"deosebit"*.

Se acordă din oficiu 10 puncte

Timp de lucru: 90 minute

Colegiul Național Mircea cel Bătrân Constanța

Admitere clasa a V-a, 2020

Modelul 1

Partea A (15 puncte)

Pentru aceste cerințe, alege răspunsul corect:

1. Mihai primește de la bunici 5 lei în fiecare zi. Câte zile sunt necesare pentru a primi în total 50 lei?

a)8 zile b) 9 zile c) 10 zile d) 5 zile

2. Ce număr trebuie scăzut din 21 pentru a obține 8?

a) 12 b) 13 c) 14 d) 15

3. Dacă x=3, care din următoarele afirmații este adevărată?

a) 2x=5 b) 3x-1=8 c) x+5=6 d) 7-x=2

4. Broasca țestoasă umblă și se hrănește numai într-o pătrime de timp dintr-un an. În restul timpului, doarme. Câți ani doarme în 12 ani?

a) 8 ani b) 9 ani c) 6 ani d) 4 ani

5. Suma jumătăților a două numere este 480, iar suma sferturilor altor două numere este 150. Cât este suma celor patru numere?

a) 780 b) 1560 c) 1260 d) 630

Partea B (75 puncte)

Pentru aceste probleme, scrie rezolvările complete:

Subiectul I (30 puncte)

Trei prieteni, Adrian, Mircea și Andrei au un coș cu bomboane. Adrian a împărțit bomboanele din coș în trei părți egale și a luat o parte din ele. Apoi, Mircea a împărțit bomboanele rămase în patru părți egale și a luat una dintre aceste părți. În final, Andrei a împărțit bomboanele rămase în cinci părți egale, a luat una dintre aceste părți constatând că au mai rămas în coș 240 bomboane. Aflați:

a) Câte bomboane au fost la început în coș?

b) Câte bomboane a luat din coș fiecare copil?

Subiectul II (30 puncte)

Fie a,b,c,d patru numere naturale nenule. Împărțindu-l pe a la b, pe b la c și pe c la d obținem, la fiecare împărțire, câtul 2 și restul 2.

a) Care este restul împărțirii lui b la 4 ?

b) Arătați că a este mai mare sau egal cu 38.

c) Arătați că dacă d este număr impar, atunci suma $a+b+c+d+3$ are ultima cifră 0.

Subiectul III (15 puncte)

Într-o urnă sunt 10 bile roșii, 12 bile galbene și 14 bile albastre, de aceeași mărime și de aceeași greutate.

a) Care este cel mai mic număr de bile care trebuie extrase, fără a vedea culoarea acestora, pentru a fi siguri că am scos cel puțin o bilă roșie?

b) Care este cel mai mic număr de bile care trebuie scos, fără a ne uita, pentru a fi siguri că am scos 3 bile de aceeași culoare?

c) Care este cel mai mic număr de bile care trebuie scos, fără a ne uita, pentru a fi siguri că am scos 3 bile de culori diferite ?

Se acordă din oficiu 10 puncte

Timp de lucru: 90 minute

Colegiul Național Mircea cel Bătrân Constanța

Admitere clasa a V-a, 2020

Modelul 2

Partea A (15 puncte)

Pentru aceste cerințe, alege răspunsul corect:

1. Când două numere se adună, rezultatul este 26. Dacă unul dintre ele este 11, care este celălalt număr?

a) 11 b) 13 c) 15 d) 17

2. Numărul trei sute patru mii șaptezeci se scrie cu cifre arabe, astfel:

a) 30470 b) 340070 c) 304070 d) 3004070

3. Produsul a două numere cuprinse între 1 și 10 este 14. Care este suma lor?

a) 7 b) 9 c) 12 d) 14

4. Dacă suma a două numere este 110, iar diferenţa lor este 86, atunci cât este produsul celor două numere?

a) 1340 b) 1176 c) 1276 d) 1440

5. Bianca s-a născut în anul 2011, Ema în 2012, Matei în anul 2013, iar Luca în anul 2014.Unul dintre copii va împlini în anul 2019 o vârstă egală cu dublul sumei cifrelor anului în care s-a născut. Care este acest copil?

a) Bianca b) Ema c) Matei d) Luca

Partea B (75 puncte)

Pentru aceste probleme, scrie rezolvările complete:

Subiectul I (30 puncte)

Ioana are în prezent 8 ani, Maria va avea 12 ani peste 5 ani, Cristiana a avut 8 ani în urmă cu 4 ani, iar tatăl lor are în prezent vârsta egală cu suma vârstelor pe care le vor avea cele trei fete peste 7 ani.

a) Care dintre fete este cea mai mare?

b) Ce vârstă avea tatăl când s-a născut Cristiana?

c) Peste câți ani vârsta tatălui va fi de două ori mai mare decat suma vârstelor Ioanei și Mariei?

Subiectul II (30 puncte)

Trei prieteni participă la două concursuri de matematică. La primul concurs, Andrei primeşte cu 20 lei mai mult decât Dragoş, iar Vasile cu 20 lei mai mult decât Andrei. La al doilea concurs Dragoş primeşte cu 50 lei mai mult decât la primul, Andrei cu 20 lei mai puţin decât Dragoş, iar Vasile cu 20 lei mai puţin decât Andrei. La cele două concursuri ei au primit în total 780 lei.

a) Ce suma primeşte Dragoş la primul concurs?

b) Dacă împreună ar cumpăra 3 albume şi 2 cărţi, le-ar mai rămâne 80 lei din suma primită, iar dacă ar cumpăra 2 albume şi 3 cărţi, le-ar mai trebui 80 lei. Cât costă un album şi o carte împreună?

Subiectul III (15 puncte)

Un număr S se numește ”stelar” dacă suma cifrelor lui S este egală cu numărul cifrelor lui (spre exemplu 102 este număr ”stelar” deoarece are trei cifre și 1+0+2=3).

a) Scrieți toate numerele ”stelare” de trei cifre.

b) Determinați diferența dintre cel mai mare și cel mai mic număr ”stelar” care au câte 6 cifre. Care este suma cifrelor acestui număr obținut ca diferență?

Se acordă din oficiu 10 puncte

Timp de lucru: 90 minute

Colegiul Național
Emil Racoviță Iași
Excelență în educație

Aleea Nicolina Nr. 4
IASI - 700221, ROMANIA
CF 4701592
Tel/Fax: +(40)-232-234 272
email: office@racovita.ro
Web page: www.racovita.ro

Subiect testare Leris – 2022
Varianta de lucru 1

1. **(20p.)** Determinaţi numărul $\overline{ab}$ pentru care cifrele *a* şi *b* verifică egalitatea :

$$68+\left\{4\cdot\left[36-3\cdot\left(2\cdot a+b\right)\right]+117\right\}:5=113$$

2. **(20p.)** Fie a şi b două numere naturale. Primul este cu 60 mai mare decât sfertul celuilalt număr. Împărţind cele două numere, se obţin câtul 1 şi restul 24. Aflaţi numerele.
Câte soluţii are problema?

3. **(10p)** La cercul de matematică au fost propuse mai multe probleme. Pentru fiecare soluţie corectă se acordă 5 puncte, iar pentru o soluţie eronată se scad 20 de puncte. Pentru 40 de probleme Anca a primit 50 de puncte. Câte probleme a rezolvat corect Anca?

4. **(20p.)** Pentru constituirea unei echipe de baschet, se organizează o preselecţie în rândul elevilor. Antrenorul face observaţia următoare: dacă s-ar grupa câte 10 jucători la fiecare panou de baschet, ar rămâne 2 panouri libere. Antrenorul, vrând să grupeze câte 7 jucători la fiecare panou, constată că ar mai avea nevoie de 2 jucători pentru ultimul panou. Câte panouri de baschet sunt şi câţi elevi au venit la preselecţie?

5. **(20p.)** Fie şirul 1,2,3,4,11,12,13,14,21,22,23,24,31,32,33,34,41,....., format din numere care se scriu doar cu cifrele 1,2,3 sau 4, în ordine crescătoare. Aflaţi:
a) Câţi termeni ai şirului au cel mult trei cifre?
b) Al câtelea termen din şir este numărul 1213?

Notă:

- Se acordă **10p.** din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 45 de minute şi 15 minute pentru acomodarea cu subiectul.

Colegiul Național
Emil Racoviță Iași
Excelență în educație

Aleea Nicolina Nr. 4
IASI - 700221, ROMANIA
CF 4701592
Tel/Fax: +(40)-232-234 272
email: office@racovita.ro
Web page: www.racovita.ro

Subiect testare Leris – 2022
Varianta de lucru 2

1. **(20p.)** Determinați numărul a care verifică egalitatea :

$$9-\left\{76-4\cdot\left[\left(2a-1\right):3-8\right]\right\}:10=5$$

2. **(20p.)** Vârsta Andreei este cu patru ani mai mică decât jumătate din vârsta mamei sale , iar vârsta tatălui este cu doi ani mai mare decât vârsta mamei. Aflaţi vârsta Andreei ştiind că atunci când împărţim suma vârstelor părinţilor la vârsta fetei obţinem câtul 5 şi restul 2.

3. **(10p.)** Alin, un talentat fotbalist, trebuia să adune şase numere de două cifre. Din neatenţie, în faţa a două numere a pus semnul minus şi astfel a obţinut un rezultat cu 42 mai mic decât cel corect. Care au fost numerele cu semnele schimbate?

4. **(20p.)** Dacă elevii unei clase stau câte doi în fiecare bancă, rămâne un elev în picioare. Dacă stau câte trei elevi în fiecare bancă, atunci patru bănci vor rămâne goale şi una va fi cu numai doi elevi. Câte bănci şi câţi elevi sunt în clasă ?

5. **(20p.)** Pe marginea unei alei, din 10m în 10 m, au fost plantaţi 53 de copaci în ordinea: tei, arţari, castani, tei, arţari etc. Primul şi ultimul copac au fost plantaţi la capetele aleii.
   a) Aflaţi lungimea aleii.
   b) Care este tipul de copac aflat la mijloc, între copacii plantaţi ?
   c) Ce distanţă este între al cincilea tei şi al douăsprezecelea arţar (de la stânga la dreapta)?

Notă:
- Se acordă **10p.** din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 45 de minute şi 15 minute pentru acomodarea cu subiectul.

Colegiul Național
Emil Racoviță Iași
Excelență în educație

Aleea Nicolina Nr. 4
IASI - 700221, ROMANIA
CF 4701592
Tel/Fax: +(40)-232-234 272
email: office@racovita.ro
Web page: www.racovita.ro

Subiect testare Leris – 2022
Varianta de lucru 3

1. **(20p.)** Să se afle x din relaţia:
$$31-\{25-[14-(30-x:4):2+29]:3\}\cdot 2=1$$

2. **(20p)** Cu 120 de lei s-a cumpărat un număr de pixuri şi de trei ori mai multe creioane. Preţurile lor sunt exprimate prin numere naturale. Ştiind că 4 pixuri şi 12 creioane costă 80 de lei, să se afle câte pixuri şi câte creioane s-au cumpărat.

3. **(10p.)** Ana vinde la piaţă un număr de cireşe. Dacă le pune câte 7 în coşuleţe, rămâne cu o cireaşă, iar pe celelalte le vinde cu 98 de lei. Dacă le pune câte 10 în coşuleţe, rămâne cu două coşuleţe goale şi astfel le vinde cu 100 de lei. Să se afle cât costă o cireaşă şi câte cireşe avea Ana la început.

4. **(20p.)** Să se afle trei numere naturale, ştiind că împărţind primul număr la dublul celui ce-al doilea şi al doilea la sfertul celui de-al treilea obţinem de fiecare dată câtul 5 şi restul 3. Să se afle numerele, ştiind că diferenţa dintre primul număr şi cel de-al treilea este mai mică decât 263.

5. **(20p.)** Petronel colorează pătrăţelele unei foi de hârtie de matematică cu patru culori, astfel: mai întâi un pătrăţel cu negru, apoi două pătrăţele cu roşu, apoi trei pătrăţele cu albastru, apoi patru pătrăţele cu verde, apoi cinci pătrăţele cu negru şi aşa mai departe. La sfârşit colorează 2022 pătrăţele cu o aceeaşi culoare. Care este aceasta? Dar pătrăţica cu numărul 2022 ce culoare are?

Notă:
- Se acordă **10p.** din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 45 de minute şi 15 minute pentru acomodarea cu subiectul.

Colegiul Național
Emil Racoviță Iași
Excelență în educație

Aleea Nicolina Nr. 4
IASI - 700221, ROMANIA
CF 4701592
Tel/Fax: +(40)-232-234 272
email: office@racovita.ro
Web page: www.racovita.ro

Subiect testare Leris – 2022
Varianta de lucru 4

1. **(20p.)** Fie numerele naturale a, b, c cu proprietatea a + b = 13. Calculaţi valoarea expresiei:

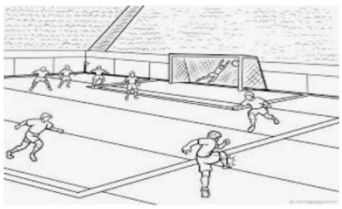
$$E=\left[4\cdot\left(5\cdot a+7\cdot c\right)+7\cdot\left(b-4\cdot c\right)\right]\cdot 3+39b$$

2. **(20p.)** Numerele naturale x, y, z împărţite pe rând la 13 dau resturile 7, 5 şi 5. Aflaţi restul împărţirii numărului $N=2\cdot x+3\cdot y+2\cdot z$ la 13.

3. **(10p)** Două mere cântăresc cât trei pere, patru pere cântăresc cât cinci piersici, iar trei piersici cântăresc cât opt nuci. Care este valoarea lui n, dacă trei mere cântăresc cât n nuci?

4. **(20p.)** Într-o clasă sunt 30 de elevi. Câţi băieţi şi câte fete sunt, ştiind că, dacă băieţii ar fi cu 2 mai puţini, atunci jumătate din numărul lor ar reprezenta de două ori mai mult decât a treia parte din numărul fetelor?

5. **(20p.)** În clasa noastră sunt 13 băieţi şi trebuie aleşi 11 (fără să conteze ordinea alegerii sau postul pe care vor juca) ca să formeze o echipă de fotbal. În câte moduri se poate forma echipa?



Notă:

- Se acordă **10p.** din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 45 de minute şi 15 minute pentru acomodarea cu subiectul.

Colegiul Național **Emil Racoviță** Iași

Excelență în educație

leris

Subiect testare Leris – 2022

Varianta de lucru 5

1. **(20p.)** Determinaţi toate numerele $\overline{abc}$ pentru care cifrele a, b şi c verifică, în acelaşi timp, egalităţile:

$ac + 4bc + c = 78$ *şi* $a + 4b = 12$.

2. **(20p)** O echipă formată din 6 muncitori poate termina o lucrare în 20 de zile, muncind câte 8 ore pe zi. După patru zile de la începutul lucrării, 2 muncitori se îmbolnăvesc, ceilalţi patru rămânând să termine lucrarea muncind câte 6 ore pe zi. În câte zile poate fi terminată lucrarea?

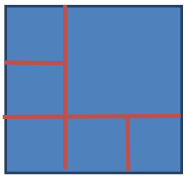
3. **(10p)** Într-un bloc sunt 39 de apartamente cu 4 şi 3 camere. Pentru fiecare apartament se achiziţionează câte un router wifi de ultimă generaţie cu exact atâtea antene câte camere are apartamentul. Ştiind că, în total, router-ele cumpărate au 141 de antene, stabiliţi câte apartamente de fiecare fel sunt în bloc.

4. **(20p.)**Pentru dotarea sălilor de clasă dintr-un colegiu cu aparatură necesară comunicării digitale, au fost achiziţionate 91 de dispozitive: tablete, laptop-uri şi televizoare QLED. Ştiind că o treime din numărul tabletelor este egal atât cu jumătate din numărul laptop-urilor, cât şi cu două treimi din numărul televizoarelor, să se afle numărul maxim de săli care pot fi dotate cu exact un televizor QLED, o tabletă şi un laptop.

5. **(20p.)**Prin construcţia segmentelor care unesc mijloacele laturilor opuse într-un pătrat se împarte pătratul iniţial în şase pătrate, nu neapărat toate cu laturile egale (ca în figură).

a) Arătaţi că orice pătrat se poate împărţi în 9 pătrate.

b) Arătaţi că orice pătrat se poate împărţi în 2022 pătrate.



Notă:

Se acordă**10p.** din oficiu.

Timpul efectiv de lucru este de 45 de minute şi 15 minute pentru acomodarea cu subiectul.

Colegiul Național **Emil Racoviță** Iași
Excelență în educație

leris

Subiect testare Leris – 2022

Varianta de lucru 6

1. **(20p)** Găsiţi numerele de forma $\overline{abc}$ ştiind că $3 \cdot \overline{ab} = 5 \cdot \overline{ca}$

2. **(20p)** Împărţind câteva numere consecutive la 7 obţinem suma resturilor egală cu 7 şi suma câturilor egală cu 101. Aflaţi numerele.

3. **(10p)** Ioan, Ana şi Matei doresc să cumpere fiecare o carte de acelaşi fel, dar constată că le lipsesc 5 lei, 10 lei respectiv 15 lei. Dacă ar pune toţi banii pe care îi au împreună, ar putea cumpăra exact două astfel de cărţi. Aflaţi care este preţul unei cărţi şi ce sumă de bani are fiecare copil.

4. **(20p)** Suma vârstelor a trei fraţi este 57. Când cel mai mic se năştea, ceilalţi doi fraţi aveau împreună 21 de ani iar un sfert din vârsta celui mare era cât a treia parte din vârsta celui mijlociu. Câţi ani are fiecare acum ?

5. **(20p)** Se consideră şirul de grupe : (1;2;3), (3;4;7), (5;6;11), (7;8;15), (9;10;19),....
   a) Determinaţi grupa care ocupă locul 100 în acest şir.
   b) Pe ce poziţie se află în şir grupele care conţin numărul 2103?

Notă:
Se acordă **10p** din oficiu.
Timpul de lucru: 60 de minute (15 minute - familiarizarea cu subiectele, 45 de minute - timpul efectiv de lucru)**.**

Colegiul Național **Emil Racoviță** Iași
Excelență în educație

leris

Subiect testare Leris – 2022

Varianta de lucru 7

1. **(20p)** Aflaţi numărul a care verifică egalitatea:
$$\{450 - [1550 - 10 \cdot (a - 12)] : 4\} : 5 = 15$$

2. **(20p)** Se ştie că a, b, c sunt trei numere naturale astfel încât
$a + b = 23$ şi $2a + c = 35$.
a) Calculaţi suma $8a + 2b + 3c$;
b) Aflaţi numerele a, b, c, în cazul în care două dintre ele sunt egale.

3. **(10p)** Suma a trei numere naturale este 104. Al doilea număr este cu 3 mai mare decât dublul primului număr, iar al treilea de 3 ori mai mic decât diferenţa primelor două numere. Aflaţi numerele.

4. **(20p)** La intrarea în clasa pregătitoare Elena avea 6 ani, iar părinţii ei aveau împreună 62 de ani. Dacă împărţim suma vârstelor actuale ale celor trei la vârsta actuală a Elenei, obţinem câtul 7 şi restul 6. Care este vârsta actuală a Elenei?

5. **(20p)** Fie şirul numerelor naturale de nouă cifre, fiecare având suma cifrelor egală cu 19.
   a) Scrieţi cel mai mic şi cel mai mare număr din acest şir;
   b) Dacă numerele din şir ar fi scrise în ordine crescătoare, aflaţi numerele de pe locurile 11, respectiv 27.

Notă:
Se acordă **10p** din oficiu.
Timpul de lucru: 60 de minute (15 minute - familiarizarea cu subiectele, 45 de minute - timpul efectiv de lucru)**.**

Colegiul Național
Emil Racoviță Iași
Excelență în educație

leris

Subiect testare Leris – 2022

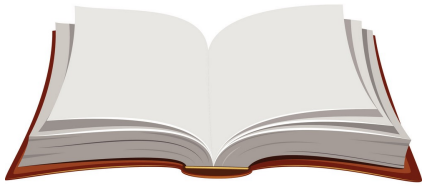
Varianta de lucru 8

1. **(20p)** Aflaţi numărul x care verifică egalitatea:
$$81 + 10 \cdot [362 - 10 \cdot (x + 24:4)] - 3 \cdot 7 + 42:2 = 701$$

2. **(20p)** Aflaţi cel mai mic şi cel mai mare număr de forma $\overline{abcd}$ ştiind că $c = a:2$ şi $d = 4 \cdot a$.

3. **(10p)** Aflaţi numerele naturale de 3 cifre care se măresc de 9 ori dacă li se adaugă o cifră în faţă.

4. **(20p)** Aflaţi numărul maxim de pagini al unei cărţi, ştiind că cifra 2 s-a folosit, la numerotarea paginilor sale, de 174 ori.



5. **(20p)** Suma a trei numere naturale este 86. Două dintre ele sunt impare consecutive, iar dublul unuia dintre acestea două, plus triplul celui de-al treilea, fac împreună 152. Aflaţi numerele.

Notă:
Se acordă **10p** din oficiu.
Timpul de lucru: 60 de minute (15 minute - familiarizarea cu subiectele, 45 de minute - timpul efectiv de lucru)**.**

COLEGIUL NAȚIONAL BILINGV "GEORGE COȘBUC"

PROBĂ DE APTITUDINI ȘI CUNOȘTINȚE PENTRU CLASA a V-a – SESIUNEA IUNIE 2020

MATEMATICĂ
VARIANTA 2

Nume_____
Inițiala tatălui_____
Prenume_____

Școala de proveniență_____

Profesor supraveghetor	Semnătura

1)Rezultatul calculului :

[(348:12 – 676 : 26) x 3 : 9 – 1] x 15 + 1 este:

a) 0 b) 16 c) 1 d) 101 e) niciun răspuns corect

(8 puncte)

2) Într-un parc sunt 15 animale: veverițe, căței și pisici. Stim că exact 10 nu sunt veverițe și exact 8 nu sunt căței. Câte pisici sunt în parc?

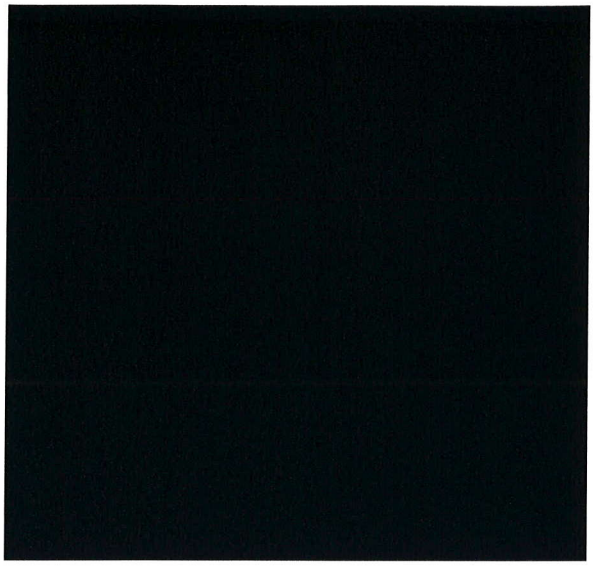
a) 4 b) 3 c) 2 d) 10 e) 8

(8 puncte)

3)Calculați a din egalitatea:

1215 - [130 + (11 x 3 + 15 x a)] x 5 = 250

(14 puncte)



(15 puncte)

4) Suma a trei numere naturale este 888. Un sfert din primul număr este egal cu o treime din al doilea, iar al treilea este cu 8 mai mare decât diferența primelor două. Află cele 3 numere.

(Se cere planul de rezolvare)

La exercitiile 1 și 2 se încercuiește răspunsul corect
La exercițiile 3 și 4 se scrie rezolvarea completă
Toate subiectele sunt obligatorii.
Se acordă 5 puncte din oficiu.
V2

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ
COLEGIUL NAŢIONAL ,,EMIL RACOVIŢĂ" CLUJ-NAPOCA
Str. Mihail Kogălniceanu nr. 9-11, Cluj-Napoca, Tel. Fax: +(40)264-591825; 431930
web : www.e-racovita.ro; e-mail: racovitacj@gmail.com

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

Concursul claselor a IV-a „MICUL RACOVIŢIST" 2018

MATEMATICĂ

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 50 minute.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu.**

Problema nr. 1 (20 de puncte)

Calculaţi : $530+3\times(95-5\times15):6-14\times25$.

Problema nr. 2 (15 puncte)

Aflaţi numărul necunoscut din relaţia : $30-\{[(6\times a-28):2+24]:5+48\}:13=25$.

Problema nr. 3 (15 puncte)

Suma a trei numere naturale este 479. Primul număr este cel mai mic număr par mai mare decât 245. Al doilea număr este cu 59 mai mic decât primul număr. Calculaţi al treilea număr.

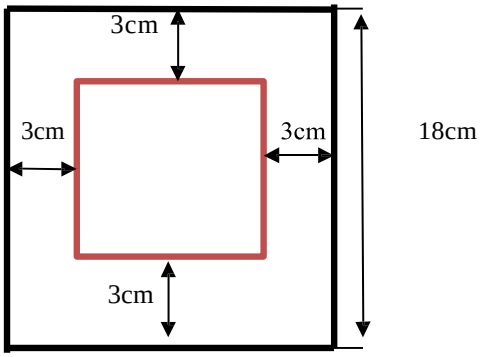
Problema nr. 4 (15 puncte)

Trei fraţi au împreună 24 de bomboane. Pentru a avea fiecare acelaşi număr de bomboane, cel mare îi dă fratelui mijlociu 3 bomboane şi mezinului 5 bomboane.Câte bomboane a avut fiecare la început?

Problema nr. 5 (15 puncte)

Un elev a confecţionat un şerveţel cu formă de pătrat, având latura de 18 cm. Pentru a-l decora a cusut un şnur în interiorul lui, ca în desenul din *Figura* 1. Ce lungime are şnurul ?

Figura 1



Problema nr. 6 (10 puncte)

Arătaţi că oricum am alege patrusprezece numere naturale diferite de zero, astfel încât suma lor să fie egală cu 104 , vor exista printre cele patrusprezece numere, cel puţin două numere egale.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ
COLEGIUL NAŢIONAL ,,EMIL RACOVIŢĂ” CLUJ-NAPOCA
Str. Mihail Kogălniceanu nr. 9-11, Cluj-Napoca, Tel. Fax: +(40)264-591825; 431930
web : www.e-racovita.ro; e-mail: racovitacj@gmail.com

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

Concursul claselor a IV-a „MICUL RACOVIŢIST” 2018

MATEMATICĂ

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Problema 1 (20 de puncte)

$530+3\times(95-5\times15):6-14\times25=$

$=530+3\times(95-75):6-350=$ ……6p

$=530+60:6-350=$ ……6p

$=530+10-350=$……4p

$=540-350=$ ……2p

$=190$……2p

Problema nr.2 (15 puncte)

$\{[(6\times a-28):2+24]:5+48\}:13=5$……2p

$[(6\times a-28):2+24]:5+48=65$……3p

$(6\times a-28):2+24=85$……3p

$6\times a-28=122$……3p

$6\times a=150$……2p

$a=25$……2p

Problema nr. 3 (15 puncte)

Primul număr este 246.....5*p*

Al doilea număr este: 246-59=187.....5*p*

$246+187=433$.....2*p*

Al treilea număr este: 479-433=46.....3*p*

Problema nr. 4 (15 puncte)

Fie a = numărul de bomboane pe care l-a avut la început fratele mai mare ,

b = numărul de bomboane pe care l-a avut la început fratele mijlociu,

c = numărul de bomboane pe care l-a avut la început fratele mai mic.....3*p*

$a-8=b+3=c+5$.....3*p*

$b=c+2$.....2 *p*

$a=c+13$.....2*p*

$3\cdot c+15=24$.....2*p*

$c=3,\ b=5,\ a=16$.....3*p*

Problema nr. 5 (15 puncte)

Lungimea şnurului este 4 l…… 5p

Latura pătratului mic este de l=18 cm – 3 cm – 3 cm = 12 cm ……..... 5p

Lungimea şnurului este 4 l= 48 cm…… 5p

Problema nr. 6 (10 puncte)

Presupunem că nu există două numere naturale diferite de zero egale.....5*p*

Dar avem că $104=S<1+2+3+\cdots+14=(14\times15):2=105$.....4*p*

Există cel puţin două numere naturale nenule egale.....1*p*

Barem:

oficiu 10p

Problema 1

a) a=3x5=15……4p
b=6x18=108……4p,
c=18x a=270……4p
d=bxc=29160……...3p

b) 998 + {7 ×[6 - (4 + 2×n) : 5] - 8} : 10=1000

{7 ×[6 - (4 + 2×n) : 5] - 8} : 10=2
7 ×[6 - (4 + 2×n) : 5] – 8=20
7 ×[6 - (4 + 2×n) : 5]=28……..6p
6 – [(4 + 2×n) : 5]=4
(4 + 2×n) : 5=2
4 + 2×n=10……6p
2×n=6
n=3……...3p

Problema 2:

A,B şi C cele trei numere
A+B+C=416……...3p
A=B:4=C:3……3p
B=4xA, C=3xA……..3p
A+4xA+3xA=8xA=416……5p
A=52……...2p
B=208……2p
C=156…….....2p
Sau cu metoda grafică

Problema 3:

6 nuci + 2 pere =20 prune……1p
1 nucă +6 prune =1 pară…….....1p
6 nuci + 2x (1nucă +6prune) =20 prune…….... 3p
6 nuci + 2 nuci + 12 prune =20 pere……..2p
8 nuci + 12 prune =20prune…….....3p
8 nuci =8prune…… …….....1p
O prună cântăreşte cât o nucă……1p
O nucă şi 6prune cântăresc cât 7prune……..1p
7 prune cântăresc cât o pară…….....2p

Problema 4:

O secvenţă are 1negru+2 roşii+3 galbene+4verzi=10 pătrăţele colorate…...3p
1255 : 10=125, rest 5……..2p
Avem 125 secvenţe şi încă 5 pătrăţele…….....1p
Cele 5 pătrăţele vor fi 1 negru, 2 roşii şi doar 2 galbene…….....2p
Ultimul pătrăţel va fi galben…….....2p
Total pătrăţele roşii= 125x2+2=252……...5p

Problema 5:

Dacă fraţii ar fi gemeni având x ani, tatăl are $\overline{xx}$ ani.
Avem $x + x + \overline{xx} = 47$
$x + x + 10x + x = 47$
$13x = 47$, deci x nu este număr natural
Prin urmare fraţii nu sunt gemeni ……..2p
Tata are vârsta $\overline{xy}$, primul fiu are vârsta x, iar al doilea are vârsta y.
Avem $x + y + \overline{xy} = 47$, unde x şi y cifre nenule
$x + y + 10x + y = 47$
$11x + 2y = 47$ ……..……... 3p
Deoarece 47 este impar, 2y este par, trebuie ca 11x să fie impar, deci x este cifră impară
Pentru x = 1 sau x = 5 obţinem că y nu este cifră…….....2p
Pentru x = 3 obţinem y = 7 , deci tatăl are 37 de ani, fii au 3 şi respectiv 7 ani…….…3p

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ
COLEGIUL NAŢIONAL „EMIL RACOVIŢĂ” CLUJ-NAPOCA
Str. Mihail Kogălniceanu nr. 9-11, Cluj-Napoca, Tel. Fax: +(40)264-591825; 431930
web : www.e-racovita.ro; e-mail: racovitacj@gmail.com

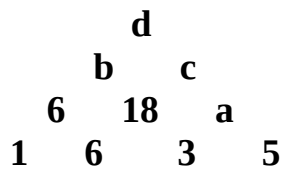
MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

Concursul claselor a IV-a “Micul racoviţist”- 2019

- **Toate subiectele sunt obligatorii**
- **Timpul efectiv de lucru este de 50 de minute**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu**

Problema 1 (30p)

a) Găseşte regula şi află valorile pentru a, b, c şi d, explicând cum ai procedat:



b) Află numărul necunoscut “n” din relaţia:

$$998 + \{7 \times [6 - (4 + 2 \times n) : 5] - 8\} : 10 = 1000$$

Problema 2 (20p)

Suma a trei numere este 416. Primul număr este o pătrime din al doilea şi o treime din al treilea. Care sunt numerele?

Problema 3 (15p)

Şase nuci şi două pere cântăresc cât 20 de prune, iar o nucă şi şase prune cântăresc cât o pară. Câte prune cântăresc cât o pară?

Problema 4 (15p)

O coală de matematică are 1255 pătrăţele colorate astfel: 1 pătrăţel colorat cu negru, urmat de 2 pătrăţele roşii, apoi 3 pătrăţele galbene şi după aceea 4 pătrăţele verzi, repetându-se acest procedeu. Ce culoare are ultimul pătrăţel colorat? Câte pătrăţele roşii sunt în total?

Problema 5 (10p)

Doi fraţi şi tatăl lor au împreună 47 de ani. Vârsta tatălui este un număr natural format din două cifre, iar vârstele fiilor sunt prima, respectiv a doua cifră a vârstei tatălui. Arată că cei doi fii nu sunt gemeni şi apoi află ce vârstă are tatăl şi ce vârstă are fiecare dintre fiii săi.

COLEGIUL NAȚIONAL IAȘI

Strada Arcu nr. 4, Telefon: 0232 214 036, Fax: 0232 264 385
www.colegiulnationaliasi.ro
email: colegiulnationaliasi@yahoo.com

Concursul de Matematică *Alexandru Myller* - 2020

Barem de corectare

Varianta 1

1. $100+2\cdot(80-x+46):4=159$ ……..……...……..5p

   $2\cdot(80-x+46):4=59$ ……..……5p

   $80-x+46=118$ ……..……5p

   $x=8$ ……..……..……5p

2. Fie x numărul grupelor de fete dintre băieți consecutivi; în șir sunt $3x$ fete și $x+1$ băieți 10p

   $3x=2(x+1)$, deci $x=2$ ……..……5p

   $b=3, f=6$, așadar în șir sunt 9 copii ……..……..……5p

3. $100a+10b+c+10b+a=100c+10b+a+10b+c$ ……..……5p

   Rezultă că $a=c$, iar cifra a poate lua 9 valori ...……..…5p

   Cifra b apare ca primă cifră, deci b poate lua 9 valori ……..……..…….....5p

   Există 81 de numere $\overline{abc}$ ca în enunț ……..…… 5p

4. Numărul vrăbiilor aflate pe sârmă într-o anumită seară (începând cu cea de marți) este împătritul numărului celor din seara precedentă ……..……...……..5p

   Vineri seară erau pe sârmă $3072:4=768$ vrăbii ……..……5p

   Joi erau $768:4=192$, miercuri $192:4=48$, iar marți $48:4=12$ vrăbii ……..……..……....5p

   Luni seară erau pe sârmă $12:4=3$ vrăbii ……..……..……5p

5. În final, pe fiecare raft sunt câte $90:3=30$ de cărți ……..……..……...5p

   Reprezentând grafic cărțile de pe primul raft și împărțind segmentul în trei părți egale, obținem că $3a-a=30$, de unde $a=15$. Inițial, pe primul raft erau 45 de cărți ……..……..……5p

   Analog, fie $4b$ numărul cărților aflate pe al doilea raft după prima mutare. Atunci $4b-b=30$, deci $b=10$. Inițial, pe al doilea raft erau $40-15=25$ de cărți ……..……..……...5p

   Numărul cărților aflate la început pe cel de-al treilea raft era $30-10=20$ ……..……..…….. 5p

6. Numărul mai mare are, obligatoriu, trei cifre, iar prima cifră a acestuia trebuie să fie 1. Fie $\overline{1ab}$ numărul mai mare ……..……..……..5p

   Dacă se șterge prima cifră, numărul mai mic este $\overline{ab}$. Din $\overline{1ab}+\overline{ab}=172$ obținem că $\overline{ab}=36$, deci numerele sunt 136 și 36 ……..……..……..5p

   Dacă se șterge a doua cifră, numărul mai mic este $\overline{1b}$. Din $\overline{1ab}+\overline{1b}=172$ obținem că $10a+2b=62$, de unde $a=6, b=1$ sau $a=5, b=6$. Numerele sunt 161 și 11 sau 156 și 16 ……..……..……..5p

   Dacă se șterge a treia cifră, numărul mai mic este $\overline{1a}$. Din $\overline{1ab}+\overline{1a}=172$ obținem că $11a+b=62$, de unde $a=5, b=7$. Numerele sunt 157 și 15 ……..……..……..5p

COLEGIUL NAȚIONAL IAȘI

Strada Arcu nr. 4, Telefon: 0232 214 036, Fax: 0232 264 385
www.colegiulnationaliasi.ro
email: office@cniasi.ro

Concursul de matematică „Alexandru Myller”
15 mai 2021

Barem de corectare

1.

$33+(a+b)\times 5=2021:47=43$	5p
$(a+b)\times 5=10$	5p
$a+b=2$	5p
$\begin{cases}a=2\\b=0\end{cases};\begin{cases}a=1\\b=1\end{cases};\begin{cases}a=0\\b=2\end{cases}$	5p

2.

Cele 8 manuale pe care le-a predat cântăresc 7kg – 5kg = 2 kg.	10p
2 kg = 2000 g	5p
Un manual cântărește 2000 : 8 = 250 grame.	5p

3.

$\overline{ab0}=7\times\overline{ba}+45$, iar $\overline{ba}>45$	5p
Obținem că $31a=20b+15$	5p
Rezultă că $a=5$	5p
iar $b=7$, deci numărul căutat este 570.	5p

4.

a) Ultimul termen din șir este 199	5p
$1+3+5+7+...+199=10000$	5p
b) În fiecare grupă de cinci numere din șir, unul este colorat cu roșu, așadar avem 20 de numere roșii.	5p
c) Există 1 număr roșu de o cifră, 9 numere roșii de două cifre și 10 numere roșii de trei cifre. Numărul total de cifre roșii este 1 + 18 + 30 = 49.	5p

5.

Dacă în prima zi citește 6 pagini sau mai puțin, numărul maxim de pagini citite este $\mathbf{6+10+11+12=39}$, prea mic.	5p
Dacă în prima zi citește 9 pagini sau mai mult, numărul minim de pagini citite este $\mathbf{9+10+11+18=48}$, prea mare.	5p
Rezultă că în prima zi Matei citește fie 7 pagini, fie 8 pagini. În primul caz, în ultima zi citește 14 pagini, iar în cea de-a doua și cea de-a treia zi împreună citește 23 de pagini. Singurele variante convenabile sunt (7, 10, 13, 14) și (7, 11, 12, 14).	6p
În al doilea caz, în ultima zi citește 16 pagini, iar în cea de-a doua și cea de-a treia zi împreună citește 20 de pagini. Singura variantă convenabilă este (8, 9, 11, 16). Problema are trei soluții.	4p

6.

Cele două cifre de 8 pot fi așezate în $9+8+7+...+1=45$ moduri.	5p
După ce s-au așezat cifrele de 8, rămân 8 locuri, pe care cifrele de 7 se pot așeza în $7+6+5+...+1=28$ moduri.	5p
Cele șase cifre de 9 ocupă cele șase locuri rămase.	5p
Sunt $45\times 28=1260$ numere cu proprietățile dorite.	5p

Notă: Orice altă soluție corectă, diferită de cea din barem, va primi punctajul corespunzător.

COLEGIUL NAŢIONAL IAŞI

Concursul de matematică "Alexandru Myller"

Clasa a IV-a, ediţia a XIV-a

11 martie 2017

Varianta 2

- Pe foaia de concurs scrieţi rezolvările complete.
- Fiecare problemă valorează 20 de puncte. Se acordă 30 de puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 45 de minute.

1. **Pentru 2 pixuri şi 3 caiete Andrei plăteşte 28 de lei, iar pentru 3 pixuri şi 2 caiete plăteşte 27 lei. Calculaţi cât plăteşte Andrei pentru 3 pixuri şi 3 caiete.**

2. **Aflaţi toate numerele care au produsul cifrelor 20, suma cifrelor 10 şi se împart exact la 5.**

3. **Ilinca rezolvă zilnic 8 probleme şi 6 exerciţii. Ea şi-a propus să rezolve 120 probleme şi 110 exerciţii. Aflaţi după câte zile numărul de exerciţii rămase de rezolvat va fi egal cu numărul problemelor pe care Ilinca trebuie să le mai rezolve.**

4. **Se consideră următorul tabel cu două linii:**

Linia 1	**5**	**8**	**11**	**14**	**17**	**……..**	**998**
Linia 2	**1000**	**997**	**994**	**991**	**988**	**…….**	**7**

Determinaţi pe ce linie este numărul 673 şi ce număr de pe cealaltă linie îi corespunde acestuia.

5. **Determinaţi numărul de patru cifre distincte** $\overline{abcd}$ **pentru care** $a+b=\overline{cdda}-\overline{abba}$ **.**

6. **Determinaţi *n* numere naturale consecutive, ştiind că, dacă împărţim aceste numere la 7, atunci suma resturilor obţinute este 9, iar suma câturilor acestor împărţiri este 87.**

COLEGIUL NAŢIONAL IAŞI
Strada Arcu nr. 4, Telefon: 0232 214 036, Fax: 0232 264 385
www.colegiulnationaliasi.ro
email: colegiulnationaliasi@yahoo.com

Concursul de matematică *Alexandru Myller*

Clasa a IV-a, ediţia a XV-a

12 mai 2018

- Pe foaia de concurs scrieţi rezolvările complete.
- Ordinea problemelor nu este obligatorie.
- Fiecare problemă valorează 20 de puncte. Se acordă 30 de puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 45 de minute.

1. Suma a două numere naturale este cu 2 mai mare decât diferenţa lor. Ce rest se obţine atunci când împărţim numărul mai mare la numărul mai mic?

2. Un vas plin cu apă cântăreşte 15 kg. După ce golim trei sferturi din el, vasul cântăreşte 6 kg. Cât cântăreşte vasul gol?

3. Pe o tablă sunt scrise numerele 1, 2, 3, 4, ..., 20. Ana şi Dan joacă un joc. Prima dată, Ana şterge două numere oarecare şi scrie în loc suma numerelor şterse mărită cu 1. Apoi, Dan şterge două numere oarecare şi scrie în loc suma numerelor şterse micşorată cu 2. Ana şterge două numere oarecare şi scrie în loc suma numerelor şterse mărită cu 3, după care Dan şterge două numere oarecare şi scrie în loc suma lor, micşorată cu 4. Copiii continuă până când rămâne un singur număr pe tablă. Care este numărul rămas?

4. Se consideră numerele naturale $4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, \ldots, n$. Aflaţi cea mai mare valoare posibilă a numărului n, ştiind că în înşiruirea de mai sus există exact 50 de numere care se termină cu cifra 0.

5. Determinaţi numerele naturale $\overline{abc}$ cu proprietatea că $\overline{ab} = 3 \cdot \overline{bc}$.

6. Suntem în anul 2018. Adunând anii de naştere a trei fraţi, obţinem suma 6034. Suma vârstelor celor doi fraţi mai mici este egală cu vârsta celui mai mare. Aflaţi vârsta actuală a celui mai mare dintre fraţi.

COLEGIUL NAŢIONAL IAŞI
Strada Arcu nr. 4, Telefon: 0232 214 036, Fax: 0232 264 385
www.colegiulnationaliasi.ro
email: colegiulnationaliasi@yahoo.com

Concursul de Matematică „Alexandru Myller”

25 mai 2019

1. Aflați numărul natural x din egalitatea:

$975-\lfloor 4\cdot(x:3-599):8-32\rfloor:5=974.$

2. Aflați numerele naturale care împărțite la un număr de două cifre dau câtul 6 și restul 97.

3. Bunicul le aduce nepoților săi Rareș, Sabina și Alex 28 de gutui. Alex primește jumătate din numărul gutuilor primite de Sabina, iar Rareș primește de două ori mai multe gutui decât Sabina. Câte gutui a primit fiecare?

4. Maria citește o carte în trei zile. În prima zi citește două cincimi, a doua zi o cincime din rest, iar a treia zi ultimele 120 pagini. Câte pagini are cartea?

5. Ionuţ are 92 nuci şi 135 migdale. El manâncă o nucă şi o migdală zilnic. După câte zile numărul nucilor rămase va fi exact jumătate din numărul migdalelor rămase?

6. Se consideră numerele naturale 2, 5, 8, 11, 14, 17, ...
   a) Stabiliți dacă 2019 este termen al șirului.
   b) Determinați al 2019-lea termen al șirului.

NOTĂ: La toate problemele se cer rezolvări complete.
Timp de lucru 60 de minute (15 minute pentru acomodarea cu subiectele și 45 minute pentru redactarea rezolvărilor).
Fiecare problemă valorează 20 de puncte. Se acordă 30 de puncte din oficiu.

MULT SUCCES!

COLEGIUL NAȚIONAL IAȘI

Strada Arcu nr. 4, Telefon: 0232 214 036, Fax: 0232 264 385
www.colegiulnationaliasi.ro
email: colegiulnationaliasi@yahoo.com

Concursul de Matematică
Alexandru Myller – 2020

Varianta 1

Pe foaia de concurs se scriu rezolvările complete

1. Aflați numărul natural x din egalitatea

$$200-\left[100+2\cdot(80-x+46):4\right]=41.$$

2. Câțiva copii stau așezați într-un singur rând, astfel încât între oricare doi băieți consecutivi stau câte trei fete, iar în capetele rândului sunt băieți. Numărul fetelor din rând este de două ori mai mare decât numărul băieților. Aflați câți copii sunt în rând.

3. Stabiliți câte numere naturale $\overline{abc}$ au proprietatea că $\overline{abc}+\overline{ba}=\overline{cba}+\overline{bc}$.

4. Pe o sârmă de telegraf de adună, în fiecare seară, vrăbiile. Dacă o vrabie vine într-o seară pe sârmă, ea vine şi în seara următoare, aducând cu sine trei vrăbii care nu au mai fost pe sârmă în serile precedente. Sâmbătă seara, Radu numără pe sârmă 3072 de vrăbii. Câte vrăbii au fost în seara zilei de luni a aceleiaşi săptămâni?

5. Pe trei rafturi ale unei biblioteci se află, în total, 90 de cărți. A treia parte din cărțile de pe primul raft sunt mutate pe al doilea raft. Apoi, un sfert din cărțile de pe al doilea raft sunt mutate pe al treilea. După aceste operații, pe fiecare dintre cele trei rafturi se află acelaşi număr de cărți. Câte cărți au fost, la început, pe fiecare raft?

6. Suma a două numere naturale este 172. Dacă ştergem una dintre cifrele unui număr, îl obținem pe cel de-al doilea. Determinați toate perechile de numere care verifică aceste condiții.

Notă:

1. *Timp de lucru efectiv: 45 minute*
   Se adaugă 5 minute pentru familiarizarea cu subiectele
2. *Fiecare problemă se notează cu 20 puncte*
3. *Se acordă din oficiu 30 puncte*

COLEGIUL NAȚIONAL IAȘI

Strada Arcu nr. 4, Telefon: 0232 214 036, Fax: 0232 264 385
www.colegiulnationaliasi.ro
email: office@cniasi.ro

Concursul de matematică „Alexandru Myller”

15 mai 2021

Varianta 1

Pe foaia de concurs se scriu rezolvările complete

1. Aflați numerele naturale a și b care verifică egalitatea:

$$2021 : [33 + (a + b) \times 5] = 47.$$

2. Ema predă la sfârşitul anului şcolar manualele de matematică ale celor 24 de elevi din clasa sa. Ea își golește întâi ghiozdanul, apoi pune toate cele 24 manuale în el; astfel, ghiozdanul plin cântărește 7 kg. După ce predă 8 manuale, ghiozdanul cântăreşte 5 kg. Câte grame cântăreşte un manual?

3. Determinați numărul natural $\overline{ab0}$ care, împărțit la $\overline{ba}$, dă câtul 7 și restul 45.

4. Considerăm șirul primelor o sută de numere naturale impare: 1, 3, 5, 7, 9, 11, ... Colorăm cu roșu acele numere care, prin împărțire la 5, dau restul 2.
a) Calculați suma celor o sută de numere care formează șirul.
b) Câte numere roșii există în șir?
c) Câte cifre au, în total, toate numerele roșii?

5. Matei are de citit 44 de pagini în patru zile. În fiecare zi, el citește mai multe pagini decât în ziua precedentă. În ultima zi, citește de două ori mai multe pagini decât în prima zi. Câte pagini citește Matei în fiecare dintre cele patru zile?

6. Stabiliți câte numere de zece cifre se pot scrie folosind două cifre de 7, două cifre de 8 și șase cifre de 9.

Notă:

1. ***Timp de lucru efectiv 45 minute.***
   Se adaugă 15 minute pentru familiarizarea cu subiectele.
2. ***Fiecare problemă se notează cu 20 puncte***
3. ***Se acordă din oficiu 30 puncte***

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ
COLEGIUL NAŢIONAL „EMIL RACOVIŢĂ" CLUJ-NAPOCA
Str. Mihail Kogălniceanu nr. 9-11, Cluj-Napoca, Tel. Fax: +(40)264-591825; 431930
web : www.e-racovita.ro; e-mail: racovitacj@gmail.com

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

Concursul claselor a IV-a „MICUL RACOVIŢIST" 2017

MATEMATICĂ

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Problema 1 (20 de puncte)

$64-64:\left[640:4-19\times\left(245:5-246:6\right)\right]=$

$=64-64:\left[160-19\times\left(49-41\right)\right]=$ ..... $6p$

$=64-64:\left(160-19\times 18\right)=$ ..... $3p$

$=64-64:\left(160-152\right)=$ ..... $4p$

$=64-64:8=$ ..... $3p$

$=64-8=$ ..... $2p$

$=56$ ..... $2p$

Problema 2 (15 puncte)

$\left[940+5\times\left(12+a\right)-1785\right]:3+5=410 \quad |-5$

$\left[940+5\times\left(12+a\right)-1785\right]:3=405 \quad |\cdot 3$ ..... $3p$

$940+5\times\left(12+a\right)-1785=1215 \quad |+1785$ ..... $3p$

$940+5\times\left(12+a\right)=3000 \quad |-940$ ..... $3p$

$5\times\left(12+a\right)=2060 \quad |:5$ ..... $3p$

$12+a=412 \quad |-12$ ..... $2p$

$a=400$ ..... $1p$

Problema 3 (15 puncte)

$D = C \times \hat{I} + R$ 1p

$D = 3 \times \hat{I} + 10$ 2p

$D + \hat{I} + C + R = 143$ 2p

$4 \times \hat{I} + 23 = 143 \quad |-23$ 3p

$4 \times \hat{I} = 120 \quad |:4$ 3p

$\hat{I} = 30$ 2p

$D = 100$ 2p

Problema 4 (15 puncte)

$P_{gard} = 426\,m \Rightarrow \quad 2 \times \left(L_{gard} + l_{gard}\right) = 426 \quad |:2$ 2p

$$\left.\begin{array}{l} L_{gard} + l_{gard} = 213 \\ L_{gard} = L_{teren} + 24 \,;\, l_{gard} = l_{teren} + 24 \\ L_{teren} + l_{teren} + 48 = 213 \end{array}\right\}$$ 4p

$$\left.\begin{array}{l} L_{teren} + l_{teren} = 165 \\ L_{teren} = l_{teren} + 35 \\ 2 \times l_{teren} + 35 = 165 \end{array}\right\}$$ 5p

$l_{teren} = 130 : 2 = 65(m)$ 2p

$L_{teren} = 100\,m$ 2p

Problema 5 (10 puncte)

Termenul din mijloc este termenul de pe poziţia 44.....2p

Numerele fiind consecutive, diferenţa dintre numărul de pe poziţia 44 şi numărul de pe poziţia unu este 43 ; primul număr este : 200-43=157.....3p

Diferenţa dintre numărul de pe ultima poziţie şi numărul de pe prima poziţie este 86, prin urmare ultimul număr se obţine ca suma dintre primul număr şi 86 adică : 157+86=243....3p

aşadar primul număr este 157 iar ultimul număr este 243.

S=157+158+⋯+242+243

+

S=243+242+⋯+158+157

$2 \times S = \underbrace{400 + 400 + \cdots + 400}_{\text{de 87 de ori}}$

$S = 400 \times 87 : 2 = 17400$.....2p.

Problema 6 (15 puncte)

Fie a= numărul merelor din primul sac

b= numărul merelor din al doilea sac $\qquad a+b+c=72$

c= numărul merelor din al treilea sac

- La final în fiecare sac sunt 72:3= 24 de mere.....2*p*
- din primul sac s-a scos un sfert din numărul merelor deci au rămas trei sferturi, adică 24 de mere ; un sfert din numărul merelor din primul sac este 8, prin urmare la început $a = 32$ mere.....5*p*
- Cele 8 mere din primul sac s-au mutat în cel de al doilea sac , prin umare acum avem în al doilea sac b+8 mere ; o treime din b+8 mere se mută în al treilea sac prin urmare rămîn două treimi în al doilea; două treimi din b+8 mere reprezintă 24 de mere, adică $b+8=24:2\times3=36 \Rightarrow b=36-8=28$ mere la început 5*p*
- $c=72-(a+b)=72-(32+28)=72-60=12$ mere.....3*p*

  Aşadar, la început, în saci erau : $a = 32$ mere, $b = 28$ mere respectiv c = 12 mere.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ
COLEGIUL NAŢIONAL ,,EMIL RACOVIŢĂ” CLUJ-NAPOCA
Str. Mihail Kogălniceanu nr. 9-11, Cluj-Napoca, Tel. Fax: +(40)264-591825; 431930
web : www.e-racovita.ro; e-mail: racovitacj@gmail.com

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAŢIONALE

Concursul claselor a IV-a „MICUL RACOVIŢIST” 2017

MATEMATICĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Timpul efectiv de lucru este de 50 minute.
- Se acordă 10 puncte din oficiu.

.

Problema 1 (20 de puncte)

Calculaţi : $64-64:\left[640:4-19\times\left(245:5-246:6\right)\right]$.

Problema 2 (15 puncte)

Aflați numărul natural a din egalitatea: $\left[940+5\times\left(12+a\right)-1785\right]:3+5=410$.

Problema 3 (15 puncte)

Câtul împărţirii a două numere naturale nenule este 3, iar restul 10. Dacă adunăm deîmpărţitul, împărţitorul, câtul şi restul obţinem 143. Aflaţi cele două numere.

Problema 4 (15 puncte)

Un teren de fotbal este împrejmuit cu un gard lung de 426 m. Gardul este construit la 12 m de marginea terenului, iar lungimea terenului este mai mare decât lăţimea cu 35 m. Aflaţi dimensiunile terenului de fotbal.

Problema 5 (10 puncte)

Într-un şir de 87 de numere naturale consecutive, numărul de la mijloc este 200. Aflaţi primul şi ultimul număr al şirului şi suma tuturor numerelor din şir.

Problema 6 (15 puncte)

În trei saci sunt în total 72 de mere. Un sfert din merele din primul sac se mută în al doilea sac. Apoi o treime din numărul merelor aflate acum în al doilea sac se mută în al treilea. În final în fiecare sac se află același număr de mere. Câte mere au fost la început în fiecare sac?

Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinaţi numărul real x pentru care numerele 1, $2x+2$ şi 7 sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **2.** Calculaţi distanţa dintre punctele de intersecţie cu axa Ox a graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+3$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2+4}=x+2$.

5p **4.** Determinaţi câte numere naturale impare $\overline{ab}$ se pot forma, ştiind că $a,b\in\{2,3,4,5\}$ şi $a\neq b$.

5p **5.** În dreptunghiul $ABCD$, cu $AB=8$ şi $BC=6$, se consideră vectorul $\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AD}$, unde $\{O\}=AC\cap BD$. Calculaţi lungimea vectorului $\vec{v}$.

5p **6.** Calculaţi sinusul unghiului A al triunghiului ABC în care $AB=6$, $BC=10$ şi $\sin C=\frac{3}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Pentru fiecare număr real a se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculaţi $\det(A(0))$.

5p **b)** Determinaţi valorile reale ale lui a pentru care $5A(a)-(A(a))^2=4I_3$.

5p **c)** Determinaţi inversa matricei $A(2)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-mX^2+3X-1$, unde m este număr real.

5p **a)** Calculaţi $f(2)-f(-2)$.

5p **b)** Determinaţi restul împărţirii lui f la $X+2$, ştiind că restul împărţirii polinomului f la $X-2$ este egal cu 9.

5p **c)** Determinaţi numerele reale m pentru care $x_1^3+x_2^3+x_3^3=3$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$.

5p **a)** Calculaţi $f'(x)$, $x\in(-1,1)$.

5p **b)** Verificaţi dacă funcţia f este descrescătoare pe intervalul $(-1,1)$.

5p **c)** Determinaţi punctele de inflexiune a funcţiei f.

2. Pentru fiecare număr natural n se consideră numărul $I_n=\int_1^2 x^n e^x\,dx$.

5p **a)** Calculaţi I_0.

5p **b)** Arătaţi că $I_1=e^2$.

5p **c)** Demonstraţi că $I_{n+1}+(n+1)I_n=2^{n+1}e^2-e$, pentru orice număr natural n.

Concursul "Micii Campioni" – 2019

Proba a-2a , 16 mai 2019

Pentru fiecare problemă, marchează în tabelul primit litera corespunzătoare răspunsului tău. Un singur răspuns este corect!

1. Marius calculează suma primelor 21 de numere naturale. Rezultatul obţinut este:

a) 231	b) 190	c) 210	d) 200	e) 221

2. La balul spiriduşilor sunt premiaţi toţi spiriduşii ale căror vârste , în ani, reprezintă numere naturale de trei cifre care au produsul cifrelor egal cu 8. Ştiind că nu există doi spiriduşi care au aceeaşi vârstă, care este numărul maxim de spiriduşi premiaţi?

a) 3	b) 6	c) 12	d) 10	e) 9

3. Suma numerelor de forma $\overline{ab}$ pentru care $a<b$ şi $\overline{ab}+\overline{ba}=143$ este egală cu:

a) 174	b) 143	c) 286	d) 274	e) 429

4. Fiecare cifră a numărului 20192019 este scrisă cu una din culorile roşu, galben, albastru, verde sau portocaliu. Cifrele distincte sunt scrise cu culori diferite, iar cifrele egale sunt scrise cu aceeaşi culoare. Numărul de moduri diferite în care se poate scrie numărul este egal cu:

a) 110	b) 100	c) 120	d) 56	e) 60

5. Un ceas electronic afişează timpul de la ora 00:00 la ora 23:59. De câte ori este afişată pe ecranul ceasului cifra 3 în acest interval de timp?

a) 486	b) 564	c) 384	d) 561	e) 360

6. La o împărţire, împărţitorul este un număr de două cifre, câtul este 3, iar restul este 98. Suma cifrelor deîmpărţitului este egală cu:

a) 15	b) 20	c) 14	d) 17	e) 18

7. Cu cinci ani în urmă, vârsta tatălui era de şapte ori mai mare decât vârsta fiului. Acum, suma vârstelor celor doi este egală cu 42 ani. Câţi ani are tatăl în prezent?

a) 30	b) 29	c) 28	d) 33	e) 40

8. Monica locuieşte la bloc. Ea coboară în curte la joacă, dar îşi uită mingea în casă. Fratele ei o ajută şi lasă mingea să cadă de la balcon, aflat la înălţimea de 16 metri. Care este distanţa totală parcursă de minge până când atinge solul a cincea oară, dacă ştim că mingea se ridică, de fiecare dată când atinge solul, la jumătatea distanţei de la care cade?

a) 46 m	b) 34 m	c) 32 m	d) 36 m	e) 48 m

9. Mihai spune că Lucian minte. Lucian spune că Andrei minte. Andrei spune că Eugen minte, iar Eugen spune că Andrei minte. Câte persoane , dintre cele patru, mint.

a) 1	b) 2	c) 3	d) 4	e) 0

10. Un drumeţ a parcurs în prima zi $\frac{1}{3}$ din drum şi încă 6 km. A doua zi, drumeţul a parcurs $\frac{1}{3}$ din drumul rămas şi încă 6 km, iar, a treia zi, drumeţul a parcurs restul de 10 km. Câţi kilometri a parcurs drumeţul în prima zi?

a) 45	b) 21	c) 18	d) 15	e) 27

11. Într-o anumită lună a anului, zilele de luni sunt mai multe decât zilele de marți, iar zilele de duminică sunt mai multe decât cele de sâmbătă. În ce zi a săptămânii a fost ziua de 5 a acestei luni?

a) luni	b) vineri	c) miercuri	d) joi	e) duminică

12. Anca și Ioana locuiesc în același bloc și învață la aceeași școală. Anca merge din fața blocului până la școală timp de 30 minute, iar Ioana parcurge același drum în 20 de minute. Într-o zi, Anca a plecat din fața blocului spre școală cu 5 minute mai devreme decât Ioana. După câte minute o ajunge din urmă Ioana pe Anca?

a) 5	b) 12	c) 20	d) 10	e) 15

13. Câte valori poate lua numărul natural n știind că că numerele $3\times n$ și $4\times n$ au împreună șapte cifre.

a) 35	b) 101	c) 83	d) 333	e) 84

14. Am un trenuleț cu patru vagoane colorate în patru culori: roșu, verde, alb și galben. Vagonul verde nu este nici primul, nici ultimul. Vagonul galben nu este vecin cu cel alb și nici cu cel roșu. Primul vagon este alb. Ce culoare are al treilea vagon?

a) roșu	b) alb	c) verde	d) galben	e) alt răspuns

15. Într-o urnă se află 6 bile albe, 9 bile galbene, 12 bile roșii și 15 bile verzi. Care este numărul maxim de bile ce trebuie extrase din urnă pentru a fi siguri că, în urnă, rămân cel puțin 5 bile roșii?

a) 30	b) 7	c) 37	d) 32	e) 25

COLEGIUL NAȚIONAL DE INFORMATICĂ TUDOR VIANU

Str. Arhitect Ion Mincu nr.10, sector 1, București, România
Tel/fax 021222 66 70; http://www.lbi.ro ; email: lbi@lbi.ro

Concursul „Micii Campioni"
29 iunie 2020

- **Pentru fiecare dintre problemele de tip grilă marchează în tabelul primit litera corespunzătoare răspunsului tău. Un singur răspuns este corect. Dacă vei marca două răspunsuri la o singură problemă, acea problemă nu va fi luată în considerare. Fiecare răspuns corect valorează 5 puncte.**
- **Pentru fiecare dintre cele două probleme care urmează după grile vei redacta pe foaia de concurs rezolvarea completă. Fiecare problemă are un punctaj maxim de 20p.**
- **Toate problemele sunt obligatorii.**
- **Timp de lucru: 2 ore**

Subiectul I. Probleme de tip grilă

1. Un bidon plin cu lapte cântărește 25 kg. Același bidon plin pe jumătate cu lapte cântărește 13 kg. Cât cântărește bidonul gol?

a) 2 kg	b) 100g	c) 1500g	d) 1000g	e) 500g

2. Cu cât este egală suma dintre cel mai mic număr natural format cu 6 cifre distincte și cel mai mic număr natural impar format cu 3 cifre?

a) 120448	b) 102468	c) 102446	d) 102445	e) 102440

3. Vârsta mamei este în prezent cu 22 de ani mai mare decât vârsta fiicei sale. Peste 6 ani vârsta fiicei va fi de trei ori mai mică decât vârsta mamei sale. Câți ani au cele două împreună în prezent?

a) 41 ani	b) 36 ani	c) 27 ani	d) 30 ani	e) 32 ani

4. O treime din tricourile vândute într-un magazin au fost albe, un sfert au fost albastre, iar restul au fost roșii. Știind că s-au vândut mai mult de 150 de tricouri, dar nu mai mult de 160, spuneți câte tricouri roșii s-au vândut în acel magazin.

a) 52	b) 65	c) 39	d) 48	e) 56

5. 10 creioane, 30 de caiete și 70 de rigle costă împreună 240 de lei. 40 de creioane, 30 de caiete si 10 rigle costă împreună 150 de lei. Cât vor costa împreună un creion, un caiet și o riglă?

(Creioanele sunt toate la fel, caietele sunt toate identice, iar riglele au toate același preț.)

a) 5 lei	b) 8 lei	c) 7 lei	d) 6 lei	e) 9 lei

6. Câte numere naturale $\overline{abba}$ verifică egalitatea: $\overline{ab} + \overline{ba} = a \times b + a$

a) 0	b) 1	c) 2	d) 3	e) 4

7. Cristi, Ioana, Diana si George au cumpărat împreună un cadou pentru mama lor. În joacă, unul dintre ei a ascuns cadoul.

Ioana spune: „Nu l-am ascuns eu."

Diana spune: „George l-a ascuns."

Cristi spune: „Nu l-am ascuns eu."

George spune: „Ioana l-a ascuns."

Știind că numai unul dintre ei minte, aflați cine a ascuns cadoul.

a) Cristi	b) Ioana	c) George	d) Diana	e) nu putem afla

8. Anca are o ladă plină cu mere de vânzare. Primului client îi vinde jumătate din mere și încă un măr. Celui de-al doilea client îi vinde jumătate din merele rămase și încă un măr și tot așa mai departe, respectând regula, și pentru ultimul dintre clienți. Știind că Anca a vândut toate merele și că ele au ajuns pentru exact 7 clienți, precizați câte mere au fost la început în ladă.

a) 126	b) 256	c) 252	d) 142	e) 254

Pentru problemele de mai jos scrieți rezolvarea completă pe foaia de concurs.

Subiectul al II-lea (20p)

La etapa finală a unui concurs de matematică, unde au avut de rezolvat o singură problemă, au participat 5 elevi: Anca, Bianca, Costin, Dan și Eliza. Fiecare a obținut un punctaj număr natural de la 2 la 10. Precizați câte puncte a obtinut și pe ce loc este Dan, știind că:

a) oricare doi elevi au punctaje diferite;

b) Anca, Bianca și Costin au obținut împreună 15 puncte;

c) Bianca, Costin și Dan au obținut împreună 12 puncte;

d) Anca are cel mai mare punctaj;

e) Eliza are 6 puncte și este pe locul al treilea.

Subiectul al III-lea (20p)

În cele 64 de pătrățele 1×1 dintr-un tabel pătrat 8×8 (cu 8 linii și 8 coloane, precum tabla de șah) sunt scrise toate numerele naturale de la 1 la 64. Două pătrățele se numesc *vecine* dacă au o latură comună.

Justificați că pentru orice scriere a numerelor, există două pătrățele vecine pentru care diferența dintre numerele înscrise în ele nu este mai mică decât 5.

COLEGIUL NAŢIONAL DE INFORMATICĂ TUDOR VIANU

Str. Arhitect Ion Mincu nr.10, sector 1, Bucureşti, România
Tel/fax 021222 66 70; http://www.lbi.ro ; email: lbi@lbi.ro

Colegiul Naţional de Informatică „Tudor Vianu"

Concursul „Micii campioni" – 2021

Ziua 1, 6 iulie 2021

1. Se ştie că: $\overline{aaa} \times a + \overline{aa} \times a + \overline{aaa} : a - \overline{aa} + a : a = 2020$. Determinaţi cifra a.

2. Trei elevi joacă ping-pong. După fiecare joc, elevul învins este înlocuit de elevul care nu a participat la acel joc. La final s-a constatat că unul dintre elevi a jucat 13 jocuri, iar altul a jucat 27 de jocuri. Jocurile desfăşurate s-au numerotat, în ordine, cu 1, 2, 3, ..., n, unde n este numărul total de jocuri.

a) Determinaţi numărul n.

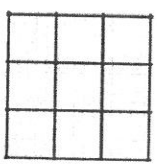
b) La câte jocuri a participat cel de-al treilea elev?

c) La câte jocuri a participat elevul care a pierdut jocul cu numărul 2?

3. Determinaţi cifrele a, b, c, d pentru care $\overline{abcd} + \overline{abc} = 2021$.

4. Doi prieteni s-au angajat să efectueze o lucrare de lungă durată. Ei au început lucrarea la data de 1 ianuarie 2020. Fiecare zi a fiecărui an este considerată zi lucrătoare. Unul dintre prieteni are o zi de odihnă după fiecare trei zile consecutive lucrate, iar celălalt are trei zile de odihnă după fiecare şapte zile consecutive lucrate. Determinaţi ziua calendaristică a anului 2024 în care cei doi prieteni au prima zi de odihnă comună.

5. Doi elevi, Andrei şi Bogdan, desenează pe tablă tabloul de mai jos şi propun următorul joc.



Începând cu Andrei, alternativ, fiecare dintre ei scrie într-un pătrăţel liber al tabloului un număr de la 1 la 9. (Fiecare număr se scrie o singură dată). Câştigă jucătorul care completează primul ultimul pătrăţel liber al unei linii sau coloane astfel încât numerele scrise pe acea linie sau coloană să aibă suma egală cu 15. Arătaţi că unul dintre cei doi elevi poate câştiga de fiecare dată. Care este acesta şi explicaţi strategia lui de câştig.

Notă: - Toate problemele sunt obligatorii.
- Fiecare soluţie corectă a unei probleme valorează 15 puncte.
- Timpul efectiv de lucru este de 2 ore.

COLEGIUL NAȚIONAL DE INFORMATICĂ TUDOR VIANU

Str. Arhitect Ion Mincu nr.10, sector 1, București, România
Tel/fax 021222 66 70; http://www.lbi.ro ; email: lbi@lbi.ro

Colegiul Național de Informatică „Tudor Vianu"

Concursul „Micii campioni" – 2021

Ziua 2 - 7 iulie 2021

- **Pentru fiecare dintre problemele de mai jos încercuiește în tabelul primit litera corespunzătoare răspunsului tău. Un singur răspuns este corect. Dacă vei incercui două răspunsuri la o singură problemă, acea problemă nu va fi luată în considerare. Fiecare răspuns corect valorează 5 puncte.**
- **Timp de lucru 2 ore. Toate subiectele sunt obligatorii.**

1. Se consideră numerele naturale de trei cifre care au suma cifrelor egală cu 5. Câte astfel de numere există?

a) 14	b) 7	c) 15	d) 11	e) 13

2. Într-un magazin de articole sportive sunt de 5 ori mai multe mingi de fotbal decât mingi de handbal. Dacă s-ar vinde 4 mingi de handbal și 40 de mingi de fotbal, în magazin ar mai rămâne de 4 ori mai multe mingi de fotbal decât mingi de handbal. Câte mingi de fotbal și handbal sunt în total în magazin?

a) 216	b) 124	c) 300	d) 144	e) 168

3. Dan are tot atâția frați câte surori. Ana, sora lui, are de două ori mai mulți frați decât surori. Câte surori are Dan?

a) 7	b) 5	c) 3	d) 4	e) 2

4. Suma a trei numere naturale este 120. Dacă măresc cu 1 sfertul primului număr, cu 2 sfertul celui de-al doilea număr și cu 3 sfertul celui de-al treilea număr, obțin numere egale. Care este cel mai mic număr dintre cele trei?

a) 36	b) 40	c) 38	d) 32	e) 44

5. O echipă de muncitori poate termina o lucrare in 6 zile. O altă echipă de muncitori poate termina aceeași lucrare in 10 zile. O a treia echipă poate termina lucrarea in 15 zile. In câte zile termină lucrarea cele trei echipe lucrând împreună?

a) 7 zile	b)5 zile	c) 21 de zile	d) 2 zile	e) 3 zile

6. Mihai stă pe o scară și observă că sub treapta pe care stă sunt tot atâtea trepte câte sunt și deasupra ei. După ce coboară trei trepte constată că acum deasupra treptei pe care stă sunt de trei ori mai multe trepte decât sunt sub aceasta. Câte trepte are scara pe care stă Mihai?

a) 15	b) 17	c) 21	d) 12	e) 13

7. Într-un bloc cu 10 etaje (parter+10 etaje), care are la parter un magazin, locuiesc 10 familii, câte una pe fiecare etaj. Știind că la etajul 2 locuiesc 4 persoane, la etajul 10 locuiesc 6 persoane, iar suma numerelor de persoane de pe oricare trei etaje consecutive este 13, precizați câte persoane locuiesc în bloc.

a) 48	b) 45	c) 42	d) 43	e)40

8. Într-o fermă, în care sunt mai mulţi cai decât raţe, numărul vacilor este egal cu o treime din numărul total al cailor şi al raţelor. Caii şi raţele au în total 100 de capete şi picioare. Câte vaci sunt în fermă?

a) 10	b) 8	c) 12	d) 9	e) 13

9. În pătratul de mai jos suma numerelor de pe fiecare linie, de pe fiecare coloană şi de pe fiecare diagonală este aceeaşi. Să se calculeze suma a+b+c+d+e.

a	b	8
5	c	d
22	e	12

a) 100	b) 45	c) 88	d) 78	e) 97

10. Un biciclist parcurge într-o primă etapă 10 km, iar în a II-a etapă jumatate din drumul pe care îl mai are de parcurs. În cele două etape biciclistul a parcurs cu 9 km mai mult decât o treime din tot drumul. Care este lungimea drumului?

a) 36 km	b) 30 km	c) 48 km	d) 24 km	e) 42 km

11. Câte numere de forma $\overline{abcd}$ verifică relaţia $\overline{abcd} + \overline{abc} + \overline{ab} + a = \overline{dcba} + \overline{dcb} + \overline{dc} + d$?

a) 81	b) 180	c) 729	d) 90	e) 810

12. Câte numere naturale de 4 cifre au produsul cifrelor egal cu 0?

a) 2439	b) 2700	c) 3608	d) 3451	e) 4234

13. Pe un raft se găsesc 10 cărţi în limba franceză, 20 de cărţi în limba spaniolă, 8 cărţi în limba germană, 15 cărţi în limba rusă şi 25 de cărţi în limba română. Toate cărţile au coperţi identice. Care este numărul minim de cărţi pe care trebuie să le luam de pe raft (fără a le deschide) pentru a fi siguri că avem 12 cărţi scrise în aceeaşi limbă?

a) 61	b)48	c) 52	d)56	e) 34

14. O persoană s-a născut pe 29 februarie 1976, într-o duminică. Care este cel mai apropiat an în care persoana respectivă îşi va sărbători ziua de naştere tot într-o duminică?

a) 2008	b) 1996	c) 2020	d) 2004	e) 2000

15. Pe o tablă sunt scrise toate numerele naturale de la 1 la 30, o singură dată. Spunem că facem o modificare pe tablă atunci când ştergem două numere a si b şi scriem pe tablă numărul $a + b - 2$.
Ce număr avem scris pe tablă după 29 de modificări?

a) 465	b) 407	c) 397	d) 417	e) 387

Concursul "Micii Campioni" – 2019

Proba 1

16 mai 2019

1. Scrieţi numărul 1997 folosind numai cifra 2, de zece ori, şi operaţii aritmetice cunoscute (fără paranteze).

2. Andrei spune: „ M-am născut în anul 2009. Iau numărul zilei din data naşterii mele şi îl adun cu 2. Numărul obţinut îl înmulţesc cu 2 şi adaug 4. Înmulţesc noul rezultat cu 5 şi adaug numărul lunii din data naşterii mele. Am obţinut numărul 342." Care este data de naştere a lui Andrei?

3. Într-un săculeţ sunt 30 de bile: albe, roşii şi negre. Oricum am extrage din săculeţ 19 bile, apare cel puţin o bilă neagră. Oricum am extrage din săculeţ 21 de bile, apare cel puţin o bilă roşie. Oricum am extrage 7 bile, în săculeţ rămâne cel puţin o bilă albă. Câte bile din fiecare sunt în săculeţ?

4. Două ceasornice au arătat, astăzi la prânz, ora 12:00. Primul ceasornic o ia înainte cu 8 minute în 24 de ore, iar al doilea rămâne în urmă cu 4 minute în 24 de ore. După cât timp cele două ceasornice vor arăta din nou, simultan, la prânz, ora 12:00?

5. Pe o insulă trăiesc numai arici, şerpi şi vulpi. Fiecare animal mănâncă o singură dată pe zi, astfel: orice arici mănâncă la micul dejun câte un şarpe, orice vulpe mănâncă la prânz câte un arici şi orice şarpe mănâncă la cină câte o vulpe. În ziua de miercuri, după cină, pe insulă a rămas numai un şarpe. Se ştie că, în această perioadă, pe insulă nu apare niciun alt animal şi nu dispar animale decât în modul descris mai sus. Câte animale din fiecare fel au fost pe insulă în ziua de luni a aceleiaşi săptămâni, înainte de micul dejun ?

Notă: - Toate problemele sunt obligatorii.
- Timp de lucru: 2 ore efectiv.

CONCURSUL „ MICII SPIRIŞTI”

SUBIECTUL I. (5x8 puncte=40 de puncte)

La următoarele 6 exerciţii un singur răspuns este corect.

Scrieţi pe foaia de examen doar răspunsul corect, împreună cu litera corespunzătoare:

1. Rezultatul calculului $[(5 + 5)\times5 – 5 + 5\times(5 + 5:5)]:5 + 5\times5 + 5:5$ este:
a) 31 b) 74 c) 39 d) 41

2. Numărul de 19 ori mai mic decât 57874 este egal cu:
a) 346 b) 3046 c) 3406 d) 3606

3. Câte numere de trei cifre se pot scrie folosind cifrele 0, 2 și 9?
a) 4 b) 12 c) 16 d) 18

4. Suma dintre predecesorul și succesorul unui număr este 4032. Numărul căutat este:
a) 2015 b) 1344 c) 2016 d) 2008

5. Cel mai mare număr de forma abc, știind că $(a + 3)\times(7 + b\times c) = 88$, este:
a) 912 b) 514 c) 522 d) 811

SUBIECTUL II. (2x10puncte=20 de puncte)

Pe foaia de concurs scrieţi doar răspunsul:

1. Un coș plin de pere cântărește 36 kg, iar pe jumătate plin cântărește 20 kg. Coșul gol cântărește.....

2. Radu este un băiat hazliu. El urcă 16 trepte ale scării de acasă astfel: urcă trei trepte, coboară două, urcă trei trepte, coboară două... Pentru a urca scara de acasă el va face .....paşi

COLEGIUL NAȚIONAL "SPIRU HARET", BUCUREȘTI

SUBIECTUL III. (3x10puncte=30 puncte)

Scrieţi rezolvările complete pe foaia de concurs:

1. 5 kg de portocale și 4 kg de kiwi costă 92 lei, iar 7 kg de portocale și 2 kg de kiwi costă 82 lei. Cât costă 4 kg de portocale și 5 kg de kiwi?

2. Un călător are de făcut un drum. În prima zi parcurge trei zecimi din el, a doua zi două șeptimi din rest, a treia zi trei cincimi din noul rest și a patra zi ultimii 20 de kilometri. Care este lungimea drumului?

3. Suma a 13 numere naturale distincte nenule este 92. Care sunt aceste numere?

Toate subiectele sunt obligatorii. Punctajul maxim este de 90 de puncte.

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Timp de lucru- 60 minute

COLEGIUL NAȚIONAL "SPIRU HARET", BUCUREȘTI

Varianta 1

COLEGIUL NAȚIONAL "SPIRU HARET" București

ADMITEREA ÎN CLASA A V-A

CONCURSUL „ MICII SPIRIŞTI”

SUBIECTUL I. (6x5 puncte=30 de puncte)

La următoarele 6 exerciţii un singur răspuns este corect.

Alegeti răspunsul corect şi scrieţi-l pe foaia de examen împreună cu litera corespunzătoare:

1. Numărul de 39 de ori mai mic decât 4212 este:
   a) 4173; **b)** 108 ; **c)** 18; **d)** 17; **e)** 118.

2. Calculând trei sferturi din numărul $12+36:6\times 2$ obţinem:
   a) 12; **b)** 20; **c)** 18 ; **d)** 32 ; **e)** 24.

3. Dacă $\overline{abc}+\overline{ab}=520$, atunci $a+b+c$ este egal cu:
   a) 15; **b)** 13; **c)** 12; **d)** 14; **e)** 16.

4. Un număr natural A de 3 cifre are suma cifrelor 27. Care este suma cifrelor lui A+11?
   a) 3; **b)** 2; **c)** 29; **d)** 11; **e)** 1.

5. Rilă Iepurilă numerotează toate căsuţele animalelor din pădure cu numere consecutive începând cu 1. El a folosit 210 cifre. Câte căsuţe sunt în pădurea lui Rilă Iepurilă?
   a) 210; **b)** 100; **c)** 105; **d)** 106; **e)** 107.

6. Un sac conţine bile de 5 culori diferite: 6 bile roşii, 5 albastre, 8 albe, 9 verzi şi 7 negre. Care este cel mai mic număr de bile pe care trebuie să îl îndepărtezi din sac, fără a te uita, pentru a fi sigur că ai luat 4 bile de aceeaşi culoare?

   a) 4; **b)** 20; **c)** 13; **d)** 15; **e)** 16.

SUBIECTUL II. (3x10 puncte=30 de puncte)

La următoarele 3 cerinţe scrieţi doar răspunsul:

1. Valoarea numărului a din egalitatea $100-91:[22-(33-12:a):2]=87$ este .....

2. Într-un şir de 11 numere naturale consecutive, termenul din mijloc este 21. Atunci suma numerelor este egală cu .....

3. Ana locuieşte pe Strada *Spiru Haret*. Numărând de la un capăt al străzii casa ei este a 13-a, iar pornind numărătoarea din celălalt capăt, casa ei este a 7-a. Cristi are casa chiar în mijloc. Câte case sunt între casa Anei şi casa lui Cristi?..... .....

SUBIECTUL III. (30 puncte)

Scrieţi rezolvările complete pe foaia de concurs:

1. **(10 p)** 5 stilouri costă cât 12 caiete, iar 3 stilouri şi 4 caiete costă 56 de lei. Cât costă fiecare obiect?

2. **(10 p)** Într-o ladă sunt mere şi gutui, în total 175 de fructe. După ce s-au vândut 43 de mere şi 8 gutui, au rămas de 3 ori mai multe mere decât gutui. Câte mere şi câte gutui au fost în ladă?

3. **(10p)** Trei numere au suma egală cu 82 . Dacă îl împart pe primul la al doilea şi pe al doilea la al treilea obţin de fiecare dată câtul 2 şi restul 3. Aflaţi cele trei numere.

Toate subiectele sunt obligatorii. Punctajul maxim este de 90 de puncte.

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Timp de lucru- 60 minute

Prin noi, vei fi tu cel mai bun!

Test 1

Pregătire pentru Concursul de Matematică „Traian Lalescu”, 2021

Subiect propus de Adrian Zanoschi

1. O carte costă cu 120 de lei mai puțin decât patru cărți de același fel. Câți lei costă cartea?

2. Calculați $\overline{abc}+\overline{bca}-\overline{cab}$, știind că $a=\left[5\cdot 7-30:\left(4+12:6\right)\right]:5$, $13+b=25-b$ și $3\cdot c=b$.

3. Cu câte zerouri se termină produsul tuturor numerelor naturale cuprinse între 21 și 54?

4. Știind că numerele naturale $\overline{ab37c}$ și $\overline{2938d}$ sunt consecutive, aflați valoarea sumei $a+b+c+d$.

5. O alee este formată dintr-un șir de 567 de pavele colorate astfel: prima pavea este roșie, următoarele două pavele sunt galbene, apoi sunt trei pavele albastre urmate de patru pavele verzi, iar, în continuare, restul pavelelor sunt colorate conform modelului descris anterior (*r*, *g*, *g*, *a*, *a*, *a*, *v*, *v*, *v*, *v*). Aflați ce culoare are ultima pavea.

6. Ioana invită 11 colege la ziua ei. Fiecare fată (inclusiv Ioana) consumă câte 5 bomboane și 2 mere. Dacă la început erau de 6 ori mai multe bomboane decât mere, iar la sfârșitul petrecerii au rămas de 8 ori mai multe bomboane decât mere, aflați câte bomboane și câte mere au fost la început.

7. Un iepure se află la 50 de metri în fața unui câine. Săritura iepurelui măsoară 1 metru, iar cea a câinelui măsoară 2 metri. Se știe că în timp ce iepurele face 4 sărituri, câinele face 3 sărituri. Aflați câte sărituri face câinele până ce ajunge iepurele.

Notă. La toate problemele se cer rezolvări complete. Fiecare dintre problemele 1, 2, 3, 4 se notează cu câte 10 puncte, iar fiecare dintre problemele 5, 6, 7 se notează cu câte 20 de puncte. Se acordă 20 de puncte din oficiu.

Timp de lucru: 60 de minute.

Test 1

Pregătire pentru Concursul de Matematică „Traian Lalescu”, 2021

Barem de corectare

1. 40 lei. **(10p)**

2. $a=6$, $b=6$, $c=2$ **(5p)**, iar $\overline{abc}+\overline{bca}-\overline{cab}=1022$. **(5p)**

3. Produsul se termină cu opt zerouri. **(10p)**

4. $a=2$, $b=9$, $c=9$, $d=0$, **(5p)** iar $a+b+c+d=20$. **(5p)**

5. Modelul se repetă din zece în zece pavele. **(10p)** Deoarece $567=56\cdot 10+7$, rezultă că ultima pavea are aceeași culoare ca cea de-a șaptea pavea, adică este verde. **(10p)**

6. Fie b numărul de bomboane și m numărul de mere care erau la începutul petrecerii. Din relațiile $b=6m$ și $b-60=8(m-24)$ **(10p)**, rezultă că $6m-60=8m-192$, deci $m=66$ și $b=396$. **(10p)**

7. Deoarece, în timp ce iepurele face 4 sărituri care măsoară, în total, 4 metri, câinele face 3 sărituri care măsoară, în total, 6 metri, înseamnă că la fiecare 3 sărituri câinele recuperează 2 metri din distanța care îl desparte de iepure. **(10p)** Prin urmare, câinele face $3\cdot(50:2)=75$ de sărituri pentru a ajunge iepurele. **(10p)**

TEST DE SELECTIE
PENTRU ADMITEREA ELEVILOR ÎN CLASA A V-A
MATEMATICA

24 iunie 2022

Subiectul I (20 puncte)

1. Numărul natural cu 35 mai mic decât 100 ….....
2. Rezultatul calculului $2 + 4 + 6 + \ldots + 20$ este ….....
3. Dacă $3a + 2b + 2c = 85$ şi $b + c = 8$, atunci a este egal cu ….....
4. Cel mai mic număr natural de forma $\overline{albb}$ (a și b cifre diferite) este .....

Subiectul II (30 puncte)

1. Calculaţi:

$44 + 3 \times \{639 - 8 \times [32 + 2 \times (210 - 10971:53)]\}$ (10 puncte)

2. Aflaţi numărul natural a dacă:

$6150 - 5 \times [38 + 2 \times (5 \times a - 9)] = 3000$ (10 puncte)

3. Dacă $a + 2b + 3c = 100$ și $3a + 2b + c = 140$, calculaţi $(a + b + c) \times (b + 2c)$.
(10 puncte)

Subiectul III (40 puncte)

1. Un călător parcurge un drum în trei zile. În prima zi parcurge o treime din drum, în a doua zi parcurge o treime din drumul rămas, iar în a treia zi, ultimii 36 km. Care este lungimea drumului? (20 puncte)

2. Trei gospodine au cumpărat:
Prima: 3kg mere, 3kg pere și 5kg gutui și a plătit 20 lei;
A doua: 6kg mere, 4kg pere și 2kg gutui și a plătit 28 lei;
A treia: 6kg mere, 7kg pere și 7 kg gutui și a plătit 39 lei.
Aflaţi cât costă un kilogram din fiecare fruct. (20 puncte)

NOTĂ:
1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Se acordă 10 puncte din oficiu.

COLEGIUL NAȚIONAL DE INFORMATICĂ
TUDOR VIANU

12.05.2022

Colegiul Naţional de Informatică ,,Tudor Vianu"
Concursul ,,Micii Campioni" – 2022
Ziua 1

Problema 1. Determinaţi cifrele distincte a, b, c, d ştiind că:

$$\overline{abba} + a + b = \overline{cdda}.$$

Problema 2. Trei elevi au scris fiecare câte o listă de 50 de cuvinte diferite. După aceea, confruntând listele, s-au şters cuvintele care s-au găsit de cel puţin două ori. Ca rezultat, unul a rămas cu 27 de cuvinte, altul cu 38 iar al treilea cu 34. Să se demonstreze că cel puţin un cuvânt a fost scris de cei trei elevi.

Problema 3. Ana are o cutie cu bomboane. Ea ia de cinci ori bomboane din cutie astfel:

- de fiecare dată ia mai multe bomboane decât luase data precedentă;
- prima dată a luat de trei ori mai puţine bomboane decât a luat a cincea oară;
- în total a luat 31 de bomboane.

Câte bomboane a luat Ana a patra oară din cutie?

Problema 4. Un ceas electronic afişează timpul în intervalul de la 00 : 00 : 00 la 23 : 59 : 59. De câte ori, în acest interval, apare pe ecranul ceasului o secvenţă de cifre care se scrie la fel de la stânga spre dreapta ca şi de la dreapta spre stânga? (Un astfel de exemplu este 01 : 55 : 10)

Problema 5. Într-o clasă, nişte elevi au organizat un turneu de şah. Turneul s-a desfăşurat după regula ,,fiecare elev joacă câte o partidă cu fiecare dintre ceilalţi elevi". În timpul desfăşurării turneului, doi elevi care jucaseră acelaşi număr de partide s-au îmbolnăvit şi s-au retras din turneu, iar ceilalţi au continuat turneul până la sfârşit. Ştiind că în turneu s-au jucat 23 de partide, determinaţi dacă cei doi elevi care s-au îmbolnăvit au jucat între ei până la momentul retragerii lor din turneu.

Timp de lucru 2 ore.
Fiecare problemă valorează 15 *puncte.*

MINISTERUL EDUCAŢIEI

TEST DE SELECȚIE
PENTRU ADMITEREA ELEVILOR ÎN CLASA A V-A
MATEMATICĂ
8 iulie 2022

Subiectul I (20 puncte)

1. Numărul natural cu 76 mai mare decât 135 este .....…
2. Rezultatul calculului $7 \times 17 + 8 \times 83$ este ….....
3. Dacă $a = 16$ şi $ab + ac + 4b + 4c = 200$, atunci $b + c$ este egal cu ..……..
4. Cel mai mare număr natural de forma $\overline{a1bb}$ (a şi b cifre diferite) este .....

Subiectul II (30 puncte)

1. Calculaţi:

$(1 + 3 + 5 + \ldots + 19) + (2 + 4 + 6 + \ldots + 20) =$ (10 puncte)

2. Aflaţi numărul natural a dacă:

$1 + 2 \times \{3 + 4 \times [5 + 6 \times (7 + 8 \times 9 - a)]\} = (1 \times 2 \times 3 \times 4 + 5 \times 6 \times 7 \times 8) \times 2 - 49$

(10 puncte)

3. Dacă $a + 2b + c = 100$ și $3a + 2b + 3c = 140$, calculaţi $(a + b + c) \times (a + c)$.

(10 puncte)

Subiectul III (40 puncte)

1. Despre Paul şi Andrei ştim următoarele: peste 5 ani vârsta lui Paul va fi de 3 ori mai mare decât diferența vârstelor celor doi, iar diferența vârstelor celor doi este egală cu vârsta lui Andrei de acum 2 ani. Ce vârstă are fiecare ? (20 puncte)

2. Tudor a invitat la petrecerea lui 5 prieteni şi le-a spus că fiecare poate invita încă 4 prieteni, fiecare din cei 4 câte 3 prieteni, fiecare din cei 3 câte 2 prieteni, iar fiecare din cei 2 câte un prieten.

a) Câți prieteni a invitat Tudor la ziua lui?

b) Care ar putea fi numărul maxim de participanți la petrecerea lui Tudor?

(20 puncte)

NOTĂ:

1. Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.

COLEGIUL NAȚIONAL DE INFORMATICĂ
TUDOR VIANU

13.05.2022

Colegiul Naţional de Informatică „Tudor Vianu"

Concursul „Micii Campioni" – 2022

Ziua 2

1. Câte numere naturale de două cifre se împart exact la 12 şi au suma cifrelor 12?
A niciunul B un număr C două numere D trei numere E patru numere

2. Adunăm cel mai mic număr par de trei cifre distincte cu cel mai mare număr de patru cifre. Ce număr obţinem?
A 10099 B 10101 C 10203 D 10123 E 9978

3. Câţi străbunici şi câte străbunice au avut în total toate străbunicile şi toţi străbunicii tăi?
A 8 B 24 C 32 D 128 E 64

4. Andrei are numai bile albe, roşii şi verzi. Ştiind că 31 nu sunt verzi, 33 nu sunt albe şi 32 nu sunt roşii, câte bile verzi are Andrei?
A 17 B 16 C 15 D 18 E 19

5. Se consideră toate numerele de trei cifre care au cifra zecilor de patru ori mai mare decât cifra unităţilor, iar cifra sutelor este egală cu jumătate din cifra zecilor. Cât este suma lor?
A 645 B 623 C 713 D 723 E 1415

6. Este ora 12 : 00. Ceasul electronic al Anei începe să rămână în urmă cu două minute pe oră. După cât timp ceasul Anei va arăta pentru prima oară din nou ora reală?
A 12 ore B 15 zile C 30 zile D 10 zile E 48 zile

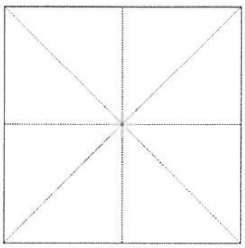
7. Într-o cutie se află trei feluri de bomboane: 7 cu mentă, 12 cu ciocolată şi 13 cu fructe. Care este numărul minim de bomboane pe care trebuie să le luăm din cutie, fără să le privim, pentru a fi siguri că luăm câte o bomboană din fiecare fel?
A 3 B 20 C 21 D 32 E 26

8. O carte are 230 de pagini. De câte ori a fost folosită cifra 1 în numerotarea paginilor acestei cărţi?
A 154 B 153 C 152 D 151 E 163

9. Ce vârstă are în prezent tatăl unui băiat dacă acum băiatul are 10 ani, iar atunci când băiatul va avea vârsta tatălui de acum, tatăl său va avea 60 de ani?

A 40 ani B 45 ani C 32 ani D 30 ani E 35 ani

10. Câte triunghiuri se află în desenul de mai jos?



A 8 B 12 C 14 D 16 E Alt răspuns

11. Într-o livadă sunt 120 de pomi. Dacă la fiecare doi meri s-au plantat 6 peri, iar la fiecare 3 peri câte un cais, iar în livadă sunt doar meri, peri şi caişi, câţi peri sunt?

A 72 B 24 C 36 D 48 E 60

12. Cinci gutui cântăresc cât 8 mere şi 3 pere. Şase mere cântăresc cât o gutuie şi 6 pere. Câte pere cântăresc cât 3 gutui şi 4 mere?

A 10 B 15 C 13 D 14 E 11

13. Câte numere de trei cifre sunt de 40 de ori mai mari decât suma cifrelor lor?

A 3 B 2 C 4 D 6 E 5

14. La un concurs de sprint au participat cinci concurenţi: Bogdan, Andrei, Marius, Doru şi Tudor. Bogdan a terminat cursa înaintea lui Tudor, Doru a ajuns al treilea după Marius, Bogdan nu a câştigat cursa, Andrei a trecut linia de sosire în urma lui Tudor, Marius nu a ocupat locul al doilea. Cine a trecut linia de sosire al treilea?

A Andrei B Bogdan C Doru D Marius E Tudor

15. Într-o clasă sunt 19 elevi. Dacă ar pleca 3 fete şi 3 băieţi, atunci numărul fetelor ar fi cu unul mai mare decât jumătate din numărul băieţilor rămaşi. Câti băieţi sunt în clasă?

A 15 B 10 C 13 D 8 E 11

Prin noi, vei fi tu cel mai bun!

Test 2

Pregătire pentru Concursul de Matematică „Traian Lalescu”, 2021

Subiect propus de Ciprian Baghiu

1. Aflați numărul natural a din egalitatea: $5\cdot\left[\left(20-5\cdot 3\right)\cdot 7-2\cdot a\right]-4=121$.

2. Aflați numărul $\overline{abc}$, știind că $\overline{5abc}-\overline{abc5}=3888$.

3. Care este cel mai mic număr natural de cinci cifre distincte, nenule, mai mare decât răsturnatul său?

4. Dacă trei ciocolate costă cât două cutii de bomboane, iar două ciocolate și șapte cutii de bomboane costă 125 de lei, cât costă o ciocolată și cât costă o cutie de bomboane?

5. Maria a economisit o sumă de bani. Cu jumătate din sumă și încă 50 de lei a achitat costul unei excursii. Cu o cincime din rest și încă 20 de lei și-a luat o fustă, cu o treime din noul rest și-a cumpărat cărți și astfel a rămas cu 280 de lei. Ce sumă a economisit Maria?

6. Se consideră șirul 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, ..., 2021, 2022, 2024.
- **a)** Câți termeni are șirul dat?
- **b)** Verificați dacă numerele 1025 și 1075 sunt termeni ai șirului.
- **c)** Pe ce loc se află termenul 501?
- **d)** Care este al 501-lea termen al șirului?

7. Nelu a cumpărat 540 grame de vopsea pentru gard și le-a spus celor trei fii ai săi că aceasta trebuie amestecată cu diluant, cantitatea de diluant fiind o treime din cea de vopsea. Fără să știe unii de ceilalți, cei trei frați au venit pe rând, au cântărit compoziția găsită și au adăugat diluant, o treime din cantitatea găsită. Aflând de greșeală, tatăl a adăugat vopsea pentru a respecta proporția amestecului din prospectul vopselei. Ce cantitate de vopsea a adăugat el la sfârșit?

Notă. La toate problemele se cer rezolvări complete. Fiecare dintre problemele 1, 2, 3, 4 se notează cu câte 10 puncte, iar fiecare dintre problemele 5, 6, 7 se notează cu câte 20 de puncte. Se acordă 20 de puncte din oficiu.

Timp de lucru: 60 de minute.

Test 2

Pregătire pentru Concursul de Matematică „Traian Lalescu”, 2021

Barem de corectare

1. $a=5$ **(10p)**

2. $\overline{abc}=123$ **(10p)**

3. 23451 **(10p)**

4. O ciocolată costă 10 lei, iar o cutie de bomboane costă 15 lei. **(10p)**

5. $R_2=(280:2)\cdot 3=420$ lei, **(10p)**, $R_1=\left[(420+20):4\right]\cdot 5=550$ lei **(5p)**, $S=(550+50)\cdot 2=1200$ lei. **(5p)**

6. **a)** Se observă că șirul este format din toate numerele naturale nenule de la 1 la 2024, cu excepția numerelor care împărțite la 4 dau restul 3, adică numerele de forma $4\cdot c+3$, unde $c=0,1,2,...,504,505$. În total, șirul are $2024-506=1518$ termeni. **(6p)**

b) 1025 este termen al șirului **(2p)**, iar 1075 nu este termen al șirului. **(2p)**

c) Numărul 501 este al 376-lea termen al șirului. **(5p)**

d) Al 501-lea termen este 668. **(5p)**

7. Dacă cantitatea inițială de vopsea a fost 540 g, atunci, după ce au diluat-o cei trei frați, s-au obținut 1280 g amestec cu diluant în exces, **(10p)** deci tatăl va adăuga la sfârșit 1680 g de vopsea. **(10p)**

Prin noi, vei fi ***tu*** *cel mai bun!*

Test 3

Pregătire pentru Concursul de Matematică „Traian Lalescu”, 2021

Subiect propus de Prof. Dr. Căpraru Irina

1. Calculați $10+10\cdot\left[10+10\cdot\left(10-10:10\right)\right]:4$.

2. Determinați câtul și restul împărțirii numărului $\overline{abad}$ la $\overline{ab}$.

3. Aflați cel mai mic număr de bomboane care se pot pune în 10 cutii, știind că trebuie îndeplinite simultan următoarele condiții: a) fiecare cutie conține cel puțin 10 bomboane; b) fiecare cutie conține un număr impar de bomboane; c) nu există cutii cu același număr de bomboane.

4. Un elev a rezolvat 30 de probleme. Pentru fiecare problemă rezolvată corect a primit 10 puncte și a pierdut 5 puncte pentru fiecare problemă rezolvată greșit. În final, punctajul său este de 0 puncte. Determinați numărul problemelor rezolvate corect.

5. Numerele naturale de la 1 la $x\cdot y$ (x, y numere naturale) sunt scrise în tabel sub formă de dreptunghi cu x linii și y coloane. În prima linie sunt scrise numerele de la 1 la y, în a doua de la $y+1$ la $2y$, etc. Se știe că numărul 20 este pe a treia linie, numărul 44 este pe linia cinci, iar 104 este pe ultima linie. Determinați numerele x și y.

6. Un turist parcurge în prima zi o treime din drum, a doua zi o treime din rest, iar a treia zi o treime din noul rest. Dacă mai rămân de parcurs încă 16 km, aflați lungimea drumului.

7. Cinci copii au în total 31 nuci, astfel încât fiecare doi copii au numere diferite de nuci. De asemenea, oricum am considera doi copii, unul are de un număr natural nenul de ori mai mult decât celălalt. Aflați câte nuci are fiecare copil.

Notă. La toate problemele se cer rezolvări complete. Fiecare dintre problemele 1, 2, 3, 4 se notează cu câte 10 puncte, iar fiecare dintre problemele 5, 6, 7 se notează cu câte 20 de puncte. Se acordă 20 de puncte din oficiu.

Timp de lucru: 60 de minute.

Test 3

Pregătire pentru Concursul de Matematică „Traian Lalescu”, 2021

Barem de corectare

1. Prin calcul se obține $10+10\cdot(10+10\cdot 9):4=10+10\cdot 100:4$ **(5p)**, de unde rezultă 260. **(5p)**

2. Dacă $b=d$, atunci $\overline{abab}=\overline{ab}\cdot 101$, deci câtul este 101, iar restul este 0 **(2p)**. Dacă $d<b$, atunci $\overline{abad}=\overline{ab}\cdot 100+\overline{ad}$, deci câtul este 100, iar restul este $\overline{ad}$ **(4p)**. Dacă $d>b$, atunci $\overline{abad}=\overline{ab}\cdot 101+(d-b)$, deci câtul este 101, iar restul este $d-b$. **(4p)**

3. Fiecare cutie de bomboane conține un număr impar de bomboane, număr care este mai mare sau egal decât 11. **(5p)**

Numărul total de bomboane este $11+13+15+17+19+21+23+25+27+29=200$. **(5p)**

4. Notăm cu c numărul problemelor rezolvate corect și cu g numărul problemelor rezolvate greșit. Atunci $c+g=30,\ 10\cdot c=5\cdot g$. **(5p)**, de unde $c=10$ și $g=20$. **(5p)**

5. A treia linie începe cu $2y+1$ și se finalizează cu $3y$, iar 20 este pe această linie. Obținem $20>2y\Leftrightarrow y<10$. **(5p)**

Linia cinci se finalizează cu $5y$, iar 44 se află pe această linie. Obținem $44\le 5y\Leftrightarrow y>8$. **(5p)**

Prin urmare, $y=9$. **(5p)**

Pe prima linie se scriu numerele de la 1 la 9, pe linia a doua se scriu numerele de la 10 la 18, etc. Numărul 104 se scrie pe linia 12, care este ultima linie. Deci $x=12$. **(5p)**

6. Fie d (km) lungimea drumului. În prima zi parcurge $d:3$, iar restul este $2d:3=l$. În a doua zi parcurge $l:3$, iar restul este $2l:3=x$. În a treia zi parcurge $x:3$, iar restul este $2x:3=16$. **(10p)**

Din ultimele două egalități obținem $x=24,\ l=36$. **(5p)**, de unde, prin înlocuire în prima egalitate și calcul rezultă $d=54$ km **(5p)**

7. Ordonăm copiii astfel încât fiecare are mai puține nuci decât cel care urmează. Fie x_1 numărul de nuci ale primului copil, $x_1\cdot x_2$ numărul de nuci ale celui de-al doilea copil, $x_1\cdot x_2\cdot x_3$ numărul de nuci ale celui de-al treilea copil, ..., $x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4\cdot x_5$ numărul de nuci ale ultimului copil. $x_1+x_1\cdot x_2+x_1\cdot x_2\cdot x_3+x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4+x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4\cdot x_5=31\Rightarrow x_1=1$. **(5p)**

Prin urmare, $x_2=2,\ x_3=2,\ x_4=2,\ x_5=2$. **(10p)**

Copiii au 1, 2, 4, 8, 16 nuci. **(5p)**

Prin noi, vei fi tu cel mai bun!

Test 4

Pregătire pentru Concursul de Matematică „Traian Lalescu”, 2021

Subiect propus de Prof. Codrin Precupanu

1. Aflați numărul natural x din egalitatea $\left[\left(x+3000\right):50+40\right]:10-10=0$.

2. Mai multe numere naturale au proprietatea că atât suma lor cât şi produsul lor sunt egale cu 12. Aflați numerele. Câte soluții are problema?

3. În șirul 37, 84, 131, ..., 2011 fiecare termen este cu 47 mai mare decât precedentul. Câte numere sunt în şir? Care este al 30-lea termen al şirului?

4. Dintr-o carte s-a desprins o parte formată din mai multe foi consecutive. Prima pagină a acestei părți are numărul 143, iar numărul ultimei pagini a acestei părți este format din aceleaşi cifre ca și numărul 143. Câte pagini are partea care s-a desprins din carte?

5. Se consideră șirul: 1, 4, 13, 40, 121, ... Determinați termenul șirului care este cel mai apropiat de numărul 2021.

6. Alina şi Bogdănel au împreună tot atâtea mere cât are şi Cristina. Alina şi Cristina au împreună de două ori mai multe mere decât are Bogdănel. De câte ori este mai mare numărul de mere pe care le au împreună Bogdănel şi Cristina, decât numărul de mere ale Alinei?

7. Fie suma $S=3+13+113+1113+...+\underbrace{111...113}_{200\text{ de cifre}}$. Aflați câte cifre de 3 și câte cifre de 1 sunt în termenii sumei. Determinați ultimele două cifre ale rezultatului sumei.

Notă. La toate problemele se cer rezolvări complete. Fiecare dintre problemele 1, 2, 3, 4 se notează cu câte 10 puncte, iar fiecare dintre problemele 5, 6, 7 se notează cu câte 20 de puncte. Se acordă 20 de puncte din oficiu.

Timp de lucru: 60 de minute.

Test 4

Pregătire pentru Concursul de Matematică „Traian Lalescu”, 2021

Barem de corectare

1. $x=0$. **(10p)**

2. Deoarece $12=6\cdot 2=4\cdot 3=3\cdot 2\cdot 2$**,** vom putea adăuga la produs oricâți factori de 1. **(5p).** Problema are trei soluții: $(6,2,1,1,1,1)$ sau $(4,3,1,1,1,1,1)$ sau $(3,2,2,1,1,1,1,1)$**.(5p)**

3. $N=(2011-37):47+1=43$ de numere. **(5p)** . Pe locul n se află termenul $47\cdot n-10$, deci pe locul 30 se află termenul $47\cdot 30-10=1400$. **(5p)**

4. Ultima pagină din partea desprinsă este un număr par, adică 314. **(5p)** Partea desprinsă va avea $314-143+1=172$ pagini. **(5p)**

5. Fiecare termen se obține înmulțind termenul precedent cu 3 şi adunând apoi 1. **(10p)** În şir urmează: 364, 1093, 3280; cum $2021-1093=928$**,** iar $3280-2021=1259$, termenul căutat este 1093. **(10p)**

6. Fie $6\cdot N$ numărul total de mere. Atunci Cristina are $3\cdot N$ mere, Bogdănel are $2\cdot N$ mere, iar Alina $6\cdot N-3\cdot N-2\cdot N=N$ mere. **(10p)** Bogdănel şi Cristina au împreună $5\cdot N$ mere, adică de 5 ori mai multe decât Alina. **(10p)**

7. Fiecare termen conține o cifră de 3, deci apar 200 de cifre de 3. **(5p)** Numărul cifrelor de 1 din sumă este egal cu $0+1+2+...+199=19900$. **(5p)** Ultimele două cifre ale sumei sunt ultimele două cifre din suma: $3+\underbrace{13+13+...+13}_{\text{de 199 ori}}=3+199\cdot 13=2590$, adică 9 și 0. **(10p)**

Prin noi, vei fi tu cel mai bun!

Test 5

Pregătire pentru Concursul de Matematică „Traian Lalescu”, 2021

Subiect propus de Andrei Plugariu

1. Determinați numărul natural x, știind că $2021-\left[2020-\left(2019-x\right):2018\right]:2019=2020$.

2. Determinați diferența dintre cel mai mare număr natural par de trei cifre distincte și cel mai mic număr natural impar de trei cifre nenule.

3. Câte numere de cel mult trei cifre se pot forma folosind ambele cifre 1 și 2, dar nicio altă cifră?

4. Andra și Cristi au împreună 100 de lei. Pentru a avea sume egale de bani, Andra îi dă lui Cristi două treimi din cât are acesta. Determinați sumele inițiale ale celor doi.

5. Determinați numărul natural $\overline{abc}$, știind că $\overline{abc}$ împărțit la 51, dă câtul $a+c+2$ și restul $2b$, iar $a<b$.

6. Elevii clasei a IV-a au ieșit la ora de sport, unde profesorul clasei îi roagă să formeze un șir indian. Amelia observă că în spatele ei se află de două ori mai mulți colegi decât în fața sa. Dorind să fie mai aprope de prietena ei, face schimb de locuri cu a 5-a persoană din fața ei și observă că numărul colegilor din față este o șeptime din numărul elevilor din spatele ei. Câți elevi sunt în clasă?

7. Un turist pleacă într-o excursie de trei zile cu o sumă de bani. În prima zi cheltuiește o treime din sumă, în a doua zi cheltuiește trei sferturi din rest și îi rămân pentru ultima zi cu 110 lei mai puțin decât a cheltuit în prima zi. Determinați suma cu care a plecat turistul în vacanță.

Notă. La toate problemele se cer rezolvări complete. Fiecare dintre problemele 1, 2, 3, 4 se notează cu câte 10 puncte, iar fiecare dintre problemele 5, 6, 7 se notează cu câte 20 de puncte. Se acordă 20 de puncte din oficiu.

Timp de lucru: 60 de minute.

Test 5

Pregătire pentru Concursul de Matematică „Traian Lalescu”, 2021

Barem de corectare

1. $x=1$ **(10p)**

2. $986-111=875$, **(10p)**

3. Opt numere: 12, 21, 112, 121, 122, 211, 221, 212. **(10p)**

4. Notăm cu *a* suma Andrei și cu *c* suma lui Cristi și avem relațiile $a+c=100$, $a-2c:3=c+2c:3$ **(5p)** Înmulțind a doua relație cu 3, obținem $3a-2c=5c$, de unde obținem că $c=30$ lei, $a=70$ lei. **(5p)**

5. Avem relația $\overline{abc}=51(a+c+2)+2b$, de unde obținem că $49a+8b=50c+102$ **(5p)**, adică *a* este o cifră pară **(5p)**. Pentru $a=2$ nu avem soluții. Pentru $a=4$ obținem $\overline{abc}=473$ (convine) **(5p)**. Pentru $a=6$ obținem $\overline{abc}=614$ (nu convine), iar pentru $a=8$ nu avem soluții **(5p)**.

6. Notând cu *e*, numărul de elevi și cu *x* numărul de copii din fața Ameliei, avem relația $3x+1=e$ **(5p)** și $(x-5)\cdot 7=2x+5$ **(10p)**, de unde rezultă că $x=8$, deci $e=25$. **(5p)**

7. Notăm cu a suma inițială și cu b suma rămasă după prima zi. Avem relațiile $a-a:3=b$, $b-3b:4=a:3-110$. **(10p)** Înmulțind a doua relație cu 12, avem că $3b=4a-1320$, iar din prima avem că $2a=3b$, de unde obținem că $a=660$ lei. **(10p)**

*Prin noi, vei fi **tu** cel mai bun!*

Test 6

Pregătire pentru Concursul de Matematică „Traian Lalescu”, 2021

Subiect propus de Ioana Cătălina Anton

1. Aflați numărul natural x din egalitatea: $\left\{\left[\left(1\cdot 1+2:2+3\cdot 3\right)\cdot 4:4+5\cdot 5\right]:x+7:7\right\}\cdot 8=9\cdot 9-5\cdot 5$.

2. Dacă $3\cdot a+2\cdot b+4\cdot c=100$ și $b+2\cdot c=32$, scrieți răsturnatul succesorului lui a.

3. Aflați de câte cifre este nevoie pentru a numerota o carte cu 321 de pagini.

4. Maria vrea să facă, pentru fiecare colegă de clasa, câte o brățară din mărgele. Dacă ar folosi câte 23 de mărgele pentru o brățară, i-ar rămâne nefolosite 20 de mărgele. Astfel, ea a folosit câte 25 de mărgele pentru fiecare brățară și nu i-a mai rămas nicio mărgea. Stabiliți câte mărgele avea Maria.

5. Fie a, b, c trei numere naturale nenule. Dacă îl împărțim pe a la b, obținem câtul 5 și restul c. Știind că suma diferențelor dintre cel mai mare număr și fiecare dintre celelalte două numere este egală cu 100, aflați cele trei numere.

6. Aflați numărul natural care are ultima cifră egală cu 0, iar dacă i se șterge această ultimă cifră, numărul obținut este cu 4527 mai mic decât cel inițial.

7. Considerăm toate numerele naturale care au suma cifrelor egală cu 30 (de exemplu: 12999, 87672, 4599021). Scrieți primii 8 termeni ai șirului format din aceste numere ordonate crescător.

Notă. La toate problemele se cer rezolvări complete. Fiecare dintre problemele 1, 2, 3, 4 se notează cu câte 10 puncte, iar fiecare dintre problemele 5, 6, 7 se notează cu câte 20 de puncte. Se acordă 20 de puncte din oficiu.

Timp de lucru: 60 de minute.

Test 6

Pregătire pentru Concursul de Matematică „Traian Lalescu”, 2021

Barem de corectare

1. $x=6$ **(10p)**

2. $a=12$ **(5p)**, de unde răsturnatul succesorului lui *a* este 31. **(5p)**

3. $9\cdot 1+90\cdot 2+222\cdot 3=855$ cifre. **(10p)**

4. Dacă notăm numărul de brățări cu *b* și numărul de mărgele cu *m,* avem $m=23\cdot b+20=25\cdot b$. **(5p)** Obținem $b=10$ și $m=250$. **(5p)**

5. $a=5\cdot b+c$, cu $b>c$, iar $a-b+a-c=100$. **(6p)** Atunci, prin înlocuire, obținem $9\cdot b+c=100$ **(6p)**, de unde $b=11,\ c=1$ și $a=56$. **(8p)**

6. Fie x numărul obținut după ștergerea ultimei cifre; atunci numărul inițial este $10\cdot x$ și $10\cdot x=x+4527$ **(10p)**, de unde $x=503$ și numărul inițial este 5030. **(10p)**

7. Cum $30:9=3$(rest 3), deducem că numerele din șir au cel puțin 4 cifre **(4p)**. Primii 8 termeni ai șirului ordonat crescător sunt: 3999, 4899, 4989, 4998, 5799, 5889, 5898, 5979. **(16p)**

Prin noi, vei fi tu cel mai bun!

Test 7

Pregătire pentru Concursul de Matematică „Traian Lalescu”, 2021

Subiect propus de Prof. Codrin Precupanu

1. Calculați: $8+8\cdot\left\{8+8\cdot\left[8+8\cdot(8-8)\right]\right\}+8:8$.

2. Bogdănel scrie toate numerele naturale nenule de la 1 la 30, unul după altul, fără spații, astfel:

$$12345\ldots2930.$$

a) Câte cifre a scris Bogdănel în total?

b) De câte ori a scris el cifra 2?

3. Fie șirul de numere naturale: 12, 62, 112, 162, 212.

a) Scrieți următorii cinci termeni ai şirului.

b) Este numărul 2012 termen al şirului? Scrieți al 2021-lea termen al şirului.

4. Suma a trei numere naturale este 60. Aflați numerele știind că jumătatea primului număr mărită cu 3, jumătatea celui de al doilea număr mărită cu 6 şi jumătatea celui de al treilea număr mărită cu 9 sunt trei numere consecutive, în această ordine.

5. Când 126 este adunat cu răsturnatul său 621, suma este de 747. Aflați cel mai mare număr care adunat cu răsturnatul dă 1211.

6. a) Verificați dacă numărul $\overline{acba}=2012$ verifică relația $\overline{abca}-\overline{acba}=90$.

b) Câte numere de forma $\overline{acba}$ verifică relația de mai sus?

7. Arătați că , dacă numerele naturale a, b, c, d verifică relația:

$$a\cdot(1+b)+b\cdot(1+a)=c\cdot(1+d)+d\cdot(1+c),$$

atunci $a+b+c+d$ este un număr par.

Notă. La toate problemele se cer rezolvări complete. Fiecare dintre problemele 1, 2, 3, 4 se notează cu câte 10 puncte, iar fiecare dintre problemele 5, 6, 7 se notează cu câte 20 de puncte. Se acordă 20 de puncte din oficiu.

Timp de lucru: 60 de minute.

Test 7

Pregătire pentru Concursul de Matematică „Traian Lalescu”, 2021

Barem de corectare

1. $a=585$. **(10p)**

2. a) Sunt 9 numere de o cifră şi 21 de numere de două cifre, aşadar $9\cdot 1+21\cdot 2=51$ cifre. **(5p)**

b) Cifra 2 apare la numerele $2,\ 12,\ 22$ de 4 ori, iar la $20, 21, ..., 29$ de 9 ori, în total de 13 ori. **(5p)**

3. a) Termenii cresc cu 50, deci urmează $262, 312, 362, 412, 462$. **(5p)**

b) Observăm că al n-lea termen este $50\cdot(n-1)+12$. Ecuația $12+(n-1)\cdot 50=2012$ are soluția $n=41$, deci 2012 este al 41-lea termen al şirului; al 2021-lea termen este $50\cdot(2021-1)+12=101012$. **(5p)**

4. Dacă $a:2+3=k$, atunci $b:2+6=k+1$, iar $c:2+9=k+2$ **(5p)**

Din $a+b+c=60$, se obține $k=15$, de unde $a=24$; $b=20$; $c=16$. **(5p)**

5. $\overline{abc}+\overline{cba}=1211$,de unde $a+c=11$**. (10 p)** Prin urmare, $b=5$**;** numărul fiind cât mai mare, trebuie ca $a=9$**,** deci $c=2$ şi $\overline{abc}=952$**. (10p)**

6. a) $\overline{abca}=2102\Rightarrow \overline{abca}-\overline{acba}=2102-2012=90$. **(5p)**

b) $\overline{abca}-\overline{acba}=90\cdot(b-c)=90\Rightarrow b-c=1$. **(5p)** Sunt 9 perechi de cifre (b,c)**,** iar cifra a poate fi aleasă în 9 moduri, deci sunt $9\cdot 9=81$ de numere. **(10p)**

7. Efectuând calculele obținem $2\cdot a\cdot b+a+b=2\cdot c\cdot d+c+d$; **(5p)** Cum $2\cdot a\cdot b$ şi $2\cdot c\cdot d$ sunt numere pare, deducem că $a+b$ şi $c+d$ au aceeaşi paritate. **(10p)** Prin urmare, $a+b+c+d$ este număr par. **(5p)**

Prin noi, vei fi tu cel mai bun!

Test 8

Pregătire pentru Concursul de Matematică „Traian Lalescu”, 2021

Subiect propus de Andrei Plugariu

1. Determinați cel mai mic număr natural de trei cifre care se împarte exact la 11 și are cel puțin două cifre pare.

2. Dacă două pixuri costă cât 7 creioane, iar 3 creioane costă cât o radieră, câte pixuri costă cât 7 radiere?

3. Determinați toate numerele naturale $\overline{ab}$, știind că $\overline{ab} = 8 + 2 \cdot a \cdot b$.

4. Să se determine numărul natural n, știind că între $3n+1$ și 2021 sunt exact 670 de numere care se împart exact la 3.

5. Bogdan și Codrin au împreună 320 de lei. Dorind să aibă sume egale, Codrin îi oferă câte 10 lei, la fiecare 5 lei primiți de la Bogdan. Știind că Bogdan nu are mai mult de 114 lei și că fac cel mult 10 schimburi, determinați sumele inițiale.

6. Într-o clasă nu sunt mai mult de 35 de copii și nici mai puțin de 27 de copii. Știind că trei șeptimi din numărul de fete este cu 9 mai mic decât numărul baieților, determinați numărul elevilor din clasă.

7. Într-o urnă sunt 58 de bile mari și mici, unele albe și unele negre. Știind că numărul bilelor mari este dublul numărului de bile mici și albe, că cele negre sunt cât cele albe mari și că sunt de 4 ori mai multe bile negre mari decât bile negre mici, determinați câte sunt de fiecare fel.

Notă. La toate problemele se cer rezolvări complete. Fiecare dintre problemele 1, 2, 3, 4 se notează cu câte 10 puncte, iar fiecare dintre problemele 5, 6, 7 se notează cu câte 20 de puncte. Se acordă 20 de puncte din oficiu.

Timp de lucru: 60 de minute.

Test 8

Pregătire pentru Concursul de Matematică „Traian Lalescu”, 2021

Barem de corectare

1. 209 **(10p)**

2. 6 pixuri. **(10p)**

3. $\overline{ab} \in \{12, 24\}$. **(10p)**

4. Avem $\left[2019-\left(3n+3\right)\right]:3+1=670$ **(5p)**, de unde obținem $n=3$. **(5p)**

5. Notăm cu *b* suma lui Bogdan și cu *c* suma lui Codrin, cu *x* numărul de schimburi și avem relațiile $b+c=320, c-5x=b+5x$ **(5p)**, de unde obținem că $b+5x=160$ **(5p)**. Cum $b \le 114, x \le 10$, obținem că $x=10, b=110$ lei, $c=210$ lei. **(10p)**

6. Notând cu *b*, numărul de băieți și cu *f* numărul de fete și avem relațiile $27 \le b+f \le 35$, $3f:7+9=b$ **(5p)**, deci $27 \le f+3f:7+9 \le 35$, adică $126 \le 10f \le 182$ **(5p)**. Cum numărul de fete trebuie să se împartă la 7, obținem că $f=14, b=15$, deci 29 de elevi **(10p)**.

7. Notăm cu *A* numărul de bile albe și mari, cu *N* numărul de bile negre și mari, cu *a* numărul de bile albe și mici, cu *n* numărul de bile negre și mici. Avem relațiile $A+a+N+n=58$, $A+N=2a$, $N+n=A, N=4n$ **(10p)** Obținem că $3a+n=58$, $a+10n=58$ și aflăm că $A=20, a=18, N=16, n=4$. **(10p)**

Prin noi, vei fi tu cel mai bun!

Test 9

Pregătire pentru Concursul de Matematică „Traian Lalescu”, 2021

Subiect propus de Anton Ioana Cătălina

1. Aflați numărul natural x din egalitatea: $2021:\left\{2021-\left[2021-22:\left(20:x+21\right)\right]\right\}=2021$.

2. Determinați cel mai mic număr natural de 2021 de cifre, având suma cifrelor egală cu 2021.

3. O cutie conține 29 bile roșii, 21 bile albe și 24 bile albastre. Dacă nu putem vedea culoarea bilelor, aflați care este numărul minim de bile ce trebuie extrase din cutie pentru a fi siguri că am scos cel puțin câte o bilă din fiecare culoare.

4. Dan parcurge 202 de centimetri, făcând 3 sărituri. Determinați ce distanță parcurge Dan într-un minut, știind că el face 4 sărituri în 8 secunde.

5. Predecesorul unui număr natural de 3 cifre are suma cifrelor cu 17 mai mare decât suma cifrelor numărului inițial. Stabiliți câte astfel de numere există.

6. Aflați restul împărțirii numărului natural n la 2020, știind că prin împărțirea lui n la 20 se obține restul 9, iar prin împărțirea numărului $5\cdot n$ la 101 se obține restul egal cu 44.

7. Aflați numărul de pe poziția 170 din șirul: 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, ...

Notă. La toate problemele se cer rezolvări complete. Fiecare dintre problemele 1, 2, 3, 4 se notează cu câte 10 puncte, iar fiecare dintre problemele 5, 6, 7 se notează cu câte 20 de puncte. Se acordă 20 de puncte din oficiu.

Timp de lucru: 60 de minute.

Test 9

Pregătire pentru Concursul de Matematică „Traian Lalescu”, 2021

Barem de corectare

1. $x = 20$ **(10p)**

2. Cum $2021 : 9 = 224$ (rest 5), vom folosi 224 cifre de 9 **(5p)**, iar numărul este $1\underbrace{00\ldots0}_{1795\text{ cifre}}4\underbrace{99\ldots9}_{224\text{ cifre}}$. **(5p)**

3. 29 + 24 + 1 = 54 bile. **(10p)**

4. Dan face 1 săritură în 2 secunde, deci în 6 secunde parcurge 202 centimetri (prin cele 3 sărituri). **(5p)** Atunci, într-un minut (adică 60 secunde), Dan parcurge 2020 centimetri. **(5p)**

5. Notăm cu $\overline{abc}$ numărul inițial. Dacă $c \geq 1$, atunci predecesorul numărului inițial este $\overline{ab(c-1)}$, iar suma cifrelor sale este cu 1 mai mică decât suma cifrelor numărului inițial (ceea ce contrazice problema). Prin urmare $c = 0$. **(7p)**

Dacă $b \geq 1$, atunci predecesorul numărului inițial este $\overline{a(b-1)9}$, iar suma cifrelor sale este cu 8 mai mare decât suma cifrelor numărului inițial (nici acest caz nu convine). Astfel, trebuie ca $b = 0$. **(7p)** Prin urmare numărul inițial este de forma $\overline{a00}$, cu cifra *a* nenulă, iar predecesorul este de forma 99 sau $\overline{(a-1)99}$. În total sunt 9 astfel de numere. **(6p)**

6. Din $n = 20 \cdot x + 9$ și $5 \cdot n = 101 \cdot y + 44$ **(7p)**, obținem prin înmulțire că $101 \cdot n = 2020 \cdot x + 909$ și $100 \cdot n = 2020 \cdot y + 880$. **(7p)** Prin scăderea ultimelor două egalitați obținem $n = 2020 \cdot (x - y) + 29$, deci restul este 29. **(6p)**

7. Șirul dat este format după regula: o dată 1, de 2 ori 2, de 3 ori 3, de 4 ori 4 etc. Observăm că, dacă scriem toate numerele naturale de la 1 la *n* (inclusiv), după regula dată, sunt în total $n \cdot (n+1) : 2$ termeni. **(5p)** Cum $18 \cdot 19 : 2 = 171$, deducem că se scriu 171 de termeni pentru a folosi numerele naturale de la 1 la 18. **(10p)** Obținem că pe poziția 170 se va afla numărul 18. **(5p)**

*Prin noi, vei fi **tu** cel mai bun!*

Test 10

Pregătire pentru Concursul de Matematică „Traian Lalescu”, 2021

Subiect propus de Adrian Zanoschi

1. Care este șesimea triplului sfertului numărului 1200?

2. Determinați numărul de trei cifre care se mărește cu 1234 dacă la sfârșitul său se adaugă cifra 1.

3. Aflați numerele naturale a și b, știind că a este egal cu trei sferturi din b, iar suma lor este egală cu 735.

4. Ana încearcă să-și aranjeze cărțile pe rafturile bibliotecii sale. Dacă așază câte 50 de cărți pe câte un raft, atunci 10 cărți nu mai au loc pe rafturi, iar dacă așază câte 60 de cărți pe un raft, rămân 4 rafturi goale. Aflați câte rafturi sunt în bibliotecă și câte cărți are Ana.

5. Suma a trei numere naturale este 340. Suma dintre primele două numere este cu 80 mai mare decât suma ultimelor două numere, iar al doilea număr este cu 50 mai mare decât al treilea. Aflați numerele.

6. Determinați în câte moduri se poate scrie numărul 222 ca sumă de cel puțin două numere naturale formate doar din cifre egale cu 2.

7. Frații Andrei, Bogdan și Cristi au împreună 33 de ani. În urmă cu 10 ani, Andrei și Bogdan aveau împreună 8 ani. Aflați ce vârstă aveau frații împreună, în urmă cu 7 ani.

Notă. La toate problemele se cer rezolvări complete. Fiecare dintre problemele 1, 2, 3, 4 se notează cu câte 10 puncte, iar fiecare dintre problemele 5, 6, 7 se notează cu câte 20 de puncte. Se acordă 20 de puncte din oficiu.

Timp de lucru: 60 de minute.

Testul 10

Pregătire pentru Concursul de Matematică „Traian Lalescu”, 2021

Barem de corectare

1. 150. **(10p)**

2. Dacă notăm cu $\overline{abc}$ numărul căutat, atunci $\overline{abc1}=\overline{abc}+1234$ **(5p)**, de unde rezultă că $9\cdot\overline{abc}=1233$, deci $\overline{abc}=137$. **(5p)**

3. Din relațiile $a=\frac{3}{4}\cdot b$ și $a+b=735$, obținem $\frac{3}{4}\cdot b+b=735$ **(5p)** sau $3\cdot b+4\cdot b=4\cdot 735$, de unde rezultă că $b=420$, deci $a=315$. **(5p)**

4. Notăm cu *r* numărul rafturilor și cu *c* numărul cărților. Avem $c=50\cdot r+10$ și $c=60\cdot(r-4)$ **(5p)**, deci $50\cdot r+10=60\cdot(r-4)$, de unde deducem că $r=25$ și apoi $c=50\cdot 25+10=1260$. **(5p)**

5. Fie *a* , *b* și *c* cele trei numere (primul, al doilea, respectiv al treilea). Din relațiile $a+b+c=340$, $a+b=80+b+c$ și $b=50+c$, rezultă că $(80+c)+(50+c)+c=340$, **(10p)** de unde obținem $c=70$ și apoi $a=150$ și $b=120$. **(10p)**

6. Sunt 11 moduri de scriere a numărului 222 ca sumă de cel puțin două numere naturale formate numai cu cifra 2:

$$222=\underbrace{2+2+...+2}_{111\text{ termeni}},\ 222=22+\underbrace{2+2+...+2}_{100\text{ termeni}},\ 222=22+22+\underbrace{2+2+...+2}_{89\text{ termeni}},$$

$$222=22+22+22+\underbrace{2+2+...+2}_{78\text{ termeni}},\ \ldots,\ 222=\underbrace{22+22+...+22}_{10\text{ termeni}}+2\text{. }\textbf{(20p)}$$

Se acordă 2 puncte pentru 2 variante corecte, 4 puncte pentru 3 variante corecte, …, 20 puncte pentru toate cele 11 variante.

7. Fie *x* (ani) vârsta actuală a lui Cristi. Din enunț, deducem că $8+10+10+x=33$, deci $x=5$ ani, **(10p)** ceea înseamnă că în urmă cu 7 ani Cristi nu era născut, iar frații, Andrei și Bogdan, aveau împreună 14 ani. **(10p)**

Prin noi, vei fi tu cel mai bun!

Test 11

Pregătire pentru Concursul de Matematică „Traian Lalescu”, 2021

Subiect propus de Ioana Cătălina Anton

1. Calculați: $500:\left[30:\left(6\cdot 4-9\cdot 2\right)+339:3-124:4+5\cdot 2+3\right]$.

2. Aflați numărul natural cu proprietatea că suma vecinilor săi, mărită de 3 ori, este egală cu 120.

3. Doi cofetari trebuie să pregătească același număr de torturi, după niște rețete secrete și care necesită mult timp pentru preparare. Primul cofetar poate face 8 torturi în 5 zile, iar al doilea 6 torturi în 4 zile. Știind că primul a terminat de făcut toate torturile cu 5 zile mai devreme, aflați câte torturi a făcut fiecare cofetar.

4. O cantitate de zmeură trebuie pusă în lădițe identice. Dacă în fiecare lădiță se pun câte 5 kg de zmeură, atunci rămân 180 kg. Dacă în fiecare lădiță se pun câte 6 kg de zmeură, atunci rămân 20 de lădițe nefolosite și o lădiță cu numai 2 kg. Stabiliți câte lădițe disponibile au fost la început.

5. Aflați cel mai mic număr natural de trei cifre care împărțit la 6 dă restul egal cu 5 și împărțit la 5 dă restul egal cu 4.

6. Determinați numărul natural de trei cifre care adunat cu suma și cu produsul cifrelor sale dă 115.

7. Maria primește un set de exerciții de calcul pentru vacanța de vară. Ea se gândește să le împartă, socotind că poate rezolva un anumit număr de exerciții pe oră. Dacă Maria ar lucra cu 12 exerciții pe oră mai puțin, ar mai avea nevoie de 60 de ore în plus. Dacă ar rezolva cu 7 exerciții pe oră mai puțin și ar lucra cu 5 ore mai mult, i-ar rămâne nerezolvate 425 de exerciții. Maria decide că programarea inițială e cea mai potrivită și alege să lucreze câte 3 ore pe zi. Aflați în câte zile își termină Maria tema pe vacanță.

Notă. La toate problemele se cer rezolvări complete. Fiecare dintre problemele 1, 2, 3, 4 se notează cu câte 10 puncte, iar fiecare dintre problemele 5, 6, 7 se notează cu câte 20 de puncte. Se acordă 20 de puncte din oficiu.

Timp de lucru: 60 de minute.

Test 11

Pregătire pentru Concursul de Matematică „Traian Lalescu”, 2021

Barem de corectare

1. 5. **(10p)**

2. Fie *x* numărul dat; atunci $(x-1+x+1)\cdot 3=120$ **(5p)**, de unde $x=20$. **(5p)**

3. Fie *t* numărul de torturi pe care trebuie să îl facă fiecare cofetar. Atunci primul cofetar are nevoie de $t:8\cdot 5$ zile, iar al doilea de $t:6\cdot 4$ zile. (**5p**) Din $5\cdot t:8+5=4\cdot t:6$ obținem că $t=120$. **(5p)**

4. Notăm cu *n* numărul de lădițe. Atunci $5\cdot n+180=6\cdot(n-21)+2$ **(5p)**, de unde $n=304$. **(5p)**

5. Dacă *n* este numărul căutat, atunci $n=6\cdot a+5$ și $n=5\cdot b+4$, de unde $n+1=6\cdot(a+1)=5\cdot(b+1)$. (**10p**) Cum $n+1$ este cel mai mic multiplu de 5 și de 6, având trei cifre, obținem *n* = 119. (**10p**)

6. Dacă $\overline{abc}$ este numărul căutat, atunci $\overline{abc}+a+b+c+a\cdot b\cdot c=115$. **(5p)** Obligatoriu $a=1$ și atunci $11\cdot b+2\cdot c+b\cdot c=14$. **(5p)** Observăm că *b* = 0 sau *b* = 1. Se obțin soluțiile $b=0, c=7$ și $b=1, c=1$, de unde problema are două soluții: numerele 107 și 111. (**10p**).

7. Notăm cu *x* numărul de exerciții pe care Maria trebuie să le rezolve într-o oră și cu *n* numărul de ore, planificate inițial. Atunci $(x-12)\cdot(n+60)=x\cdot n$ (**3p**), de unde $x\cdot 60=12\cdot(n+60)$ și $5\cdot x=n+60$. (**5p**) Pe de altă parte, $(x-7)\cdot(n+5)+425=x\cdot n$ (**3p**), de unde $5\cdot x+425=7\cdot(n+5)$ și $n+60+425=7\cdot(n+5)$. (**5p**) Se obține *n* = 75 de ore, de unde numărul de zile în care Maria termină tema pentru vacanță este egal cu $75:3=25$. (**4p**)

Prin noi, vei fi tu cel mai bun!

Test 12

Pregătire pentru Concursul de Matematică „Traian Lalescu”, 2021

Subiect propus de Irina Căpraru

1. Calculați $1+10\cdot\left[36:9+10\cdot\left(100-100:10\right)\right]:4$.

2. Fiecare dintre cei 30 de elevi ai clasei știe cel puțin una din limbile străine engleză sau germană, 25 cunosc limba engleză, iar 18 limba germană. Calculați câți elevi cunosc ambele limbi străine și câți elevi cunosc numai limba engleză.

3. Calculați $6a+23b+18c+21d$, știind că $3a+4b=50$ și $5b+6c+7d=152$.

4. Demonstrați că, împărțind diferența și suma a două numere naturale diferite la cel mai mic dintre ele, obținem același rest.

5. Într-un bloc sunt 50 de apartamente cu câte 2 sau câte 3 camere. Aflați câte apartamente de fiecare fel sunt în acel bloc dacă sunt 120 de camere.

6. Determinați vârsta mamei, a fiicei sale și a fiului său, în prezent, știind că: *i*) vârsta mamei este egală cu dublul sumei vârstei celor doi copii ai săi, în prezent; *ii*) peste 8 ani vârsta fiului va reprezenta o treime din vârsta mamei sale; *iii*) fiica avea 4 ani cînd s-a născut fratele său.

7. Alexandru și Ștefan voluntariază la grădina zoologică în timpul verii. Alexandru curăță un elefant în 40 de minute, iar Ștefan curăță un elefant în 2 ore. Calculați în cât timp curăță împreună 5 elefanți.

Notă. La toate problemele se cer rezolvări complete. Fiecare dintre problemele 1, 2, 3, 4 se notează cu câte 10 puncte, iar fiecare dintre problemele 5, 6, 7 se notează cu câte 20 de puncte. Se acordă 20 de puncte din oficiu.

Timp de lucru: 60 de minute.

Test 12

Pregătire pentru Concursul de Matematică „Traian Lalescu”, 2021

Barem de corectare

1. Prin calcul se obține $1+10\cdot\left(4+10\cdot 90\right):4=1+10\cdot 904:4$, **(5p)** de unde rezultă 2261. **(5p)**

2. Numărul elevilor care cunosc ambele limbi străine: $\left(25+18\right)-30=13$. **(5p)** Numărul elevilor care cunosc doar limba engleză $25-13=12$ elevi. **(5p)**

3. $6a+8b=100$ **(3p)**, $15b+18c+21d=456$ **(3p)**, de unde $6a+23b+18c+21d=556$. **(4p)**

4. $a>b\Rightarrow a=bc+r,\ 0\le r<b,\ c\ge 1$ **(5p),** deci $a+b=b\cdot\left(c+1\right)+r,\ a-b=b\cdot\left(c-1\right)+r$. **(5p)**

5. Fie *a* numărul de apartamente cu câte 2 camere, iar *b* numărul de apartamente cu câte 3 camere. $a+b=50,\ 2a+3b=120$ **(10p)**. Prin urmare, $a=30,\ b=20$. **(10p)**

6. Fie *m* vârsta mamei, *a* vârsta fiicei și *b* vârsta fiului.
$m=2\cdot\left(a+b\right),\ m+8=3\cdot\left(b+8\right),\ a=b+4$. **(10p)**
Obținem $m=40,\ a=12,\ b=8.$ Mama are 40 de ani, fiica are 12 ani, fiul are 8 ani. **(10p)**

7. Alexandru curăță 1 elefant în 40 de minute, deci curăță 3 elefanți în 120 de minute. Ștefan curăță 1 elefant în 120 de minute. Prin urmare, Alexandru și Ștefan curăță 4 elefanți în 120 de minute, împreună. **(10p)**
Cei doi curăță, împreună, un elefant în 30 de minute, adică 5 elefanți în 150 de minute. **(10p)**

Prin noi, vei fi tu cel mai bun!

Test 13

Pregătire pentru Concursul de Matematică „Traian Lalescu”, 2021

Subiect propus de Prof. Codrin Precupanu

1. Calculați: $(6+12+18+...+300):(2+4+6+...+100)$.

2. Determinați numărul de două cifre $\overline{ab}$ știind că: $(2\cdot a+3)\cdot(b-4)=36$.

3. Un număr se numeşte „*negruzzist”* dacă nu conține cifra 0, iar toate celelalte 9 cifre apar o singură dată. Scrieți numărul „*negruzzist*” 987654321 ca sumă de două numere „*negruzziste*”.

4. Un număr natural n împărțit la 5 dă restul 3 și împărțit la 6 dă restul 2. Aflați restul împărțirii lui n la 30.

5. Turnul cu Ceas de la Palatul Culturii cântă „Hora Unirii” de atâtea ori cât arată ora exactă $(1,2,3,...,24)$ şi o singură dată la „și jumătate”. De câte ori se aude cântecul într-o singură zi?

6. Adrian merge la cumpărături în 3 magazine. La primul magazin dă 2 lei la intrare, cheltuieşte jumătate din suma rămasă, dă 2 lei la ieşire şi pleacă spre al doilea magazin. Procedează la fel şi la celelalte două magazine şi mai ramâne cu 20 lei. Câți lei a avut la început Adrian şi cât a cheltuit în fiecare magazin?

7. Aflați ultima cifră a numărului:

$$n=99+98+97-96-95-94+93+92+91-...+9+8+7-6-5-4+3+2+1.$$

Notă. La toate problemele se cer rezolvări complete. Fiecare dintre problemele 1, 2, 3, 4 se notează cu câte 10 puncte, iar fiecare dintre problemele 5, 6, 7 se notează cu câte 20 de puncte. Se acordă 20 de puncte din oficiu.

Timp de lucru: 60 de minute.

Test 13

Pregătire pentru Concursul de Matematică „Traian Lalescu”, 2021

Barem de corectare

1. 3. **(10p).**

2. Deoarece $2\cdot a+3$ este un număr impar mai mare decât 3, iar a cifră nenulă, obținem: $2\cdot a+3=9$ şi $b-4=4$, cu soluția $a=3$şi $b=8$, numărul căutat fiind 38 **(10p).**

3. $987654321=123456789+864197532$ (**10p)**.

4. $n=5\cdot a+3$, $n=6\cdot b+2$; înmulțim prima relație cu 6, a doua cu 5 și le scădem **(5p) ;** $6\cdot n-5\cdot n=30\cdot(a-b)+8$**.** Restul este 8**. (5p)**

5. Melodia se aude de $1+2+3+...+24$ de ori la ore exacte şi de 24 de ori la „şi jumătate”.**(10p)** În total, melodia se aude de $25\cdot 24:2+24=324$ de ori. **(10p)**

6. Fie c suma de bani avută de Adrian la intrarea în cel de-al treilea magazin **(5p);**

$$(c-2):2-2=20\Rightarrow c=46 \text{ lei}$$ **(5p)**;

Fie b suma de bani avută la intrarea în al doilea magazin.

$$(b-2):2-2=46\Rightarrow b=98 \text{ lei}$$ **(5p)**;

Fie a suma de bani inițială: $(a-2):2-2=98\Rightarrow a=202$ lei . **(5p)**

7. Cei 99 de termeni îi grupăm câte 6, obținând 16 grupe, fiecare grupă egală cu 9 **(10p)** şi mai rămâne grupa incompletă $1+2+3$, deci $n=16\cdot 9+6=150$. Prin urmare ultima cifră este 0. **(10p).**

Prin noi, vei fi tu cel mai bun!

Test 14

Pregătire pentru Concursul de Matematică „Traian Lalescu”, 2021

Subiect propus de Baghiu Ciprian

1. Calculați: $(2121:21+2020:20)\cdot 11-22$.

2. Aflați cel mai mic număr natural de patru cifre distincte și nenule astfel încât produsul dintre prima și ultima cifră este egal cu produsul celorlalte două cifre.

3. Într-o zi, două curci mănâncă aceeași cantitate de grăunțe ca trei găini. Știind că cinci curci și patru găini mănâncă 1150 grame de grăunțe într-o zi, aflați ce cantitate de grăunțe mănâncă zilnic o curcă.

4. Aflați numerele $\overline{abc}$ care îndeplinesc condiția $c\cdot(6a+b)=14$.

5. Suma a trei numere este 720. Să se afle numerele știind că o treime din primul număr este egal cu o cincime din al doilea, iar al treilea număr este de două ori mai mare decât suma primelor două.

6. Aflați suma numerelor naturale nenule care împărțite la 2021 dau câtul de zece ori mai mic decât restul.

7. Suma a șapte numere distincte este 777. Aflați numerele, știind că suma diferențelor dintre cel mai mare dintre ele și fiecare dintre celelalte numere este 21.

Notă. La toate problemele se cer rezolvări complete. Fiecare dintre problemele 1, 2, 3, 4 se notează cu câte 10 puncte, iar fiecare dintre problemele 5, 6, 7 se notează cu câte 20 de puncte. Se acordă 20 de puncte din oficiu.

Timp de lucru: 60 de minute.

Test 14

Pregătire pentru Concursul de Matematică „Traian Lalescu”, 2021

Barem de corectare

1. $(101+101)\cdot 11-22$ **(5p)**, 2200. **(5p)**

2. 1236. **(10p)**

3. Într-o zi, o curcă mănâncă $3x$ grame de grăunțe, iar o găină mănâncă $2x$ grame de grăunțe. **(3p)** Din relația $15x+8x=1150$, rezultă că $x=50$ **(5p)**, deci, într-o zi, o curcă mănâncă 150 grame de grăunțe. **(2p)**

4. Cum $6a+b\geq 6$, rezultă că $6a+b\in\{7,14\}$. **(4p)** Nunerele sunt: 112, 181, 221. **(6p)**

5. Din enunț rezultă că numerele căutate au formele $3x$, $5x$, respectiv $16x$. **(5p)** Din egalitatea $3x+5x+16x=720$, deducem că $x=30$. **(10p)** Răspunsul este: 90, 150, 480. **(5p)**

6. $a=2021c+10c$, $10c<2021$, **(5p)** $a=2031c$, $1\leq c\leq 202$, **(5p)** $s=2031\cdot 203\cdot 101=41641593$. **(10p)**

7. Fie $x_1<x_2<\ldots<x_7$ numerele căutate. Avem:

$$(x_7-x_1)+(x_7-x_2)+\ldots+(x_7-x_6)=21=6+5+4+3+2+1,\ \textbf{(5p)}$$

de unde rezultă că $x_7-x_1=6,\ x_7-x_2=5,\ \ldots,\ x_7-x_6=1$. **(10p)** Deci, numerele căutate sunt 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114. **(5p)**

Prin noi, vei fi tu cel mai bun!

Test 15

Pregătire pentru Concursul de Matematică „Traian Lalescu”, 2021

Subiect propus de Andrei Plugariu

1. Determinați numărul natural x, știind că $\left[\left(\overline{ab}-\overline{ba}\right):\left(a-b\right)+\left(\overline{ab}+\overline{ba}\right):\left(a+b\right)\right]\cdot x=2020$.

2. La o împărțire, împărțitorul, câtul și restul sunt trei numere pare consecutive cu suma 36. Determinați împărțitorul.

3. Un număr natural are ultima cifră 0. Eliminând ultima cifră, obținem un număr cu 2025 mai mic decât numărul inițial. Determinați numărul inițial.

4. Se consideră următorul șir de numere 1, 22, 111, 2222, 11111, … . Dacă ultimul termen al șirului are 51 de cifre de 1, câte cifre de 2 sunt în șir?

5. Într-un sertar sunt pixuri și creioane. Dacă s-ar face grupe de câte 7 creioane și 6 pixuri, rămân 10 pixuri. Dacă s-ar face grupe de câte 6 creioane și 8 pixuri, rămân 5 creioane. Câte creioane și câte pixuri sunt în sertar?

6. În pătratul alăturat, suma numerelor de pe fiecare linie, coloana sau diagonală este aceeași. Determinați numărul x.

9		
x	10	
3		

7. Spunem că un număr natural de trei cifre este „*special*”, dacă cifra zecilor este cu 1 mai mică decât suma dintre cifra sutelor și cifra unităților.

a) Determinați suma celor mai mici 5 numere *speciale*.

b) Câte numere *speciale* există?

Notă. La toate problemele se cer rezolvări complete. Fiecare dintre problemele 1, 2, 3, 4 se notează cu câte 10 puncte, iar fiecare dintre problemele 5, 6, 7 se notează cu câte 20 de puncte. Se acordă 20 de puncte din oficiu.

Timp de lucru: 60 de minute.

Test 15

Pregătire pentru Concursul de Matematică „Traian Lalescu”, 2021

Barem de corectare

1. 101. **(10p)**

2. Dacă $r=10$, atunci $d=12\cdot 14+10=178$. **(5p)**, iar dacă $r=12$, atunci $d=14\cdot 10+12=152$. **(5p)**

3. $10x=x+2025$ **(5p)**, $\overline{x0}=2250$. **(5p)**

4. $2+4+...+50=650$. **(10p)**

5. Fie c numărul de creioane și p numărul de pixuri. Avem $c:7=(p-10):6$ și $(c-5):6=p:8$ **(10p)** Obținem $p=40, c=35$. **(10p)**

9		d
x	10	c
3	a	b

6. Avem $9+x+3=x+10+c$, adică $c=2$. **(5p)**. Din $9+10+b=3+a+b$ obținem $a=16$. **(5p)** Din $3+10+d=d+c+b$ obținem $b=11$. **(5p)** Așadar, suma pe orice linie coloană sau diagonală este 30 **(3p)**, obținem $x=18$. **(2p)**

7. **a)** $100+111+122+133+144=610$. **(5p)**

b) Notăm numărul *special* cu $\overline{abc}$. Pentru $b=0$ obținem un număr (100), pentru $b=1$ obținem 2 numere (111, 210), pentru $b=2$ obținem 3 numere (122, 221, 320), pentru $b=8$ obținem 9 numere, iar pentru $b=9$ tot 9 numere, în total 54 de numere *speciale*. **(15p)**

MINISTERUL EDUCAȚIEI
COLEGIUL NAȚIONAL
"ION LUCA CARAGIALE" PLOIEȘTI
Str. Gh. Doja Nr.98; Cod 100164; Tel/Fax: +40244.522.340
e-mail : secretariatcnilc@yahoo.com, secretariatcnilc@gmail.com

BAREM

Probă scrisă la matematică - 29 iunie 2022

SUBIECTUL I (20 PUNCTE)

a) Determinați numerele naturale *a*, *b*, *c* știind că:

$a = 5 \cdot 7 - [\, 5 \cdot 9 : 9 \cdot 8 : 8 \cdot 7 : 7 \cdot 6 : 6 \cdot 5 : 5 \cdot 4 : 4 \cdot 3 : 3 \cdot 2 : 2 + 3 \cdot (\, 14 + 21 \cdot 2) : 8 \,]$;

$2022 - b = 2 \cdot 1003 + a + 2021 : 2021$;

$12 : c = b$.

b) Determinați cel mai mare număr de două cifre, care prin împărțire la un număr de o cifră, dă restul 8.

SOLUȚIE:

a) $a=35-[5+3\cdot(14+42):8]$……2p
$a=35-(5+3\cdot 56:8)$……...1p
$a=35-(5+21)$……2p
$a=35-26=9$……..1p
$2022-b=2006+9+1$……..1p
$2022-b=2016$……..1p
$b=2022-2016=6$……..1p
$c=12:6=2$……1p

b) $\overline{ab} = x \cdot c + 8$……2p
$x > 8$ și x cifră……...2p
$x = 9$……...2p
$\overline{ab} = 9 \cdot c + 8$ si $\overline{ab}$ maxim $\Rightarrow$ c=10……2p
$\overline{ab} = 98$……..2p

SUBIECTUL II (20 PUNCTE)

Maria și Ionuț sunt elevi în clasa a IV a A. Împreună cu colegii lor de clasă participă la un concurs de cultură generală. Știind că numărul fetelor este de două ori mai mare decât numărul băieților, iar Ionuț are cu 10 colegi mai puțini decât colege, aflați câte colege are Maria.

SOLUȚIE:

Metoda1

Notăm f= numărul fetelor din clasă,

b= numărul băieților din clasă și f=2b....3p

b-1=f-10.....3p

f=b+9.....3p

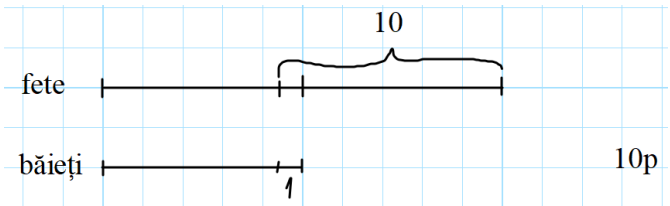
9+b=2b.....3p

b=9.....3p

f=18..... ..3p

Maria are 18-1=17 colege.... ..2p

Metoda 2 (grafică)



10p

10-1=9 băieți 4p
9x2=18 fete 4p
18-1=17 colege are Maria.....2p

SUBIECTUL III (20 PUNCTE)

Aflați numărul de forma $\overline{ab}$, știind că $5 \cdot \overline{ab} + s = 216$, unde s este suma cifrelor numărului dat.

SOLUȚIE:

$5 \cdot \overline{ab} + a + b = 216$ 1p
$5 \cdot (10a + b) + a + b = 216$.....1p
$50a + 5b + a + b = 216$.....1p
$51a + 6b = 216$.....1p
17a+2b=72.....1p
2b, 72 pare.....2p
a par.....2p
a cifră nenulă 1p
$17a \leq 72 \Longrightarrow a \leq 4$.....2p
Cazul I: a=2 $\Longrightarrow 17 \cdot 2 + 2b = 72$.....1p
b=19.....2p
b cifră, deci nu convine.....1p
Cazul II: a=4$\Longrightarrow 17 \cdot 4 + 2b = 72$.....1p
b=2.....2p
$\overline{ab} = 42$.....1p

SUBIECTUL IV (30 PUNCTE)

Fie șirul de numere naturale:

0, 10, 210, 3210, 43210, ..., 202220212020...210 .

a) Scrieți termenul al 10- lea și determinați câți termeni are șirul.
b) Câte cifre are al 100-lea termen?
c) Determinați restul împărțirii sumei cifrelor celui de-al 100 lea termen la 9.

SOLUȚIE:

a) Termenul al 10-lea este: 9876543210.....5p
Șirul are 2023 termeni.....5p

b) Termenul al 100-lea este: 99989796...210.....4p
De la $0 \longrightarrow 9$ sunt 10 cifre.....2p
De la $10 \longrightarrow 99$ sunt $2 \cdot 90 = 180$ cifre.....2p
10+180=190 cifre.....2p

c) 0+1+2+.....+9=45(suma ultimelor 10 cifre).....1p

$$\left.\begin{array}{l}(1+0)+(1+1)+\cdots+(1+9)=10\cdot 1+45\\(2+0)+(2+1)+\cdots+(2+9)=10\cdot 2+45\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\(9+0)+(9+1)+\cdots+(9+9)=10\cdot 9+45\end{array}\right\}\text{.....3p}$$

Suma cifrelor este: 10+20+30+...+90+45· 10.....1p
=450+450.....2p
=900.....1p
900:9=100⟹restul este 0.....2p

ROMANIA
MINISTERUL EDUCATIEI
COLEGIUL NATIONAL ALEXANDRU IOAN CUZA
Strada Cuza-Voda nr. 47, Focsani 620034, Vrancea, Romania
Tel./Fax:0040.237.226.840, E-mail: collegecnaic@yahoo.com,Web:www.cnaic.ro

Barem test pentru admitere în clasa a V-a
12.06.2022
Matematică - varianta 2

1. **a) Calculați:** $\{[(\mathbf{34+170-17}):\mathbf{17-8}]\cdot\mathbf{2-4}\}+\mathbf{2020}$
   $\{[11-8]\cdot 2-4\}+2020$.....3p
   $\{6-4\}+2020$.....2p
   $2+2020=2022$.....2p
   b) Aflați numărul x : $\{[(\mathbf{123:3-22:2})-x]:\mathbf{10}\}\cdot\mathbf{32+18=82}$
   $\{[30-x]:10\}\cdot 32+18=82$.....3p
   $\{[30-x]:10\}\cdot 32=82-18=64$.....2p
   $[30-x]:10=64:32=2$.....1p
   $30-x=2\cdot 10=20$.....1p
   $x=10$.....1p

2. Bunica împarte cu cei doi nepoți ai săi o sumă de bani astfel: lui Andrei îi dă o treime din suma pe care o are, iar lui Bogdan cinci optimi din rest. Bunica rămâne cu 300 lei. Câți lei primește fiecare nepot și câți bani a avut bunica inițial?

Se reprezintă printr-un segment suma de bani pe care o are bunica. Se împarte segmentul în 3 părți egale. Unul din cele trei segmente reprezintă suma de bani primită de Andrei. Segmentul rămas se împarte în opt părți egale. Cinci din cele opt părți reprezintă banii primiți de Bogdan iar trei din cele opt părți egale reprezintă banii rămași bunicii.

Se acordă câte 5 puncte pentru calculul corect al sumelor primite de cei doi nepoți și suma inițială de bani a bunicii.

Andrei reprezentat de 4 segmente egale
Bogdan reprezentat prin 5 segmente
Au rămas bunicii 300 lei reperzentate de trei segmente egale.
Deci un segment reprezintă 100 lei, de unde concluziile: Bunica avea 1200 lei, Andrei a primit 400 lei, iar Bogdan 500 lei

3 . a) Determinați termenul situat pe poziția 100 din șirul următor:

3; 8; 13; 18; ……

$3=5\cdot 0+3$ termenul situate pe poziția 1.....1p
$8=5\cdot 1+3$ termenul situate pe poziția 2.....1p
$13=5\cdot 2+3$ termenul situate pe poziția 3.....1p
$18=5\cdot 3+3$ termenul situate pe poziți 4.....1p
Pe poziția 100 se va situa termenul $5\cdot 99+3=498$.....3p

ROMANIA
MINISTERUL EDUCATIEI
COLEGIUL NATIONAL ALEXANDRU IOAN CUZA
Strada Cuza-Voda nr. 47, Focsani 620034, Vrancea, Romania
Tel./Fax:0040.237.226.840, E-mail: collegecnaic@yahoo.com,Web:www.cnaic.ro

b) Un număr natural prin împărțire la 12, dă restul 5. Care este restul obținut prin împărțirea aceluiași număr la 4?

$n = 12 \cdot c + 5$……...2p

Restul împărțirii unui număr la 4 este mai mare sau egal cu zero și mai mic decât 4.

$n = 12 \cdot c + 4 + 1$……..2p

$n = 4 \cdot (3 \cdot c + 1) + 1$……....2p

Restul împărțiri numărului *n* la 4 este 1…….……2p

4. Mama a creat câte un cont pentru fiecare din fiicele sale gemene Ana și Bia. Când fetele au împlinit un an, a depus în fiecare cont câte 300 lei. În anii următori, la aniversarea fetelor, mama depune în fiecare cont cu 300 de lei mai mult decât în anul precedent. În prezent, Ana și Bia au împreună în conturile lor, suma de 33000 lei. Aflați vârsta fetelor.

$33000 : 2 = 16500$ lei are fiecare fată în cont……..……2p

$16500 = 300 \cdot 1 + 300 \cdot 2 + 300 \cdot 3 + \cdots + 300 \cdot n$, unde n reprezintă vârsta

din prezent a fiecărei fiice……..…..5p

$16500 = 300 \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + n)$……..…3p

$1 + 2 + 3 + \cdots + n = 16500 : 300 = 55$…….3p

Se observă că $1 + 2 + 3 + \cdots + 10 = (10 \cdot 11) : 2 = 55$, $n = 10$……2p

COLEGIUL NAȚIONAL „EMANUIL GOJDU”
STR. SPIRU HARET, NR. 3-5
ORADEA, COD 410066
TEL/FAX: 00 40 259/417420; 00 40 259/417668; 00 40 359/439101
E-MAIL: egojdu@gmail.com

CONCURSUL DE ADMITERE ÎN CLASA a V-a
PENTRU ANUL ȘCOLAR 2022-2023
BAREM DE EVALUARE Varianta 2

• Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
• Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
• Se acordă 10 puncte din oficiu.

Problema.1. (30 de puncte)

a) Se consideră șirul de operații $1 + 2 \times 3 + 4 : 5 + 6 \times 7 - 8$. Așezați corespunzător paranteze pentru a obține rezultatul 55.

b) Calculați suma dintre dublul lui a și triplul lui b, dacă:

$a = [(20 + 5 : 5) \times 10 - 10] : 10 + 0 : 4$

$b = [(20 : 4) \times 5 + 20 \times 2] - 4 - 0 \times 5$

Barem

a) $[1 + (2 \times 3 + 4) : 5 + 6] \times 7 - 8 = 55$ **(10 puncte)**

b) $a = [(20 + 1) \times 10 - 10] : 10 + 0$ ..... **(1 punct)**

$a = (21 \times 10 - 10) : 10$ ..... **(1 punct)**
$a = (210 - 10) : 10$ ..... **(1 punct)**
$a = 200 : 10$ ..... **(1 punct)**
$a = 20$ ..... **(1 punct)**

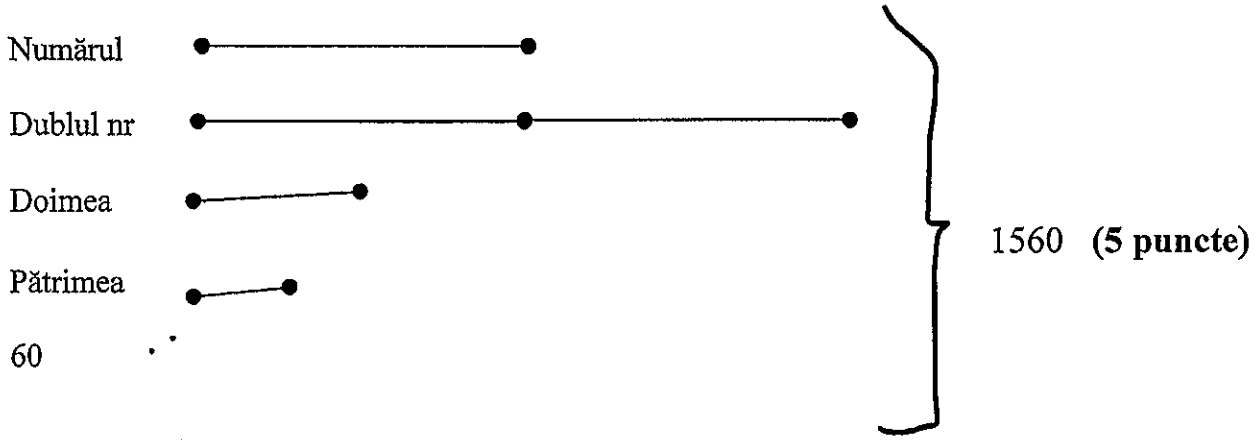
$b = (5 \times 5 + 20 \times 2) - 4 - 0$ ..... **(2 puncte)**
$b = (25 + 40) - 4$ ..... **(1 punct)**
$b = 65 - 4$ .... **(1 punct)**
$b = 61$ ..... **(1 punct)**

$2 \times 20 = 40$ **(4 puncte)**
$3 \times 61 = 183$ **(4 puncte)**
$40 + 183 = 223$ **(2 puncte)**

Problema.2. (20 de puncte)

Mă gândesc la un număr. La dublul acestuia am adăugat numărul la care m-am gândit. La rezultatul obținut am adunat doimea numărului la care m-am gândit. La noul rezultat am adăugat pătrimea numărului la care m-am gândit și numărul 60, obținând astfel numărul 1560. La ce număr m-am gândit?

Barem:



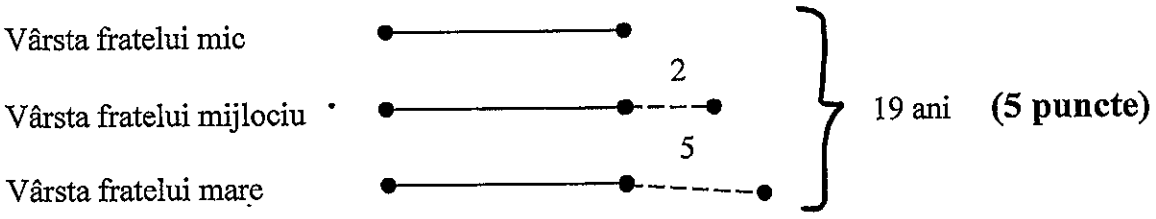
În total sunt 15 pătrimi care impreună sunt 1560-60=1500 ..... **(5 puncte)**
O pătrime este 1500 : 15 = 100 ..... **(5 puncte)**
Numărul este 100 x 4 = 400 ..... **(5 puncte)**

Problema.3. (20 de puncte)

Acum 5 ani suma vârstelor a trei frați era egală cu 19 ani. Să se afle vârsta fiecăruia peste un an, știind că peste 2 ani fratele mai mic va avea vârsta actuală a fratelui mijlociu, iar acum 5 ani, fratele mare avea vârsta actuala a fratelui mic.

Barem:

Acum 5 ani :



Triplul vârstei fratelui mic de acum 5 ani este 19-2-5=12 ani ..... **(3 puncte)**

Vârsta fratelui mic de acum 5 ani este 12:3=4 ani ..... **(3 puncte)**

Vârsta fratelui mic peste 1 an va fi 4+5+1=10 ani ..... **(3 puncte)**
Vârsta fratelui mijlociu peste 1 an va fi 10+2=12 ani ..... **(3 puncte)**
Vârsta fratelui mare peste 1 an va fi 10+5=15 ani ..... **(3 puncte)**

Problema.4. (20 de puncte)

Arătați că oricum am alege 10 numere naturale nenule diferite cu suma 98, printre ele se găsesc cel puțin două numere pare.

Barem

Presupunem că toate numerele sunt impare şi adunăm cele mai mici 10 numere naturale impare.

1+3+5+7+9+11+13+15+17+19 =100 ..... **(10 puncte)**

100 -98 =2 , prin urmare trebuie să scădem 2 ..... **(5 puncte)**

Dacă dintr-un număr scădem 2 vom obține două numere egale ceea ce este imposibil ..... **(3 puncte)**

Dacă din două numere scădem câte 1 acele numere devin pare **(2 puncte)**

COLEGIUL NAŢIONAL „UNIREA”
Str. Cezar Bolliac, Nr. 15, Focşani, Vrancea
Tel / Fax: 0040 237 215659; e-mail: cnu@lufo.ro

Testare pentru clasa a V-a, 9 iunie 2022

1. Să se calculeze: $475+24:3\cdot\left[348:3-3\cdot\left(42-5\cdot4:2\right)\right]$.

Soluție:

$475+24:3\cdot\left[116-3\cdot\left(42-10\right)\right]$ **7p**

$475+24:3\cdot\left(116-3\cdot32\right)$ **7p**

$475+8\cdot20=635$ **6p**

2. Câte perechi de numere naturale a și b, $a,b\le2022$ verifică egalitatea:

$$\left\{\left[\left(a:b+2\right):3\right]\cdot4\right\}:5-6=6.$$

Soluție:

$\left\{\left[\left(a:b+2\right):3\right]\cdot4\right\}:5=12$ **3p**

$\left[\left(a:b+2\right):3\right]\cdot4=60$ **3p**

$\left(a:b+2\right):3=15$ **3p**

$a:b+2=45$ **3p**

$a:b=43$ **3p**

$a\le2022\Rightarrow b=1,2,3,...,47\Rightarrow$ sunt 47 de perechi **5p**

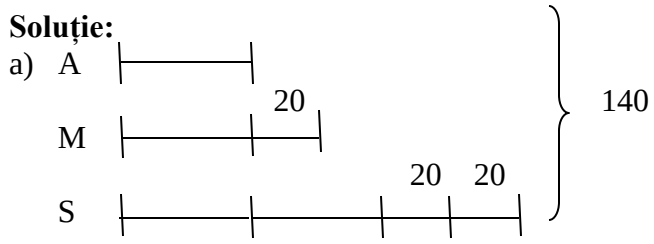
3. Maria are cu 20 de ani mai mult decât Ana și jumătate din vârsta Sabinei. Știind că împreună au 140 de ani, să se afle:

a) vârsta fiecăreia;

b) peste câți ani vârsta Sabinei va fi de 3 ori mai mare decât vârsta Anei.

Soluție:

a)



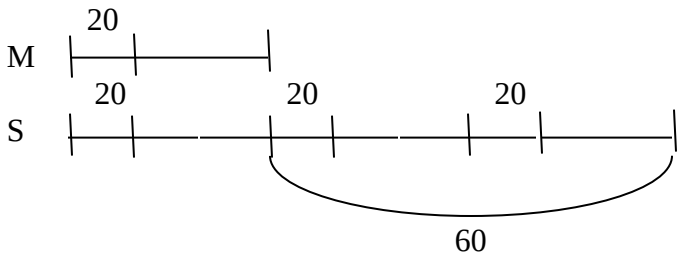
$140-20-20-20=80$ (4 segmente)

$80:4=20$ (ani Ana)

$20+20=40$ (ani Maria)

$40\cdot2=80$ (ani Sabina) **10p**

b)



$80-20=60$ (diferența între Sabina și Ana)

$(60-40):2=10$ (ani)

Peste 10 ani vârsta Sabinei va fi de 3 ori mai mare ca vârsta Anei **10p**

4. Un număr natural se numește *unirist* dacă toate cifrele sale sunt impare (de exemplu 7, 37 și 1391 sunt *uniriste*).

a) Scrieți în ordine crescătoare primele 12 numere *uniriste*.

b) Câte numere *uniriste* sunt mai mici decât 1234?

c) Care este suma primelor 50 de numere *uniriste*?

Soluție:

a) 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 31, 33 **5p**

b) Numere *uniriste* de 1 cifră => 5 numere

Numere *uniriste* de 2 cifre => $5\cdot 5=25$ numere

Numere *uniriste* de 3 cifre => $5\cdot 5\cdot 5=125$ numere

Numere *uniriste* de 4 cifre mai mici ca 1234 sunt de forma $\overline{11ab}$ => $5\cdot 5=25$ numere

În total $5+25+125+25=180$ numere **5p**

c) Primele 50 numere *uniriste* sunt 1, 3, … 179

$1+3+5+7+9=25$

$11+13+15+17+19=75$

$31+33+35+37+39=275$

$51+53+55+57+59=375$

$71+73+75+77+79=575$

$91+93+95+97+99=775$

$75+175+275+375+475=1375$

$111+...+179=2900$

În total $25+1375+2900=4300$ **5p**

MINISTERUL EDUCAȚIEI

COLEGIUL NAȚIONAL "LUCIAN BLAGA" SEBEȘ
515800 STR. CĂLUGĂRENI NR. 49
TEL. 0258-731217 FAX. 0258-730756
colb.sebes@yahoo.com
http://www.cnlb.ro

Test de departajare la matematică pentru admiterea în clasa a V-a
1 iulie 2022

Subiectul I (40 puncte)

a) Calculați numărul: $E = 338 - 7 \times 48 + \{195 : [(1 + 2 + 3 + 4 + 5) : 5 + 2] - 19\} \times 101$.

b) Determinați numărul natural a din egalitatea: $\{[(2 \times a + 6) : 6 + 6] \times 6 - 6\} \times 3 - 228 = 2022$

Subiectul II (30 puncte)

La o florărie s-au adus 74 de trandafiri roșii, galbeni și albi. Trandafiri roșii și cei galbeni sunt în total 39, trandafiri galbeni și cei albi sunt în total 50. Se vor forma buchete de trandafiri cu 3, cu 4 și cu 5 flori. Toate florile dintr-un buchet au aceeași culoare și toate buchetele cu flori de aceeași culoare au același număr de flori.

Câte buchete de flori s-au realizat?

Subiectul III (20 puncte)

a) Aflați câte numere naturale de două cifre se împart exact la 7.

b) Spunem că un număr natural cu cifre nenule și diferite este **vesel**, dacă alegând, de la stânga la dreapta, oricare două cifre consecutive ale sale, acestea formează un număr care se împarte exact la 7 (de exemplu, numărul 2849 este vesel, deoarece 28, 84 și 49 se împart exact la 7). Aflați suma dintre cel mai mare și cel mai mic număr vesel cu câte 5 cifre.

***Notă**: Toate subiectele sunt obligatorii*
Se acordă 10 puncte din oficiu
Timp de lucru: 60 minute

Succes!

COLEGIUL NAȚIONAL IAȘI

CATEDRA DE MATEMATICĂ

An școlar 2021-2022

Concursul de Matematică
Alexandru Myller – 2022

Test de antrenament 1

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Timp de lucru efectiv: 45 minute. Se adaugă 15 minute pentru familiarizarea cu subiectele.**
- **Se acordă 30 puncte din oficiu.**

SUBIECTUL I *Scrieți pe foaia de concurs doar răspunsurile* **(60 de puncte)**

10p **1.** Determinați numărul natural x, dacă $5-(4x+1):3=2$.

10p **2.** Suma a două numere naturale este 108. Al doilea număr este cincimea primului. Aflați diferența dintre cele două numere.

10p **3.** Calculați suma numerelor naturale care, împărțite la 3, dau câtul 10.

10p **4.** Scrieți cel mai mare număr natural de forma $\overline{abc}$ cu proprietatea că $a \neq b \neq c$.

10p **5.** Un pătrat mare este format dintr-un pătrat mijlociu cu perimetrul de 8 cm și cinci pătrate mici cu perimetrele de 4 cm fiecare. Determinați perimetrul pătratului mare.

10p **6.** Daria citește 15 pagini într-o jumătate de oră, iar Darius citește 21 de pagini în trei sferturi de oră. Aflați câte pagini citesc la un loc, într-o oră, cei doi copii.

SUBIECTUL al II-lea *Scrieți pe foaia de concurs rezolvările complete* **(60 de puncte)**

7. Se consideră șirul de numere naturale 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, … .

10p **a)** Stabiliți dacă numărul 100 este sau nu termen al șirului.

10p **b)** Care este cel de-al 100-lea termen al șirului?

10p **c)** Calculați suma primilor 100 de termeni ai șirului.

8. Trei coșuri conțin mere, în ultimele două la un loc fiind 65. Un sfert din numărul merelor din primul coș se mută în al doilea. Apoi, jumătate din merele din al doilea coș se mută în al treilea. Astfel, primele două coșuri conțin număr egal de mere, iar în al treilea coș sunt cu 15 mere mai mult decât în cel de-al doilea.

10p **a)** Arătați că în cel de-al treilea coș erau, la început, 15 mere.

10p **b)** Câte mere erau la început în cel de-al doilea coș?

10p **c)** Câte mere erau la început în primul coș?

COLEGIUL NAȚIONAL IAȘI

CATEDRA DE MATEMATICĂ

An școlar 2021-2022

Concursul de Matematică
Alexandru Myller – 2022

Test de antrenament 2

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Timp de lucru efectiv: 45 minute. Se adaugă 15 minute pentru familiarizarea cu subiectele.**
- **Se acordă 30 puncte din oficiu.**

SUBIECTUL I *Scrieți pe foaia de concurs doar răspunsurile* **(60 de puncte)**

10p **1.** Știind că $a \cdot b = 138$ și $c \cdot a = 84$, calculați $a \cdot (b - c) : 3$.

10p **2.** Determinați cel mai mic număr natural de patru cifre având produsul cifrelor egal cu 16.

10p **3.** Aflați câte numere naturale de trei cifre au cifrele distincte, scrise în ordine crescătoare, iar suma cifrelor este 10.

10p **4.** Un ciclist a parcurs un sfert din traseul stabilit. Dacă ar mai merge încă 16 km, ar mai avea de parcurs un sfert din traseu. Ce lungime are traseul?

10p **5.** Aflați cel mai mare număr natural care, împărțit la 100, dă un cât mai mic decât restul.

10p **6.** În clasa a IV-a C sunt 28 de elevi. Oricum am alege 15 elevi din clasă, printre ei se vor afla cel puțin 4 băieți. Aflați numărul minim al băieților din clasa a IV-a C.

SUBIECTUL al II-lea *Scrieți pe foaia de concurs rezolvările complete* **(60 de puncte)**

7. Adrian și-a propus să rezolve 100 de probleme. În prima zi a rezolvat 2 probleme, în a doua zi a rezolvat cu 2 probleme mai mult decât în prima, în a treia zi cu 2 probleme mai mult decât în a doua și așa mai departe. În ultima zi, Adrian a rezolvat problemele rămase.

10p **a)** Câte probleme a rezolvat Adrian în primele șapte zile?

10p **b)** În a câta zi a terminat cele 100 de probleme?

10p **c)** Câte probleme a rezolvat în ultima zi?

8. Trei prieteni participă la două concursuri de matematică. La primul concurs Andrei primește drept premiu cu 20 de lei mai mult decât Dragoș, iar Vasile cu 20 de lei mai mult decât Andrei. La al doilea concurs Dragoș primește cu 50 de lei mai mult decât la primul, Andrei cu 20 de lei mai puțin decât Dragoș, iar Vasile cu 20 de lei mai puțin decât Andrei. Cei trei copii au primit la cele două concursuri, în total, suma de 780 lei.

10p **a)** Ce sumă de bani primește Dragoș la primul concurs?

10p **b)** Ce sumă de bani primește Andrei la primul concurs?

10p **c)** Dacă ar cumpăra împreună 3 albume și 2 cărți, copiilor le-ar rămâne 80 lei din suma totală primită. Dacă ar cumpăra 2 albume și 3 cărți, le-ar mai trebui 80 lei. Cât costă un album și o carte împreună?

COLEGIUL NAŢIONAL IAŞI

CATEDRA DE MATEMATICĂ

An şcolar 2021-2022

Concursul de Matematică
Alexandru Myller – 2022

Test de antrenament 3

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Timp de lucru efectiv: 45 minute. Se adaugă 15 minute pentru familiarizarea cu subiectele.**
- **Se acordă 30 puncte din oficiu.**

SUBIECTUL I *Scrieți pe foaia de concurs doar răspunsurile* **(60 de puncte)**

10p **1.** Calculaţi $15 + 3 : 3$.

10p **2.** Suma a cinci numere naturale consecutive este 15. Determinaţi cel mai mare dintre numere.

10p **3.** Pentru 5 bluze şi 4 tricouri s-au plătit 299 lei. Știind că 2 bluze costă cât 3 tricouri, stabiliți cât costă o bluză și cât costă un tricou.

10p **4.** Sofia a cules 33 de floricele: ghiocei şi toporaşi. Numărul ghioceilor este cu 1 mai mare decât o treime din numărul toporaşilor. Aflaţi câţi ghiocei şi câţi toporaşi sunt în buchetul Sofiei.

10p **5.** Lungimea unei săli de dans este cu 6 metri mai mare decât lățimea ei, iar perimetrul sălii este 112 metri. Determinaţi lungimea și lățimea sălii de dans.

10p **6.** Numărul natural n împărţit la 54 dă restul 31. Aflaţi restul împărţirii lui n la 18.

SUBIECTUL al II-lea *Scrieți pe foaia de concurs rezolvările complete* **(60 de puncte)**

7. Se consideră numerele naturale de forma $n = \overline{ab} + \overline{ba}$, unde a și b sunt cifre nenule.

10p **a)** Numărul n poate fi egal cu 45? Justificați răspunsul!

10p **b)** Stabiliți câte numere naturale n având forma dorită există.

10p **c)** Calculați suma tuturor numerelor naturale n cu proprietatea din enunț.

8. Istoria **Colegiului Naţional din Iaşi** începe la 23 ianuarie 1828; scriem această dată sub forma 23.01.1828. În general, vom scrie orice dată sub forma *zz.ll.aaaa*, unde *zz* reprezintă ziua, *ll* luna, iar *aaaa* anul.

10p **a)** Astăzi este 21 martie 2022. Cum se scrie această dată în formatul dorit?

10p **b)** Care este prima dată după 23.01.1828 care se scrie cu patru cifre distincte, fiecare folosită de câte două ori?

10p **c)** De câte ori s-ar folosi cifra 2 în scrierea datelor, în formatul dorit, pentru toată luna februarie a anului 1828?

COLEGIUL NAȚIONAL IAȘI

CATEDRA DE MATEMATICĂ

An școlar 2021-2022

Concursul de Matematică
Alexandru Myller – 2022

Test de antrenament 4

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Timp de lucru efectiv: 45 minute. Se adaugă 15 minute pentru familiarizarea cu subiectele.**
- **Se acordă 30 puncte din oficiu.**

SUBIECTUL I *Scrieți pe foaia de concurs doar răspunsurile* **(60 de puncte)**

10p **1.** Determinați numărul natural a știind că $(2a-1):3-8=1$.

10p **2.** După ce a citit două treimi dintr-o carte, un elev mai are de citit 135 de pagini pentru a termina cartea. Câte pagini are cartea?

10p **3.** Patru portocale cântăresc cât trei mere, iar cinci mere cântăresc cât opt banane. Dacă pe un taler al unei balanțe așezăm cinci portocale, câte banane trebuie să așezăm pe celălalt taler pentru ca balanța să fie în echilibru?

10p **4.** Determinați numărul natural $\overline{ab}$ cu proprietatea că $\overline{1ab2}=\overline{ab}+1290$.

10p **5.** Dacă mărim latura unui pătrat cu 4 cm, perimetrul se mărește de trei ori. Care este lungimea laturii pătratului inițial?

10p **6.** Tatăl și fiul au împreună 30 de ani. La nașterea fiului, tatăl avea 24 de ani. Peste câți ani vârsta tatălui va fi de trei ori mai mare decât vârsta fiului?

SUBIECTUL al II-lea *Scrieți pe foaia de concurs rezolvările complete* **(60 de puncte)**

7. Un număr se numește *elegant* dacă are forma $\overline{abcba}$, unde a, b și c sunt cifre distincte.

10p **a)** Scrieți cel mai mic și cel mai mare dintre numerele elegante.

10p **b)** Stabiliți câte numere elegante există.

10p **c)** Aflați numerele elegante care au suma cifrelor 27 și ultima cifră 6.

8. Ana, Emilia și Maria au, fiecare, câte un număr de bomboane. Cele trei fete joacă un joc. Cea care pierde o rundă trebuie să le dea celorlalte două din bomboanele sale, astfel încât cele două să își dubleze numărul bomboanelor. În prima rundă pierde Ana, în cea de-a doua rundă pierde Emilia, iar în cea de-a treia pierde Maria. La final, fiecare fată are câte 48 de bomboane.

10p **a)** Câte bomboane are Maria după a doua rundă?

10p **b)** Câte bomboane are Emilia după prima rundă?

10p **c)** Câte bomboane avea fiecare fată la începutul jocului?

COLEGIUL NAȚIONAL IAȘI

CATEDRA DE MATEMATICĂ

An școlar 2021-2022

Concursul de Matematică
Alexandru Myller – 2022

Test de antrenament 5

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Timp de lucru efectiv: 45 minute. Se adaugă 15 minute pentru familiarizarea cu subiectele.**
- **Se acordă 30 puncte din oficiu.**

SUBIECTUL I *Scrieți pe foaia de concurs doar răspunsurile* **(60 de puncte)**

10p **1.** Calculați $2022 - 20 \cdot 22$.

10p **2.** Stabiliți câte perechi de numere naturale (x, y) verifică egalitatea $72 : (x+3) = 2y+1$.

10p **3.** Câte numere naturale de patru cifre au produsul cifrelor egal cu 18?

10p **4.** Determinați cel mai mare număr de forma $\overline{abc}$ cu proprietatea $\overline{5ab} + \overline{3ac} = 913$.

10p **5.** Aflați numărul natural care se mărește cu 2022 atunci când se adaugă cifra 6 la dreapta sa.

10p **6.** Un automobil pleacă din Iași către Timișoara, cu viteza de 60 km/h. După trei ore, un alt automobil pleacă din Iași, pe același traseu, și ajunge din urmă primul automobil după șase ore. Care este viteza celui de-al doilea automobil?

SUBIECTUL al II-lea *Scrieți pe foaia de concurs rezolvările complete* **(60 de puncte)**

7. Suma a trei numere naturale a, b și c este 111. Împărțindu-le, pe rând, la același număr natural nenul, câturile obținute sunt numere naturale consecutive (în ordine crescătoare), iar resturile obținute sunt 1, 2, respectiv 3.

10p **a)** Dacă $a = 1$, aflați valorile numerelor b și c.

10p **b)** Arătați că numărul b este impar.

10p **c)** Câte triplete (a, b, c) de numere naturale verifică toate condițiile problemei?

8. Dacă Maria ar așeza câte 7 trandafiri în fiecare vază, i-ar rămâne 5 trandafiri fără vază. Dacă ar așeza câte 9 trandafiri în fiecare vază, în ultima vază ar fi doar 6 trandafiri.

10p **a)** Arătați că Maria are 4 vaze.

10p **b)** Ce sumă obține Maria dacă vinde trandafirii cu 5 lei firul?

10p **c)** Cu banii astfel câștigați, fata cumpără cărți și caiete. Dacă ar cumpăra 6 caiete și 10 cărți nu i-ar ajunge 15 lei, iar dacă ar cumpăra 6 cărți și 10 caiete i-ar rămâne 25 lei. Cât costă o carte și cât costă un caiet?

COLEGIUL NAȚIONAL IAȘI

CATEDRA DE MATEMATICĂ

An școlar 2021-2022

Concursul de Matematică
Alexandru Myller – 2022

Test de antrenament 6

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Timp de lucru efectiv: 45 minute. Se adaugă 15 minute pentru familiarizarea cu subiectele.**
- **Se acordă 30 puncte din oficiu.**

SUBIECTUL I *Scrieți pe foaia de concurs doar răspunsurile* **(60 de puncte)**

10p **1**. Determinați numărul natural x din egalitatea $23-2\cdot(x-30)=7$.

10p **2**. Aflați cel mai mare număr natural care, împărțit la 10, dă restul cu 1 mai mare decât dublul câtului.

10p **3**. Calculați suma numerelor a, b și c, știind că $a\cdot b=48, a\cdot c=40$ și $a\cdot(a+b-c)=24$.

10p **4**. Scrieți cel mai mic număr natural care are suma cifrelor egală cu 10 și produsul cifrelor egal tot cu 10.

10p **5**. Un măr și o pară cântăresc împreună 250 grame. Același măr și o jumătate de pară cântăresc împreună 175 grame. Aflați cât cântărește mărul.

10p **6.** O persoană parcurge de obicei drumul de acasă la serviciu în 16 minute. Într-o zi, după ce parcurge un sfert din drum cu viteza obișnuită, dublează viteza și ajunge la serviciu la ora 8:00. Aflați la ce oră a pornit spre serviciu.

SUBIECTUL al II-lea *Scrieți pe foaia de concurs rezolvările complete* **(60 de puncte)**

7. Pe o tablă se scriu, crescător, următoarele numere naturale: 1, 4, 7, 10, …, 397, 400.

10p **a)** Aflați care este al 100-lea număr scris pe tablă.

10p **b)** Stabiliți care este numărul total de cifre folosite pentru scrierea tuturor numerelor.

10p **c)** Se șterg de pe tablă numerele de pe pozițiile impare, apoi se șterg cele de pe pozițiile pare din șirul rămas. Determinați suma numerelor care se mai află, în final, pe tablă.

8. Ana și Bianca au câte 120 de bile, fiecare având atât bile albe, cât și bile roșii. Ana preferă bilele roșii, așa că negociază următorul schimb de bile cu Bianca: Ana dă câte 3 bile albe pentru fiecare bilă roșie primită. La final, Ana are 90 de bile și toate sunt roșii, iar Bianca are număr egal de bile albe și roșii.

10p **a)** Stabiliți câte bile roșii au împreună cele două fete.

10p **b)** Câte schimburi au avut loc?

10p **c)** Câte bile de fiecare fel a avut Bianca inițial?

COLEGIUL NAȚIONAL IAȘI

CATEDRA DE MATEMATICĂ

An școlar 2021-2022

Concursul de Matematică
Alexandru Myller – 2022

Test de antrenament 7

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Timp de lucru efectiv: 45 minute. Se adaugă 15 minute pentru familiarizarea cu subiectele.**
- **Se acordă 30 puncte din oficiu.**

SUBIECTUL I *Scrieți pe foaia de concurs doar răspunsurile* **(60 de puncte)**

10p **1.** Aflați numărul natural x din egalitatea $19-(5+x):7=12$.

10p **2.** Câte numere naturale impare de patru cifre au primele două cifre identice?

10p **3.** Dacă Adrian îi dă Adrianei 80 de lei, cei doi copii vor avea sume egale de bani. Dacă Adriana îi dă lui Adrian 20 de lei, băiatul va avea o sumă de trei ori mai mare. Câți lei au, împreună, cei doi copii?

10p **4.** Determinați numerele naturale de forma $\overline{ab}$, știind că $\overline{ab}=(a+b)(a+b-1)$.

10p **5.** O foaie de hârtie în formă de pătrat este tăiată în două dreptunghiuri. Primul dreptunghi are perimetrul de 40 cm, iar cel de-al doilea de 32 cm. Determinați perimetrul foii de hârtie.

10p **6.** Într-o cutie sunt 34 de bile albe, 28 de bile roșii și 17 bile galbene. Care este numărul maxim de bile pe care le putem extrage pe întuneric, astfel încât să avem siguranța că în cutie rămâne măcar câte o bilă de fiecare culoare?

SUBIECTUL al II-lea *Scrieți pe foaia de concurs rezolvările complete* **(60 de puncte)**

7. Ana are mere, pe care le ține într-un coș. Dacă le grupează câte trei îi rămân două mere în afara grupelor, iar dacă le grupează câte două îi rămâne un măr.

10p **a)** Este posibil ca Ana să aibă în coș 62 de mere? Dar 65?

10p **b)** Dacă Ana grupează merele câte șase, câte mere vor rămâne în afara grupelor?

10p **c)** Aflați cel mai mare număr posibil de mere din coș, dacă acesta este un număr de două cifre.

8. Se consideră tabloul:

2
2 7
2 7 12
2 7 12 17
……..

10p **a)** Calculați suma elementelor de pe linia 7.

10p **b)** Aflați ultimul element de pe linia 101.

10p **c)** Scriem, unul după altul, elementele tabloului: 2, 2, 7, 2, 7, 12, 2, 7, 12, 17, … . Determinați al 2022-lea termen al șirului astfel obținut.

COLEGIUL NAȚIONAL IAȘI

CATEDRA DE MATEMATICĂ

An școlar 2021-2022

Concursul de Matematică
Alexandru Myller – 2022

Test de antrenament 8

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Timp de lucru efectiv: 45 minute. Se adaugă 15 minute pentru familiarizarea cu subiectele.**
- **Se acordă 30 puncte din oficiu.**

SUBIECTUL I *Scrieți pe foaia de concurs doar răspunsurile* (60 de puncte)

10p **1.** Se consideră numerele $a = 918 : 9$ și $b = 201 + 81 \cdot 5$. Calculați $2 \cdot a + 3 \cdot b$.

10p **2.** Ce rest primește Filip de la o bancnotă de de 200 lei după ce cumpără un rucsac de 63 de lei și două mingi a 48 de lei fiecare ?

10p **3.** Două creioane, patru pixuri și șase radiere costă 48 lei. Șapte creioane, patru pixuri și o radieră costă cu 10 lei mai puțin. Cât costă împreună un creion, un pix și o radieră?

10p **4.** Numărul 45 are proprietatea că se împarte exact la cifra unităților; numărul 47 nu are această proprietate. Câte numere mai mari ca 40 și mai mici ca 50 au această proprietate?

10p **5.** Împărțim primele 12 numere naturale nenule în trei grupe având același număr de numere și aceeași sumă a numerelor. Una dintre grupe conține numerele 1 și 3. Care sunt celelalte numere din această grupă?

10p **6.** Elevii clasei a IV-a B și-au propus să planteze 120 de panseluțe. Dacă plantează doar băieții, termină în trei ore. Dacă plantează și băieții și fetele, termină în două ore. În cât timp ar termina treaba fetele?

SUBIECTUL al II-lea *Scrieți pe foaia de concurs rezolvările complete* (60 de puncte)

7. Un fermier are un teren pe care cultivă legume. Un sfert din suprafață este cultivată cu roșii, o treime din rest și încă 6 ari cu castraveți, două cincimi din noul rest și încă 2 ari cu ardei, iar restul de 4 ari cu ceapă.

10p **a)** Care este suprafața totală cultivată cu legume?

10p **b)** Fermierul vinde roșiile de calitatea I cu 5 lei kilogramul și roșiile de calitatea a doua cu 3 lei kilogramul. Știind că a vândut 100 de kilograme de roșii și a încasat 430 lei, câte kilograme de roșii de calitatea I a vândut?

10p **c)** În lipsa unui depozit, legumele nu sunt păstrate în condiții optime. Din acest motiv, în prima zi se alterează o anumită cantitate de legume. A doua zi se alterează o cantitate dublă față de prima zi, iar în a treia zi se altererază o cantitate dublă față de ziua a doua. În total, s-au alterat 259 kilograme de legume. Câte kilograme s-au alterat în prima zi?

8. Se consideră șirul numerelor naturale pare: 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, … .

10p **a)** Pe ce poziție se află numărul 2022 în acest șir?

10p **b)** George vrea să adune primele zece numere de trei cifre ale acestui șir. Din greșeală, el a omis un număr și astfel a obținut suma 978. Care este numărul pe care l-a omis?

10p **c)** Radu și Ioana joacă un joc: Radu colorează primul număr din șir (pe 0), Ioana colorează următoarele două numere din șir (2 și 4), apoi Radu colorează următoarele trei numere (6, 8 și 10) și tot așa. Care dintre cei doi copii colorează numărul 2022?

COLEGIUL NAȚIONAL IAȘI

CATEDRA DE MATEMATICĂ

An școlar 2021-2022

Concursul de Matematică
Alexandru Myller – 2022

Test de antrenament 9

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Timp de lucru efectiv: 45 minute. Se adaugă 15 minute pentru familiarizarea cu subiectele.**
- **Se acordă 30 puncte din oficiu.**

SUBIECTUL I *Scrieți pe foaia de concurs doar răspunsurile* **(60 de puncte)**

10p **1.** Calculați $535 - 5 \cdot (432 : 8 - 187 : 17)$.

10p **2.** Câte numere de trei cifre, împărțite la 6, dau câtul 16?

10p **3.** Știind că $\overline{2x79}$ și $\overline{25y0}$ sunt numere consecutive, calculați suma $x + y$.

10p **4.** În secvența *x*, 2022, *y*, 2023, *z*, oricare trei termeni consecutivi sunt numere cu aceeași sumă. Care este valoarea diferenței $\boldsymbol{x - z}$?

10p **5.** Într-o cutie sunt 9 bile roșii, 5 bile albastre și 7 bile galbene. Care este numărul minim de bile pe care trebuie să le extragem pe întuneric pentru a fi siguri că vom avea măcar câte o bilă de fiecare culoare?

10p **6.** Câte dreptunghiuri cu perimetrul 18 cm și lungimile laturilor exprimate, în centimetri, prin numere naturale se pot forma?

SUBIECTUL al II-lea *Scrieți pe foaia de concurs rezolvările complete* **(60 de puncte)**

7. Alexandru parcurge un traseu în trei zile. În prima zi parcurge $\frac{5}{12}$ din traseu, a doua zi $\frac{3}{14}$ din rest, iar în ultima zi parcurge distanța rămasă. Distanța parcursă în a treia zi este cu 32 km mai mare decât cea parcursă în a doua zi.

10p **a)** Aflați care este distanța parcursă în cea de-a doua zi.

10p **b)** Ce fracție din lungimea întregului traseu reprezintă distanța parcursă în cea de-a treia zi?

10p **c)** Alexandru merge cu viteza de 4 km/h. Câte ore a petrecut pe traseu în prima zi?

8. Numărul $n = 123456789101112\ldots20212022$ este obținut prin alăturarea primelor 2022 numere naturale nenule.

10p **a)** Din câte cifre este format numărul *n*?

10p **b)** Arătați că pentru scrierea numărului *n* se folosesc 525 zerouri.

10p **c)** Care este cel mai mic număr care se poate obține eliminând 6450 cifre ale numărului *n*?

Colegiul Național
„Vasile Alecsandri”
Iași

Concursul de matematică „Euclid”

14 mai 2022

Varianta a II-a

Subiectul I (30 de puncte) - Pe foaia de concurs, în tabelul de pe prima pagină, se trec numai răspunsurile.

(5p) 1) Calculează: [636 : (25 – 19) – 17 × 6] : 4 + 19.

(5p) 2) Determină numărul natural $\overline{ab}$, știind că $\overline{ab2}+\overline{ab}=299$.

(5p) 3) Suma dintre predecesorul și succesorul unui număr este cu 5 mai mare decât jumătatea lui 2022. Află numărul.

(5p) 4) Câte numere de 2 cifre împărţite la 9 dau restul egal cu triplu câtului?

(5p) 5) Dacă $a + b = 32$ și $a – c = 14$, află $9a + 4b – 5c$.

(5p) 6) Calculează suma 3 + 6 + 9 + ... + 2022.

Subiectul al II-lea (60 de puncte) - Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete.

(30p) 7) Andra face un șirag de mărgele folosind culorile: roșu, verde și albastru. Prima mărgică este roșie, următoarele două mărgele sunt verzi și următoarele patru mărgele sunt albastre. Andra reia acest procedeu de plasare a mărgelelor până ce termină cele 758 mărgele.

a. Ce culoare are a douăzecea mărgică?
b. Ce culoare va avea ultima mărgică a șiragului?
c. Câte mărgele verzi sunt în șirag?

(30p) 8) La biblioteca școlii noastre, s-au adus cărți noi care au fost așezate pe trei rafturi astfel: pe primul raft, s-a așezat un sfert din total și încă 3 cărți, pe al doilea raft, s-au așezat cu una mai mult decât două treimi din numărul celor rămase, iar pe al treilea raft, s-a așezat restul de 10 cărți.

a. Arată că la bibliotecă nu ar fi putut fi aduse 36 de cărți.
b. Câte cărți sunt așezate pe al doilea raft?
c. Câte cărți s-au primit la bibliotecă?

Notă: Se acordă 10 puncte din oficiu.

MINISTERUL EDUCAŢIEI
INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEŢULUI CĂLĂRAŞI
COLEGIUL NAȚIONAL ,,NEAGOE BASARAB'' OLTENIŢA
Bd. Tineretului, Nr.157, judeţul Călăraşi, cod 915400
Telefon/ fax:0242/ 512159
e-mail: liceulneagoe@gmail.com

varianta 2 (2022)

Subiecte la matematică admitere la clasa a V-a

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

Timp de lucru 50 de minute.

(20p) 1) Calculați:

634-[(206x4-618:3):3]x2+3x(10:2+630:9)=

(20p) 2) Află sfertul produsului dintre diferența numerelor 67 si 35 și diferența numerelor 31 și 23.

(25p) 3) Vârsta tatălui este de 3 ori mai mare decât vârsta fiicei sale, iar împreună au 44 de ani. Peste câți ani vârsta tatălui va fi de 2 ori mai mare decât vârsta fiicei sale?

(25p) 4) O gospodină a cumpărat 6 kg carne, 40 ouă si 3 kg ceapă, plătind pentru cumpărături 104 lei. O altă gospodină a cumpărat cu același preț 3 kg carne,20 ouă si 3 kg ceapă plătind 55 lei. Cât costă 1 kg carne,10 ouă si 2 kg ceapă, dacă 1 kg carne este mai scump decât 10 ouă cu 8 lei?

MATEMATICĂ

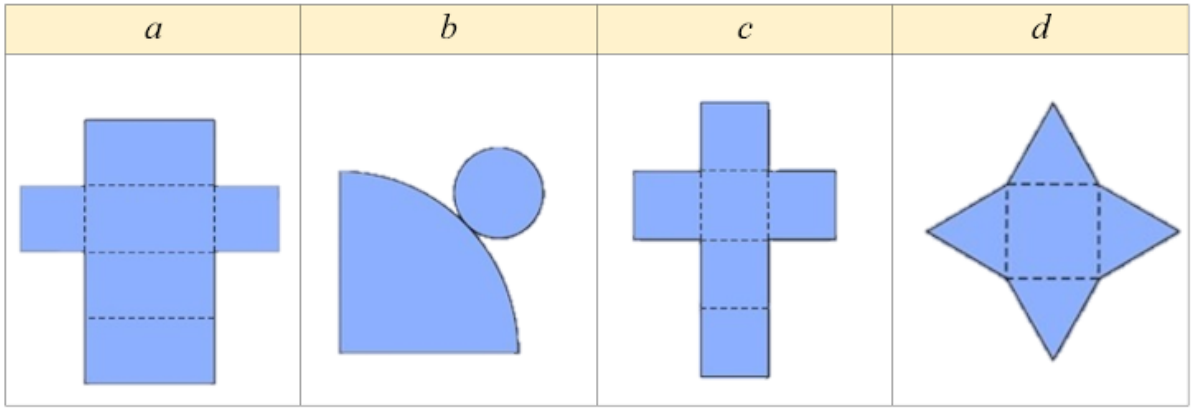
*Obligatoriu

1. Alege din variantele de mai jos scrierea cu cifre arabe a numărului nouă sute de mii nouăzeci. * 3 puncte

Marcați un singur oval.

- a) 90 090
- b) 900 900
- c) 900 090
- d) 900 009

2. Observă desfășurarea corpurilor geometrice din imagine. Afirmația ”Cubul este corpul geometric aflat la punctul c” este: 3 puncte



Marcați un singur oval.

- adevărată
- falsă

3. Alege din variantele de mai jos fracția supraunitară cu numitorul 7. 3 puncte

Marcați un singur oval.

$\frac{9}{7}$

a)

$\frac{6}{7}$

b)

$\frac{7}{8}$

c)

$\frac{7}{3}$

d)

4. Ai o bucată de sârmă cu lungimea de 16 cm. În spațiul de mai jos scrie câte îndoituri trebuie să faci pentru a obține un pătrat și la câți cm una de alta. 3 puncte

5. Câte axe de simetrie are un pătrat? Alege dintre variantele de mai jos răspunsul corect. * 3 puncte

Marcați un singur oval.

- 1
- 2
- 3
- 4

6. Alege din variantele de mai jos valoarea de adevăr a afirmației: ”Dacă în anul 2024 ziua de 29 februarie va fi într-o joi, atunci în anul 2025 ziua de 29 februarie va fi într-o vineri.” * 3 puncte

Marcați un singur oval.

- adevărat
- fals

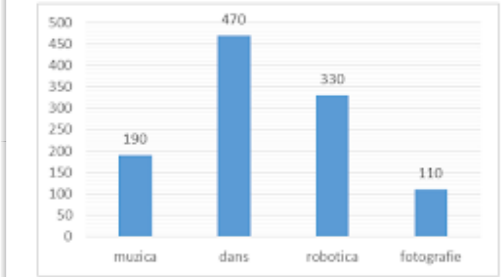
7. În luna ianuarie 2022, Mircea a economisit 256 de lei. El a hotărât ca în fiecare lună să economisească dubul sumei din luna precedentă. Alege pentru fiecare rând, suma pe care a economisit-o în luna precizată. * 4 puncte

Marcați un singur oval pentru fiecare rând.

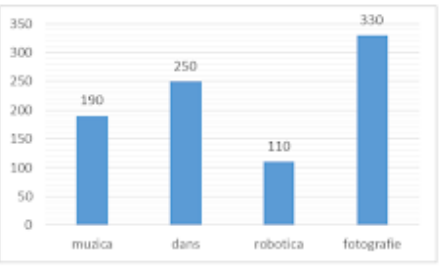
	124 de lei	512 de lei	1024 de lei
februarie			
martie			

8. La chestionarul aplicat elevilor unei școli, s-a constatat că numărul elevilor pasionați de robotică este egal cu triplul numărului de elevi pasionați de fotografie și cu 140 mai mic decât numărul elevilor pasionați de dans. Care dintre următoarele diagrame corespunde situației prezentate? 3 puncte

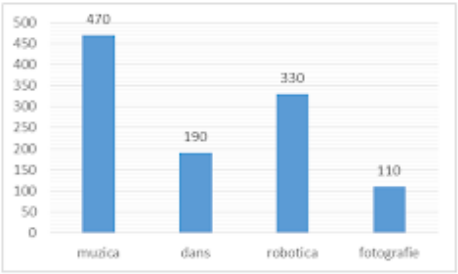
Marcați un singur oval.



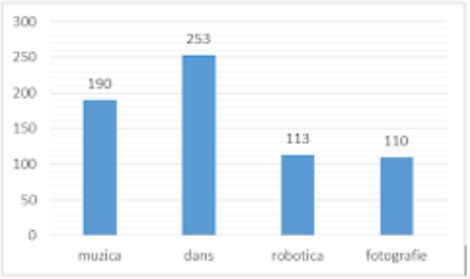
a)



b)

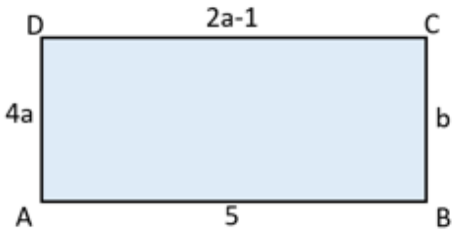


c)



d)

9. În figura de mai jos sunt prezentate dimensiunile dreptunghiului ABCD. 3 puncte
Alege din variantele de mai jos valoarea de adevăr a afirmației: ”b=12”.



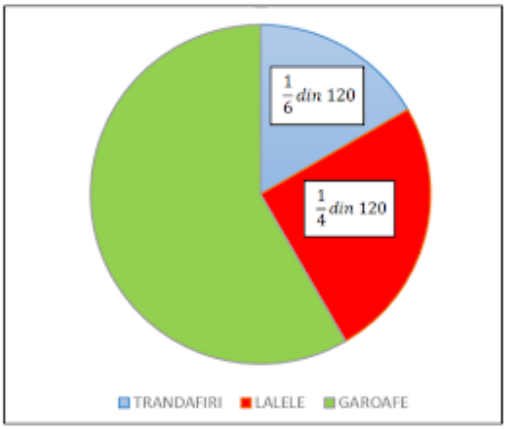
Marcați un singur oval.

- adevărat
- fals

10. Află numărul natural ”a” din expresia 900 : [(15 x 2 + a) : 2 - 31] = 90. * 5 puncte
Pe foaia de concurs scrie rezolvarea completă.

11. Într-o împărțire restul este 7, câtul este 22, iar împărțitorul este o cifră impară. În spațiul de mai jos scrie care este deîmpărțitul. * 3 puncte

12. Diagrama de mai jos prezintă repartiția celor 120 de fire de flori cumpărate dintr-o florărie. Calculează numărul firelor de flori din fiecare categorie, apoi bifează căsuța corespunzătoare răspunsului corect. 4 puncte



Marcați un singur oval pentru fiecare rând.

	20	30	70
numărul firelor de trandafiri	◯	◯	◯
numărul firelor de garoafe	◯	◯	◯

13. Pe foaia de concurs scrie operațiile și justificările corespunzătoare pentru rezolvarea următoarei probleme. 5 puncte
Un grup de copii vor să cumpere un joc cu Sistemul Solar. Dacă fiecare contribuie cu câte 2 lei, mai sunt necesari 30 de lei, iar dacă fiecare contribuie cu câte 6 lei, rămân 10 lei. Află prețul jocului.

Acest conținut nu este nici creat, nici aprobat de Google.

Formulare Google

COLEGIUL NAȚIONAL "CONSTANTIN CARABELLA"

Strada Locotenent Pârvan Popescu, nr. 58, Târgoviște, județul Dâmbovița, Cod poștal: 130078

Tel/Fax: 0040245 210 785; Tel: 0771 091 329; E-mail: secretariat@carabella.ro; Web: www.carabella.ro

TESTARE PENTRU FORMAREA CLASEI A V-A

MATEMATICĂ

3.06.2022

Se acordă 10 puncte din oficiu
Timp de lucru 45 de minute

1. Determinați numărul necunoscut:

$$\left[72:\left(30-6\times 3\right)+2\times a\right]:13=2+\left(3\times 4-2\times 6\right)\times 2022$$

(30 puncte)

2. Calculați diferența dintre cel mai mare număr natural de patru cifre diferite care are produsul cifrelor egal cu 24 și cel mai mic număr natural de trei cifre diferite care are produsul cifrelor egal cu 24.

(10 puncte)

3. Determinați numărul natural care împărțit la cel mai mare număr par de o cifră dă cel mai mare rest și câtul egal cu cel mai mic număr natural de două cifre.

(10 puncte)

4. Perimetrul unui teren cu formă dreptunghiulară este de 180 de metri. Lățimea terenului este egală cu $\frac{2}{3}$ din lungime. Determinați lungimea și lățimea dreptunghiului.

(15 puncte)

5. Împreună, 3 stilouri și 6 penare costă 165 de lei. Un stilou costă cât 3 penare. Aflați restul pe care îl primește un copil care a cumpărat un penar și două stilouri, știind că acesta a avut o bancnotă de 100 de lei.

(15 puncte)

6. Se consideră numărul natural $N=12345678910 11...20212022$, format prin alăturarea numerelor naturale de la 1 la 2022.
   a) Determinați care este a cinsprezecea cifră a numărului N.
   b) Aflați care este a 2022-a cifră a numărului N.

(10 puncte)

COLEGIUL NAȚIONAL IAȘI

Concursul de Matematică „Alexandru Myller”
Ediția a XIX-a, 14 mai 2022

Varianta 3

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Timp de lucru efectiv: 45 minute. Se adaugă 15 minute pentru familiarizarea cu subiectele.**
- **Se acordă 30 puncte din oficiu.**

SUBIECTUL I ***Scrieți pe foaia de concurs doar răspunsurile*** **(60 de puncte)**

10p **1.** Calculați $213-8\cdot(357:7-234:9)$.

10p **2.** Pisica lui Radu doarme 17 ore din 24. Noaptea doarme cu trei ore mai mult decât ziua. Câte ore doarme noaptea pisica lui Radu?

10p **3.** Treimea sfertului cincimii unui număr natural este 6. Aflați restul împărțirii acestui număr natural la 7.

10p **4.** Un dreptunghi poate fi împărțit în trei pătrate identice, fiecare având perimetrul de 108 cm. Care este perimetul dreptunghiului?

10p **5.** Cristina scrie toate numerele naturale de trei cifre care conțin exact o dată cifra 5. Câte numere scrie Cristina?

10p **6.** Kilometrajul unei mașini afișează numărul 9876, care are cifrele distincte. După câți kilometri va afișa un nou număr cu cifrele distincte?

SUBIECTUL al II-lea ***Scrieți pe foaia de concurs rezolvările complete*** **(60 de puncte)**

7. Se consideră șirul de numere naturale 1, 5, 9, 13, 17, …, 197, 201.

10p **a)** Care este al 30-lea număr din șir?

10p **b)** Câți dintre termenii șirului au ultima cifră 3?

10p **c)** Stabiliți câte cifre se folosesc, în total, pentru scrierea numerelor din șir.

8. Elevii claselor a IV-a A, unde învață David, și a IV-a B, unde învață Raluca, urcă împreună, în șir indian, spre coliba lui Robinson Crusoe. David este al 15-lea copil din șir (iar Raluca este înaintea lui). Numărul copiilor aflați înaintea Ralucăi este un sfert din numărul copiilor aflați în spatele lui David. În spatele Ralucăi sunt cu 4 copii mai puțin decât triplul numărului de copii din fața lui David.

10p **a)** Câți copii sunt în spatele Ralucăi?

10p **b)** Câți copii urcă spre coliba lui Robinson Crusoe?

10p **c)** În șirul indian primii 5 copii sunt din clasa a IV-a A, următorii 6 din a IV-a B, apoi iarăși sunt 5 din a IV-a A, 6 din a IV-a B și așa mai departe. Câți elevi din clasa a IV-a A urcă spre colibă?

COLEGIUL NAȚIONAL BILINGV "GEORGE COȘBUC"

PROBĂ DE APTITUDINI ȘI CUNOȘTINȚE PENTRU CLASA a V-a – SESIUNEA IUNIE 2022

MATEMATICĂ
VARIANTA 1

Nume_____
Inițiala tatălui_____
Prenume_____
_____

Școala de proveniență_____
_____

Profesor supraveghetor	Semnătura

1)Rezultatul calculului :

$6464 : 64 + 4 + 3 \times (30 - 18 : 2 : 9) - 2 : 1$

este:

a) 100 b) 190 c) 302 d) 212 e) niciun răspuns corect

(8 puncte)

2) Cristi dă 2 napolitane și primește la schimb 10 bomboane.Andreea, în schimbul a 4 napolitane primește 12 portocale.Dacă tu vei schimba 9 portocale și 5 bomboane pe napolitane, câte napolitane vei primi?

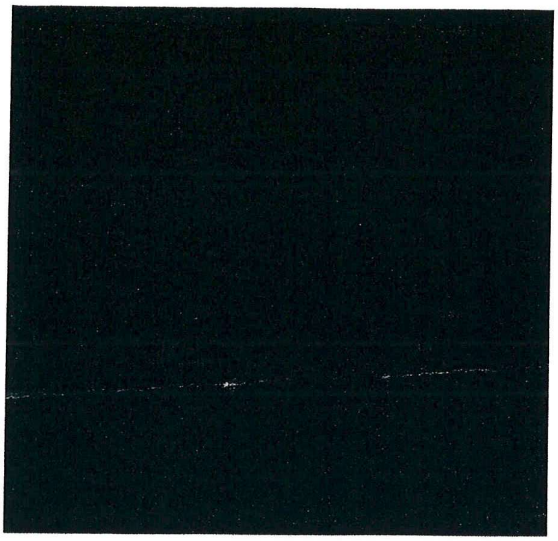
a) 5 b) 6 c) 4 d) 3 e) 7

(8 puncte)

3) Aflați a din egalitatea:

$2022 - [18 + 8 \times 9 - (a : 3 + 15)] : 3 = 1998$

(14 puncte)



(15 puncte)

4) Se dau 3 numere.Al doilea număr este cu 20 mai mare decât primul. Al treilea este cu 20 mai mare decât dublul celui de-al doilea. Diferența dintre al treilea și primul număr este egală cu 84.Aflați suma celor 3 numere.

(Se cere planul de rezolvare)

La exercitiile 1 şi 2 se încercuieşte răspunsul corect
La exerciţiilc 3 şi 4 sc scric rezolvarea completă
Toate subiectele sunt obligatorii.
Se acordă 5 puncte din oficiu.
V1

Str. Mihail Kogălniceanu, nr. 10, 700454, Iași
Tel./Fax: 0232-215746
e-mail: contact@cnmeiasi.ro
http://cnmeiasi.ro/

COLEGIUL NAȚIONAL „MIHAI EMINESCU”
IAȘI

CONCURSUL *EMINENT*
PROBĂ LA MATEMATICĂ – 28 mai 2022

Varianta nr. 2

Subiectul 1

Determinați numărul care se mărește cu 2022 dacă la sfârșitul său se adaugă cifra 6 . **10 puncte**

Subiectul 2

Aflați numărul necunoscut x din egalitatea:

$832:8-\left[18+12\cdot(x-1):4\right]\cdot 3=5$ **15 puncte**

Subiectul 3

Aflați suma numerelor naturale, care împărțite la $\overline{ab}$ dau câtul 3 și restul cel mai mare număr impar de două cifre distincte. **20 puncte**

Subiectul 4

Dacă Mihai ar rezolva câte 8 probleme pe zi, ar termina tema pentru vacanță cu o zi mai târziu decât și-a propus. Însă el rezolvă câte 12 probleme pe zi și termină tema cu 5 zile mai devreme decât și-a propus. Câte probleme a avut de rezolvat Mihai ? **20 puncte**

Subiectul 5

Într-o școală, în clasele a IV-a A și a IV-a B sunt în total 52 de elevi. În clasa a IV-a A numărul fetelor este egal cu numărul băieților. Dacă 2 fete din clasa a IV-a A s-ar transfera în cealaltă clasă, atunci cele două clase ar avea același număr de elevi, iar în clasa a IV-a B numărul fetelor ar deveni egal cu numărul băieților. Câți băieți sunt în total în cele două clase ? **25 puncte**

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Total: 100 de puncte.**
- **Timp de lucru: 60 de minute.**

COLEGIUL NAȚIONAL GHEORGHE LAZĂR
Bd. Regina Elisabeta, Nr.48, Sector 5, București
Tel: +4.0213.134.756
E-mail: secretariat@cnlazar.ro

TEST DE SELECȚIE PENTRU ADMITERE ÎN CLASA A V-A PENTRU ANUL ȘCOLAR 2022-2023

Disciplina MATEMATICĂ
Varianta 4

I 1. (**15p**) Aflați numărul a din egalitatea:

$$2022-[2022-2022:(2022-2022:337-a)]=2.$$

2. Efectuați:

a) (**7p**) $\left\{\left[5\times(207+33)+3\times102+494\right]:50+8\right\}:12$

b) (**8p**) 9+12+15+...+2022-8-11-14-...-2021

II 1. (**15p**) Determinați numerele naturale cu proprietatea că suma și produsul lor sunt egale cu 77.

2. (**15p**) Aflați câte numere naturale, prin tăierea ultimelor două cifre ale lor, se micșorează de exact 101 ori.

III Se consideră numărul n=202220222022...2022, unde secvența 2022 se repetă de 2022 de ori.

a) (**10p**) Care este a 2022-a cifră a numărului n?

b) (**10p**) Notăm cu a și b suma primelor 2022 de cifre, respectiv suma ultimelor 2022 de cifre ale numărului n. Determinați care dintre numerele a și b este mai mare și cu cât.

c) (**10p**) Calculați suma cifrelor numărului n aflate pe pozițiile 3, 6, 9, 12, ... , adică pe toate pozițiile care se împart exact la 3.

Se acordă **10p** din oficiu.

SUCCES!

Colegiul Naţional „Gheorghe Lazăr”
Str. Gh. Lazăr Nr. 1 - 3
Sibiu 550165
Tel: (+40) 269 212 896
Fax: (+40) 269 215 352
cnglazar@gmail.com
http://www.cngl.eu

Varianta 1

TEST DE DEPARTAJARE
clasa a V-a - 2022
MATEMATICĂ

SUBIECTUL I - Pentru exerciţiile de mai jos scrieţi pe foaia de examen doar litera corespunzătoare rezultatului corect (15 puncte)!

5p	**1.** Rezultatul calculului $416:4-12:2+8$ este egal cu: **A)** 9 **B)** 16 **C)** 54 **D)** 106
5p	**2.** Dacă *a, b* sunt două numere naturale distincte și $a+b=20$, atunci cea mai mare valoare a produsului lor este: **A)** 38 **B)** 96 **C)** 99 **D)** 100
5p	**3.** Se consideră numărul A=1234512345...12345 format din 2000 de cifre. A 101-a cifră a numărului este: **A)** 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4

SUBIECTUL II - Pe foaia de examen scrieţi doar rezultatul corect lângă numărul din faţa exerciţiului (15 puncte)!

5p	1. Suma a două numere naturale consecutive este 35. Produsul lor este egal cu ...
5p	2. Fie numărul XXI. Predecesorul lui, scris cu cifre arabe, este numărul ...
5p	3. Produsul a două numere naturale consecutive este 56. Cel mai mare dintre numere este ...

SUBIECTUL III - Pe foaia de examen scrieţi rezolvările complete (60 puncte)!

1. **(15p) a)** Calculați: $100-(100-40):6\times[(18\times36-17\times36):(53-924:21)]=$
   (15p) b) Aflați termenul necunoscut: $[36:(24-a)+29]:5=7$
2. **(15p)** Calculați suma tuturor numerelor mai mici decât 12 care se pot scrie ca sumă a două numere naturale consecutive.
3. **(15p)** Suma a trei numere naturale este 2020. Determinați numerele, știind că dacă micșorăm cu 100 jumătatea primului număr, cu 200 treimea celui de-al doilea număr și cu 300 sfertul celui de-al treilea număr, obținem numere naturale consecutive în ordine crescătoare.

NOTĂ

- Se acordă **10 puncte din oficiu.**
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Timp de lucru: **50 de minute**.

VARIANTA 2

TEST ÎN VEDEREA CONSTITUIRII CLASELOR A V-A, AN ŞCOLAR 2022-2023

Pentru problemele de la 1 până la 6 scrieţi pe foaia de examen litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Valoarea lui ***a*** din egalitatea : [(4 x ***a*** – 80) : 100 + 193] : 10 – 10 = 10 este:			
A) 194	B) 195	C) 159	D) 776
2. Rezultatul calculului: $2022 - [20 \times 22 + 2 \times 202 - (2 \times 22 - 2)] \times 2$ este:			
A) 418	B) 2440	C) 414	D) 802
3. O carte are 432 pagini. Câte cifre s-au folosit pentru numerotarea paginilor cărții?			
A) 2735	B) 1315	C) 1296	D) 1188
4. Andrei își păstrează colecția de timbre în cutii. El are 5 cutii verzi mari. În fiecare din aceste cutii sunt câte 6 cutii albastre, iar în fiecare cutie albastră sunt câte 3 cutii galbene. Câte cutii foloseşte în total Andrei?			
A) 14	B) 90	C) 125	D) 120
5. Dacă pasul tatălui este de 75 cm şi al fiului de 50 cm, câți paşi face fiul în timp ce tatăl său face 100 de paşi?			
A) 75	B) 125	C) 150	D) 175
6. Câți termeni are şirul: 21, 28, 35, …, 287 ?			
A) 42	B) 39	C) 41	D) 38

Pentru problemele 7, 8 şi 9 scrieţi pe foaia de examen rezolvările complete.

7. O mamă are doi fii gemeni. În urmă cu 4 ani, mama avea vârsta egală cu dublul sumei vârstelor fiilor săi. Peste 6 ani va avea cu 10 ani mai puțin decât triplul vârstei unuia dintre fii.
a) Câți ani au fiecare în prezent?
b) În urmă cu câți ani mama era de 4 ori mai mare ca unul dintre fii?

8. Pe nişte platouri se pun banane şi mere. Ştim că bananele sunt de două ori mai multe ca merele. Dacă se pun pe fiecare platou 3 mere, rămân pe dinafară 5 mere, iar dacă se pun pe fiecare platou 5 banane rămân pe dinafară 36 banane.
a) Câte platouri sunt?
b) Câte banane mai trebuie aduse pentru a fi complete 40 de platouri? (un platou complet conține 5 banane).

9. Călin stă pe o scară şi observă că sub treapta pe care stă sunt de trei ori mai multe trepte decât deasupra. După ce coboară 11 trepte constată că deasupra şi dedesuptul său sunt la fel de multe trepte. Câte trepte are scara?

Succes!

TEST PENTRU ADMITEREA ÎN CLASA A V-A

28 mai 2022

Matematică - Varianta 2

Problema 1

(2p) a) Calculați numărul:

$$n=\left\{5+67:\left[100-\left(60:3-27:3\right)\times\left(59-7\times8\right)\right]\right\}\times400-378.$$

(1p) b) Determinați numărul natural a din egalitatea $4=2022:6-9\times\left(10+a\right)$.

Problema 2

Dintr-o livadă s-au cules cireșe și vișine, iar fructele culese s-au pus în lădițe, fără să se amestece. Cantitatea de vișine culese este cu 30 kilograme mai mare decât cea de cireșe, iar numărul lădițelor pentru cireșe este egal cu numărul de lădițe pentru vișine. Fiecare lădiță cu cireșe are 5 kilograme de fructe, iar fiecare lădiță cu vișine are 6 kilograme de fructe. După ce s-au terminat de umplut lădițele, au mai rămas 5 kilograme de cireșe și 6 kilograme de vișine.

(1p) a) Aflați câte lădițe s-au folosit în total;

(1p) b) Aflați câte kilograme de cireșe s-au cules din livadă.

Problema 3

Ioana, care este elevă la Colegiul Național „Vasile Lucaciu”, scrie pe o tablă numărul $A=36912151821...2202$, obținut prin alăturarea numerelor din șirul 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, ..., 2202.

(2p) a) Calculați suma ultimelor zece cifre ale numărului A.

(1p) b) Care este cifra situată pe locul 100 ? (poziția cifrelor se numără de la stânga spre dreapta)

(1p) c) În afară de ultimele patru cifre, gruparea de cifre 2202 se mai regăsește în numărul A ? (Justificați!)

Toate subiectele sunt obligatorii (*adică nu sunt la alegere*).
Timp de lucru: 45 de minute
Se acordă 1 punct din oficiu.

SUCCES!

TEST DE VERIFICARE PENTRU ADMITEREA ELEVILOR ÎN CLASA A V-A
24 iunie 2022

MATEMATICĂ

1. Aflați numărul natural *a* dacă:

$$6\times\left[351-\left(1326:a+1\right)\right]=2022\,.$$

(20 de puncte)

2. Lungimea unui dreptunghi este de șapte ori mai mare decât lățimea acestuia. Perimetrul dreptunghiului, exprimat în metri, este egal cu cel mai mic număr natural par de patru cifre, cu cifrele diferite. Aflați diferența dintre lungime și lățime.

(20 de puncte)

3. Gigel trebuie să joace 20 de meciuri într-un turneu de șah. La un moment dat, Gigel observă că a câștigat jumătate dintre meciurile jucate până atunci, pierzând o treime dintre acestea, iar trei s-au încheiat la egalitate. Câte meciuri i-au mai rămas de jucat lui Gigel?

(20 de puncte)

4. Determinați cel mai mare număr natural care poate fi deîmpărțitul unei împărțiri, știind că restul este cu 100 mai mic decât deîmpărțitul.

(15 puncte)

5. Un număr natural de trei cifre se numește *„meșotist”* dacă cifra sa din mijloc este mai mare decât suma celorlalte două cifre. Câte numere *„meșotiste”* au produsul cifrelor egal cu zero?

(15 puncte)

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii și se cer rezolvările complete.
2. Se acordă 10 puncte din oficiu.
3. Timpul de lucru este 45 de minute.

COLEGIUL NAȚIONAL "GRIGORE MOISIL"
B-dul Timişoara nr. 33, Sector 6, Bucureşti
Tel: 021 413 26 96; 021 413 26 47. Fax: 021 440 10 06
Website: http://www.moisil.ro

ROMÂNIA
MINISTERUL EDUCAȚIEI

CONCURS DE SELECȚIE PENTRU CLASA a V-a
MATEMATICĂ

Varianta 2

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 50 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu. Total: 100 de puncte.
Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

1) **(25p)** Aflați numărul *a* din relația:
$100+100:\{[100+100\times(a-100)]:100-100\}=110$.

2) **(25p)** Suma a patru numere naturale este 334. Aflați numerele știind că, dacă scădem din al treilea număr pe al patrulea, adunăm la al doilea număr 17 și scădem din primul număr 11, obținem de fiecare dată al patrulea număr.

3) **(20p)** Trei copii au participat la un test de matematică. Testul conține 10 întrebări. Pentru un răspuns corect se acordă 3 puncte, iar pentru unul greșit se acordă 1 punct. Cei trei copii au răspuns la toate întrebările și au obținut punctaje diferite. Împreună au adunat 82 de puncte. Câte puncte a obținut fiecare copil?

4) **(20p)** Fie cifrele *a, b, c, d* astfel încât $a<b$ și $c<d$. Dacă între $\overline{ab}$ și $\overline{ba}$ sunt 44 de numere naturale și între $\overline{cd}$ și $\overline{dc}$ sunt 53 de numere naturale, aflați câte numere naturale sunt între $\overline{cab}$ și $\overline{dba}$?
(De exemplu, **între** 30 și 35 sunt 4 numere naturale: 31, 32, 33 și 34).

Colegiul Național ”Mihai Viteazul” Municipiul Ploiești

TEST DE ADMITERE ÎN CLASA a V-a

Probă scrisă la matematică
29 iunie 2022

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 90 de minute.
- Pe foaia de concurs scrieți rezolvările complete.

SUBIECTUL 1 (30 puncte = 20 puncte + 10 puncte)

a) Aflați numărul a din egalitatea $54-16:\left[\left(36-6\times a\right):5+2\right]=52$.

b) Se dau numerele naturale a, b, c cu proprietatea $a + b = 8$. Să se calculeze numărul

$$N=\left[4\times\left(5\times a+7\times c\right)+\left(b-4\times c\right)\times 7\right]\times 3+39\times b.$$

SUBIECTUL 2 (20 puncte)

Un sportiv își planifică să alerge un anumit număr de kilometri în 7 zile. În prima zi el aleargă o zecime din acest număr. Apoi, în fiecare zi, cu 3 kilometri mai mult decât în ziua precedentă reușind astfel să realizeze numărul de kilometri planificat. Câți kilometri a alergat sportivul în ultima zi?

SUBIECTUL 3 (20 puncte)

Să se determine cifrele a, b, c, d dacă:

$$\overline{abcd}-\overline{abc}=2022.$$

SUBIECTUL 4 (20 puncte = 5 puncte + 5 puncte + 10 puncte)

Se consideră numărul n = 202220222022...2022, unde secvența 2022 se repetă de 2022 de ori.

a) Care este a 2022-a cifră a numărului n?

b) Notăm cu a suma primelor 2022 de cifre și cu b suma ultimelor 2022 de cifre ale numărului n. Aflați care dintre numerele a sau b este mai mare și cu cât?

c) Calculați suma cifrelor numărului n aflate pe toate pozițiile care se împart exact la 5 (adică pozițiile 5, 10, 15, 20, ...).

SUCCES!

*Prin noi, vei fi **tu** cel mai bun!*

Concursul de Matematică „Traian Lalescu”
Ediţia a XXIII-a, 28 mai 2022

1. Calculați:

$$50-25:\left[125-4\cdot\left(100:20\cdot 5+5\right)\right].$$

2. Andrei și Bogdan cântăresc împreună 66 de kilograme, Bogdan și Carol 84 de kilograme, iar Carol și Andrei 78 de kilograme. Câte kilograme cântăresc toți cei trei băieți împreună?

3. Calculați suma tuturor numerelor naturale impare de forma $\overline{abc}$, știind că a, b, c sunt trei dintre cifrele 0, 1, 2, 3 (cifrele a, b, c sunt diferite și $a\neq 0$).

4. Determinați cel mai mare număr natural care împărțit la 100 dă câtul mai mic decât restul.

5. Maria a avut primul copil la 25 de ani. Doi ani mai târziu, ea a născut al doilea copil, iar după alți trei ani a născut al treilea copil. Maria și copiii săi s-au născut în aceeași zi a anului.
- **a)** Câți ani avea Maria când a născut al treilea copil?
- **b)** Aflați câți ani va avea Maria atunci când vârsta sa va fi egală cu suma vârstelor celor trei copii ai săi.

6. Ana a primit un coș cu 60 de mere, unele roșii și celelalte verzi, din care a început să mănânce câte trei mere pe zi: două roșii și unul verde.
- **a)** Aflați câte mere roșii au fost la început, știind că Ana a terminat de mâncat toate merele verzi în 20 de zile.
- **b)** Aflați câte mere roșii au fost la început, dacă în ziua în care Ana a terminat de mâncat toate merele verzi din coș, numărul merelor roșii rămase era egal cu numărul merelor verzi care au fost la început în coș.

7. Fie numărul $n=1234567891011...20212022$, obținut prin alăturarea tuturor numerelor naturale de la 1 la 2022, scrise unul după altul, în ordine crescătoare.
- **a)** Aflați câte cifre are numărul n.
- **b)** Care este cifra numărului n situată pe poziția 2022 (de la stânga la dreapta)?
- **c)** Determinați cel mai mare număr care se poate obține din n prin ștergerea a exact 171 de cifre.

Notă. La toate problemele se cer rezolvări complete. Fiecare dintre problemele 1, 2, 3, 4 se notează cu câte 10 puncte, iar fiecare dintre problemele 5, 6, 7 se notează cu câte 20 de puncte. Se acordă 20 de puncte din oficiu.

Timp de lucru: 60 de minute.

CONCURSUL

MICUL RACOVIȚIST

Ediția 2022

Disciplina: matematică

Problema 1 (15 puncte)

a) Calculaţi: $82 + \{235 : 5 + 75 : 3 \times [31 - (56 : 7 - 3) \times 4]\} : 7$;
b) Scrieţi a 2022-a literă din şirul RACOVITARACOVITARACOVITARACOVITA ... .

Problema 2 (15 puncte)

Determinaţi un număr de şase cifre de forma $\overline{abcde1}$ ştiind că dacă îl împărţim la trei obţinem numărul $\overline{1abcde}$.

Problema 3 (15 puncte)

Gigel vrea să cumpere reviste *Gazeta Matematică*. Dacă ar cumpăra şapte reviste, i-ar mai rămâne 10 lei, iar dacă ar dori să cumpere nouă, ar mai avea nevoie de 10 lei. Cât costă o revistă *Gazeta Matematică*?

Gazeta Matematică

Problema 4 (15 puncte)

În trei albume sunt în total 164 fotografii. În primul album sunt cu şapte fotografii mai mult decât un sfert din numărul de fotografii din cel de-al doilea album, iar în al treilea album sunt de trei ori mai multe fotografii decât în primul. Care este numărul fotografiilor din fiecare album?

Problema 5 (15 puncte)

Se consideră şirul de numere naturale 4, 7, 10, 13, 16, ...

a) Pe ce poziţie se află numărul 2023 în şir?
b) Vasile vrea să adune primele nouă numere de patru cifre din şir. Din greşeală, el a omis un număr şi astfel a obţinut suma 8090. Care este numărul omis?

Problema 6 (15 puncte)

Două numere naturale de cinci cifre sunt formate folosind toate cifrele de la 0 la 9 o singură dată. Care este diferenţa cea mai mică posibilă dintre cele două numere?

- ✓ Timpul efectiv de lucru este de 60 minute.
- ✓ Se acordă 10 puncte din oficiu.

EXAMEN DE TESTARE PENTRU ADMITEREA ÎN CLASA A V-A

24 IUNIE 2022

MATEMATICĂ

Pe foaia de examen scrieţi rezolvările complete.

Subiectul I (50 de puncte)

1.(10p) Care este diferența dintre cel mai mare număr par de trei cifre și cel mai mic număr impar de trei cifre?

2.(10p) Aflați numărul natural *n,* știind că: $555-(55+n:55)\cdot 5=55$

3.(10p) Câte numere de cel mult două cifre se împart exact la 6?

4.(10p) 98 kg reprezintă două treimi dintr-o cantitate de mere. Aflați cât cântărește întreaga cantitate.

5.(10p) Aflați numerele naturale cuprinse între 125 și 140 care, împărțite la un număr de o singură cifră, dau restul 7.

Subiectul II (40 de puncte)

1.(20p) Latura unui pătrat este un sfert din lungimea unui dreptunghi, iar diferența lor este 60 cm. Știind că lățimea dreptunghiului este egală cu latura pătratului, aflați perimetrul pătratului și perimetrul dreptunghiului.

2.(20p) Un ciclist a parcurs în prima zi două treimi din traseul pe care și-l propusese să îl parcurgă, a doua zi o pătrime din rest, iar a treia zi ultimii 27 km. Aflați lungimea întregului traseu și câți kilometri a parcurs în fiecare zi.

NOTĂ:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Se acordă 10 puncte din oficiu la fiecare disciplină.
Timp de lucru: 90 minute.

Prezenta lucrare conține _____ pagini

Numele:……..
.....

Inițiala prenumelui tatălui: …….....

Prenumele:…….....
.....……...……

Școala de proveniență: …….....
.....

Nume şi prenume asistent	Semnătura

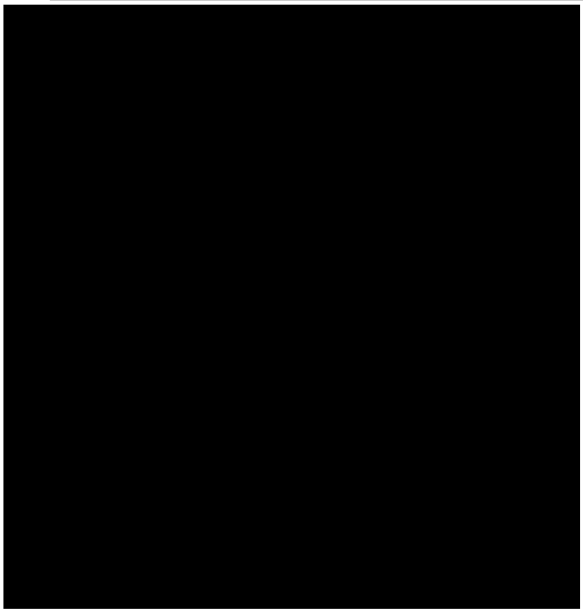
ADMITERE ÎN CLASA a V-a

SESIUNEA 2022

Matematică

A	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	NOTA FINALĂ			

B	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	NOTA FINALĂ			



- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă cinci puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 30 de minute.**

1 **(20 puncte)**

Calculează:

(5p) **a)** $6735 - 1757 + 2354 =$ ……

(5p) **b)** $1439 \times 6 =$ ……

(5p) **c)** $5621 : 7 =$ ……

(5p) **d)** $1899 - [\, 4564 : (\, 16 - 45 : 5\,) - 408 : 6 \times 5\,] : 4 + 401 =$

……

……

……

……

……

……

……

2 **(5 puncte)**

Se consideră șirul de numere 3, 7, 11, 15, 19, 23, …

(2p) **a)** Scrie următorii doi termeni ai șirului.

Rezolvare:

(2p) **b)** Arată că numărul 291 este termen al șirului.
Rezolvare:

(1p) **c)** Află al câtelea termen al șirului este numărul 291.
Rezolvare:

3 **(5 puncte)**

Mă gândesc la un număr pe care îl triplez. La rezultat adun 19, iar suma obținută o înjumătățesc. Din ultimul rezultat scad 18 și obțin 5. La ce număr m-am gândit?
Rezolvare:

4 **(5 puncte)**

(3p) **a)** După ce a parcurs o șesime dintr-un traseu, un călător a constatat că mai are 18 km până la jumătatea traseului. Ce lungime are întregul traseu?
Rezolvare:

(2p) **b)** Cu 112 de lei se pot cumpăra 28 de creioane. Câte creioane de același fel se pot cumpăra cu 150 de lei, dacă prețul unui creion se reduce cu 1 leu?

Rezolvare:

5 **(10 puncte)**

Bunicul are doi nepoți: Adrian și Cosmin. Vârsta bunicului este de 5 ori mai mare decât vârsta lui Cosmin, iar Adrian s-a născut atunci când Cosmin avea 3 ani. Știind că suma vârstelor celor trei este de 88 de ani, aflați ce vârstă are fiecare.

Rezolvare:

ADMITEREA ÎN CLASA A V-A

CONCURSUL „ MICII SPIRIŞTI”

SUBIECTUL I. (6x5 puncte=30 de puncte)

La următoarele 6 exerciţii un singur răspuns este corect.

Alegeți răspunsul corect şi scrieţi-l pe foaia de examen împreună cu litera corespunzătoare:

1. Numărul de 37 de ori mai mic decât predecesorul numărului 5292 este:
a) 413; **b)** 134 ; **c)** 143; **d)** 243; **e)** 529.

2. Rezultatul calculului $80-40:5\times8+0:80$ este:
a) 17; **b)** 20; **c)** 79 ; **d)** 16 ; **e)** 26.

3. Numărul 6802 dă restul 19 şi câtul C la împărțirea prin 21. Câtul împărţirii câtului C la restul 19 este:
a) 501; **b)** 325; **c)** 23; **d)** 18; **e)** 17.

4. Suma a patru numere naturale consecutive este 18. Produsul lor este:
a) 24; **b)** 360; **c)** 260; **d)** 150; **e)** 0.

5. Cincimea jumătății unui număr natural n este 478. Suma cifrelor numărului n este:
a) 18; **b)** 19; **c)** 21; **d)** 27; **e)** 20.

6. O florărie vinde buchete de flori. Primul buchet conține 3 lalele și 1 trandafir, al doilea buchet conține 5 lalele și 4 trandafiri, al treilea buchet conține 7 lalele și 7 trandafiri, iar al patrulea 9 lalele și 10 trandafiri. Numărul florilor din al treizecilea buchet este:

a) 145; **b)** 148; **c)** 149; **d)** 150; **e)** 151.

SUBIECTUL II. (3x10 puncte=30 de puncte)

La următoarele 3 cerințe scrieți doar răspunsul:

1. Valoarea numărului natural n din egalitatea
$\{2021-[(10:n+4):3-2]\times2021\}\times2-2021=2021$ este .....

2. Dacă elevii unei clase se așază câte doi într-o bancă, rămân 4 elevi în picioare. Dacă se așază câte trei într-o bancă, rămân două bănci libere. În clasă, elevi și bănci sunt .....

3. Andrei are 4096 de lei. El cheltuie în fiecare lună un sfert din suma pe care o are la începutul lunii. El va rămâne cu 972 de lei după.....luni.

COLEGIUL NAȚIONAL "SPIRU HA

SUBIECTUL III. (30 puncte)

Scrieţi rezolvările complete pe foaia de concurs:

1. **(10 p) (10 p)** Într-o tabără şcolară se află 105 copii. După ce din tabără pleacă 15 băieți şi 10 fete, numărul fetelor devine 3 ori mai mare decât al băieților .

   Câte fete şi câți băieți se aflau la început în tabără?

2. **(10 p)** Câte numere de două cifre împărțite la 11 dau restul 9. Aflați suma lor?

3. **(10p)** Într-un parc au fost plantate 287 de flori,trandafiri şi lalele. Între oricare doi trandafiri am cultivat 10 lalele. Știind că atât primul fir cât și ultimul sunt trandafiri, aflați câte lalele s-au cultivat?

Toate subiectele sunt obligatorii. Punctajul maxim este de 90 de puncte.

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Timp de lucru- 60 minute

COLEGIUL NAȚIONAL "SPIRU HA

MINISTERUL EDUCAȚIEI

Test de admitere
Clasa a V-a
MATEMATICĂ
COLEGIUL NAȚIONAL „DOAMNA STANCA", SATU MARE
SESIUNEA IUNIE 2022

VARIANTA 1

SUBIECTUL I. Pe foaia de examen scrieţi numai rezultatele.

1. Calculaţi: **10 puncte**

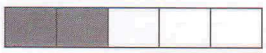
a) $4147 + 68$

b) $2457 : 9$

2. Precizaţi următoarele două numere care urmează în şirul: 2; 6; 12; 20; 30; ..... **10 puncte**

3. Scrieţi cel mai mare număr natural format din trei cifre impare diferite . **10 puncte**

4. Specificaţi fracția ordinară care reprezintă partea colorată în desenul alăturat . **10 puncte**



SUBIECTUL II. Pe foaia de examen scrieţi rezolvările complete.

1. Alin a cumpărat o minge şi un penar şi a plătit 55 lei. Călin a cumpărat un penar şi o trusă de desen şi a plătit 75 lei. Dinu a cumpărat o minge şi o trusă de desen şi a plătit 80 lei. Cât costă fiecare obiect dacă copiii şi-au cumpărat obiecte de acelaşi fel ?

20 puncte

2. La un centru de colectare a fructelor , 708 kg de mere s-au ambalat în cutii de trei kilograme. Calculaţi câte cutii au fost folosite.

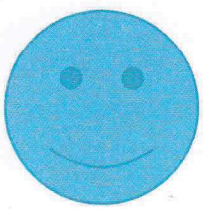
10 puncte

3. Determinați:
a) cel mai mare număr natural scris cu trei cifre diferite care are suma cifrelor 22.
b) cel mai mic număr natural scris cu cinci cifre diferite care are suma cifrelor 18.
c) cel mai mare număr natural scris cu cinci cifre care are suma cifrelor 30.

30 puncte

Toate subiectele sunt obligatorii.Timpul de lucru efectiv este 30 minute.

SUCCES!



COLEGIUL NAȚIONAL „VLADIMIR STREINU"
GĂEȘTI - D Â M B O V I Ț A
STR. N.TITULESCU, NR. 24 – 26
TEL./FAX: 0245/713351
E-MAIL: colegiul_national_v_streinu@yahoo.com

TESTARE PENTRU ADMITEREA ÎN CLASA A V-A
MATEMATICĂ – VARIANTA 1

SUBIECTUL I (30 PUNCTE)

Calculaţi:

$$64-64:[640:4-19x(245:5-246:6)]$$

SUBIECTUL II (20 PUNCTE)

Determinaţi numărul a din egalitatea:

$$68-4x[150-3x(a-5):3]:10=20$$

SUBIECTUL III (20 PUNCTE)

Un număr de trei cifre are suma cifrelor 27 , iar succesorul său are suma cifrelor 4 1.Aflaţi suma celor doua numere.

SUBIECTUL IV (20 PUNCTE)

Peste doi ani Marius, Ionuţ şi Victor vor avea împreună 34 de ani. Câţi ani are acum fiecare, dacă vârsta lui Ionuţ este de două ori mai mare decât a lui Marius şi de două ori mai mică decât a lui Victor?

SE ACORDĂ 10 PUNCTE DIN OFICIU

LICEUL TEORETIC „TRAIAN” – CONSTANȚA
Str. Traian, nr.55 Constanta, tel/fax:0341-405827
E-mail : traianct@gmail.com

Testare pentru admitere în clasa a V-a
11 iunie 2022

Subiectul I (30 puncte)

1) Aflați numărul natural *a* din următoarea egalitate:

150:[19x3-(4x*a*+20):10]=10.

2) Aflați diferența dintre cel mai mare număr de patru cifre distincte, cu trei cifre pare și o cifră impară și cel mai mic număr de patru cifre distincte impare.

Subiectul II (20 puncte)

Suma a două numere naturale este 47. Împărțind primul număr la 4 și al doilea număr la 5 se obțin câturi egale și resturi egale. Aflați cele două numere.

Subiectul III (20 puncte)

Într-o clasă sunt 26 de copii. Numărul celor care joacă tenis este dublul numărului celor care joacă volei, dar cu 4 mai mare decât numărul celor care joacă fotbal. Aflați numărul copiilor care joacă volei, tenis, respectiv fotbal, știind că fiecare copil participă la un singur sport.

Subiectul IV (20 puncte)

Andrei urcă un șir de trepte după regula: urcă 2 trepte și coboară o treaptă, urcă din nou 4 trepte și coboară 2 trepte. Un pas înseamnă urcarea sau coborârea unei trepte.

a) Aflați câți pași a făcut și pe ce treaptă se află după prima aplicare a regulii.
b) Pe ce treaptă se află după 21 de pași?
c) Pe ce treaptă se află după 275 de pași?

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timp de lucru: 60 minute.

COLEGIUL NAŢIONAL"TRAIAN"
Drobeta Turnu Severin , B-dul Carol I, Nr.6
Judeţul Mehedinţi , cod 220099,
Tel : +(40)352-401118; Fax +(40)252315267
e-mail: colegiulnationaltraiand@yahoo.com

MINISTERUL EDUCAŢIEI

Varianta 5
11 iunie 2022

MATEMATICĂ

A) Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect:

1) Să se efectueze: $(102 - 14 \times 4) : 2 + 231 : 3$. **10p**

a) 98; b) 102; c) 100; d) 200.

2) Determinați diferența dintre cel mai mare număr natural scris cu trei cifre pare consecutive și cel mai mic număr natural scris cu trei cifre impare consecutive . **10p**

a) 728; b) 727; c) 729; d) 730.

3) De câte ori folosim cifra 7 în scrierea numerelor de la 20 la 90? **10p**

a) 16; b) 17; c) 18; d) 19.

B) Completează răspunsul corect:

1) Determinați un număr știind că suma dintre jumătatea și treimea sa este 580. **10p**

Răspunsul corect este: ……..

2) Perimetrul unui dreptunghi este 88 m. Împărțind lungimea la lățime obținem câtul 5 și restul 2. Calculați perimetrul pătratului cu lungimea laturii egală cu lungimea dreptunghiului. **10p**
Răspunsul corect este: ……..

3) Care sunt numerele naturale de două cifre cu produsul cifrelor cel mult egal cu 2 ? **10p**
Răspunsul corect este: ……..

C) Scrieți rezolvările complete:

1) Aflați numărul natural „a” care verifică egalitatea: $[8 + 4 \times (20 - a : 5)] : 4 = 5$. **10p**

2) Alex a cumpărat 6 creioane și 9 pixuri pentru care a plătit 90 lei. Dacă prețul unui pix este cu 2 lei mai mare decât dublul prețului unui creion, aflați prețul fiecărui obiect.

10p

3) Carla și Robert au împreună 470 lei. După ce Carla a cheltuit 140 de lei și Robert a cheltuit 90 de lei, Carla are de trei ori mai mulți lei decât Robert. Câți lei a avut fiecare?

10p

MINISTERUL EDUCAȚIEI
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN BACĂU

COLEGIUL NAȚIONAL „GHEORGHE VRĂNCEANU"
STR. LUCREȚIU PĂTRĂȘCANU, NR. 30, BACĂU TEL. 0334/405941 FAX 0334/405942
email cnghvranceanu@yahoo.co.uk

Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 90 minute pentru ambele discipline
Se acordă 10 puncte din oficiu, 45p la matematică și 45 p la limbă și literatură română. Total: 100 de puncte.

MATEMATICĂ

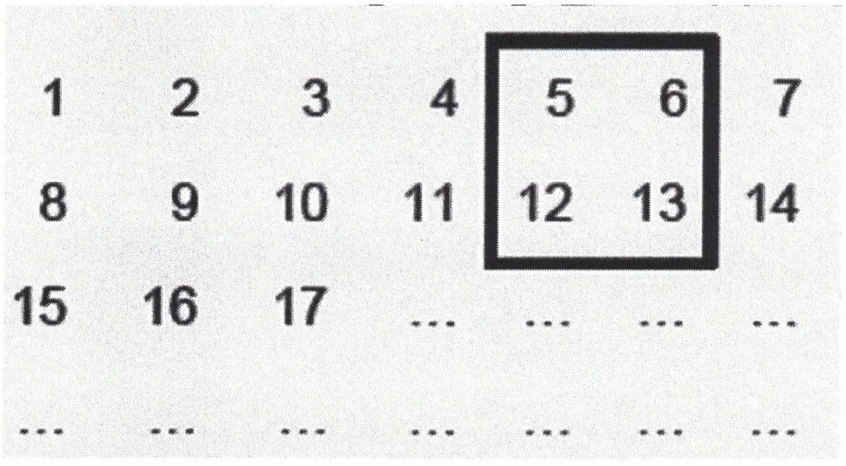
Pe foaia de concurs scrie rezolvările complete:

1. a) (4p) Calculaţi: 64-64:[480:3-19x(240:5-240:6)]
   b) (5p) Determinaţi numărul a din egalitatea:
   63-6x[100-3x(a-4):3]:10=15

2. (9p) Ana, Silvia și Ruxi au 24 de figurine. Ana are dublul numărului figurinelor Silviei. Dacă împărțim numărul figurinelor lui Ruxi la numărul figurinelor Anei obținem câtul 3 și restul 6. Câte figurine are fiecare?

3. (15p) Anul 2023 este special pentru Ionuț și pentru mama lui. Fiecare dintre ei are vârsta egală cu suma cifrelor anului său de naștere. Ce vârste au Ionuț și mama lui?

4. (12p) Alex a scris toate numerele naturale de la 1 pâna la 100, pe șapte coloane, apoi a încadrat într-un pătrat patru numere:



Alex a observat că suma numerelor din pătratul marcat este 36, iar numărul aflat în colțul din stânga, sus, este 5. Alexandru a marcat apoi un alt pătrat, care conținea patru numere a căror sumă este 248. Care este numărul aflat în colțul din stânga, sus, al celui de-al doilea pătrat marcat de Alex?

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ
COLEGIUL NAŢIONAL „EMIL RACOVIŢĂ” CLUJ-NAPOCA
Str. Mihail Kogălniceanu nr. 9-11, Cluj-Napoca, Tel. Fax: +(40)264-591825; 431930
web : www.e-racovita.ro; e-mail: racovitacj@gmail.com

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

Concursul claselor a IV-a „MICUL RACOVIȚIST” 2020
MATEMATICĂ

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 60 minute.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu.**

Următoarele exerciții au un singur răspuns corect. Alegeți varianta corectă!

1. Rezultatul calculului (340 : 2 x 5) – (321 : 3 + 230 x 3 – 784 : 4) este :

a) 34
b) 249
c) 1451
d) 339

2. Folosind fiecare dintre cifrele 1, 3, 5, 7 și 9 o singură dată, scrieți cel mai mare număr posibil. Scădeți din numărul găsit cel mai mic număr de 5 cifre distincte. Numărul obținut este:

a) 87531
b) 10753
c) 73962
d) 87297

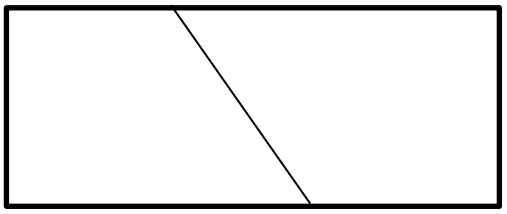
3. Maria vrea să formeze buchete de flori din 9 garoafe roșii, 5 lalele galbene, 2 frezii albe și 4 trandafiri portocalii. Cel mai mare număr de buchete pe care îl poate forma cu un număr impar de minim 3 flori de culori diferite este :

a) 9
b) 5
c) 4
d) 2

4. Calculați $\overline{abc} - \overline{bca} - \overline{cab}$ știind că
$a = 5 \times 7 - [40:8 + 3 \times (42 + 14):8]$, $15 + b = 27 - b$ și $3 \times c = b$.

a) 37
b) 35
c) 30
d) 62

5. Doi frați au despărțit grădina dreptunghiulară, moștenită de la părinți, ca în figură. Perimetrul uneia este 320 m, al celeilalte este 480 m, iar perimetrul grădinii inițiale este de 650 m. Aflați lungimea gardului care desparte cele două grădini.



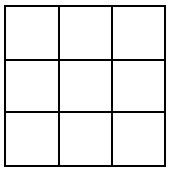
a) 150 m
b) 75 m
c) 50 m
d) 100 m

6. Elevii unei clase a 4-a intenționează să cumpere un cadou pentru unul din colegii lor. Dacă fiecare dă câte 2 lei mai lipsesc 60 de lei. Dacă fiecare dă câte 6 lei, rămân în plus 20 lei. Cu câți lei trebuie să contribuie fiecare elev pentru a se strânge exact suma necesară achiziționării cadoului ?

a) 5 lei
b) 8 lei
c) 12 lei
d) 10 lei

7. Câte pătrate sunt în figura alăturată ?

a) 10
b) 15
c) 12
d) 14



8. Fie șirul de numerele naturale: 5, 12, 19, 26, ... Al câtelea număr din șir este 2021?

a) 188
b) 298
c) 289
d) 288

9. La o serbare școlară a venit un număr de *n* spectatori. Dacă ei se așază câte 3 pe o bancă, atunci pe una din bănci vor sta doar 2 spectatori. După câteva minute mai sosesc încă 40 de spectatori. Atunci ei se așază câte 5 pe o bancă și astfel rămân 4 bănci libere, iar pe una din bănci stau doar 2 spectatori. Câți spectatori au venit la serbare?

a) 122
b) 107
c) 92
d) 77

10. Înmulțind toate numerele naturale de la 12 la 72 obținem un număr A. În câte zerouri se termină A?

a) 10
b) 12
c) 14
d) 16

Probă scrisă la matematică

1. Află toate numerele de patru cifre, care îndeplinesc simultan condiţiile:
a) cifra miilor este cea mai mare cifră impară;
b) cifra sutelor este egală cu cea a zecilor;
c) cifra unităţilor este cu 3 mai mică decât cifra zecilor.

15 puncte

2. Scrie rezultatul exerciţiului sub forma unui produs de 4 factori.
(28 x 39 – 893 + 8) : 3 : (6 958 – 6947 + 12) x 5 – (198 : 2 – 33 x 3)

12 puncte

3. Ana coase, în pătrate, ca în desenul de mai jos, două dintre literele numelui său pe o pânză dreptunghiulară, cu dimensiunile 130 cm, respectiv 70 cm. Ea taie pe lungime această pânză, astfel încât nu se mai pot observa toate literele. Ştie doar că, pe lungime, sunt 13 pătrate cu litere cusute.
Află de câte ori a cusut litera N.

N	A	N	A	N	A	N	A	N	A	N	A	N
A	N	A	N	A	N	A	N	A	N	A	N	A
N	A	N	A	N	A	N	A	N	A	N	A	N
A	N	A	N	A	N	A	N	A	N	A	N	A

8 puncte

4. Veveriţa a adunat ghinde, apoi s-a gândit să facă schimb, astfel:
a) primul schimb- a oferit cu 20 de ghinde mai multe decât o treime din câte avea;
b) al doilea schimb- a primit 100 de ghinde;
c) al treilea schimb- a oferit cu 30 de ghinde mai multe decât 3 şesimi din câte mai avea;
d) al patrulea schimb- a oferit cu 20 de ghinde mai multe decât 1 treime din câte mai avea de data aceasta;
e) al cincilea schimb- a primit 68 de ghinde.
Acum, ea are 168 de ghinde.
Câte ghinde a avut veveriţa la început?

10 puncte

Total:
100 de puncte, după cum urmează:
45 de puncte- limba şi literatura română; 45 de puncte- matematică
Se acordă 10 puncte din oficiu
Timp de lucru: 90 de minute

Concursul de Matematică „Traian Lalescu”
Ediţia a XXIV-a, 13 mai 2023

Barem de corectare

1. Calculați:

$$2023+5+13\cdot\left[6-\left(126:6\cdot 2-12\right):15\right].$$

Soluție. $6-\left(126:6\cdot 2-12\right):15=4$, **(5p)**

$2023+5+13\cdot\left[6-\left(126:6\cdot 2-12\right):15\right]=2080$. **(5p)**

2. Determinați toate numerele de trei cifre $\overline{abc}$, cu proprietatea că $\overline{abc}=\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{ca}$.

Soluție. Egalitatea $\overline{abc}=\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{ca}$ este echivalentă cu $89\cdot a=10\cdot c+b$ sau $89\cdot a=\overline{cb}$. **(5p**) Pentru $a>1$ nu avem soluție. Dacă $a=1$, atunci $b=9$ și $c=8$. Există un singur număr de trei cifre cu proprietatea considerată, $\overline{abc}=198$. **(5p)**

3. Dacă două capre consumă 84 kilograme de furaje în două săptămâni, aflați câte kilograme de furaje consumă douăsprezece capre în patru zile.

Soluție. Într-o zi, o capră consumă $\left(84:14\right):2=3$ kg de furaje. **(5p)** În 4 zile, 12 capre consumă $\left(3\cdot 4\right)\cdot 12=144$ kg de furaje. **(5p)**

4. Într-o cutie sunt 123 de bile, unele albe, altele roșii și restul galbene. Aflați câte bile albe sunt în cutie, știind că 76 dintre bile **nu** sunt roșii și 87 dintre bile **nu** sunt galbene.

Soluție. Notăm cu *a* numărul bilelor albe, cu *r* numărul bilelor roșii și cu *g* numărul bilelor galbene din cutie. Avem $a+r+g=123$, $a+g=76$ și $a+r=87$. **(5p)** Din primele două egalități, rezultă că $r=47$, iar din a treia egalitate rezultă că $a=87-r=87-47=40$. **(5p)**

5. Determinați numerele naturale *a* și *b*, știind că *a* împărțit la *b* dă câtul 12 și restul 7, iar suma dintre deîmpărțitul, împărțitorul, câtul și restul acestei împărțiri este 2210.

Soluție. Din enunț rezultă că $a=12\cdot b+7$ și $a+b+12+7=2210$. **(10p)** Înlocuind în a doua egalitate pe *a* cu $12\cdot b+7$, obținem $13\cdot b+26=2210$, sau $b=168$, **(5p)** deci $a=12\cdot 168+7=2023$. **(5p)**

6. Două surori, Ana și Bogdana, au cumpărat mere de 26 de lei. Pentru a plăti merele, Ana a dat toți banii pe care îi avea, iar Bogdana a dat numai trei cincimi din suma sa. Dacă, însă, Ana ar fi dat trei cincimi din suma sa, iar Bogdana ar fi dat toți banii săi, atunci ar fi lipsit 4 lei.

a) Calculați suma dintre jumătatea sumei inițiale a Bogdanei și trei zecimi din suma inițială a Anei.

b) Aflați câți lei a avut inițial fiecare dintre cele două surori.

Soluție. Notăm cu a și b sumele, în lei, pe care le-au avut la început Ana, respectiv Bogdana.

a) Cum $3\cdot a:5+b=26-4=22$, rezultă că $3\cdot a:10+b:2=22:2=11$, deci $b:2+3\cdot a:10=11$. **(10p)**

b) Din relațiile $a+3\cdot b:5=26$ și $3\cdot a:5+b=26-4$, deducem că $5\cdot a+3\cdot b=130$ și $3\cdot a+5\cdot b=110$, de unde, prin metoda comparației, obținem $a=20$ și $b=10$. **(10p)**

7. Într-o excursie cu școala, fiecare elev este întrebat câți dintre colegii lui de clasă participă la excursie. Cincisprezece dintre copii au răspuns: „4 colegi”, doisprezece copii au răspuns: „3 colegi”, iar șase copii au răspuns: „2 colegi”. În excursie au fost și toți învățătorii elevilor participanți și numai aceștia.

a) Câți elevi au mers în excursie?

b) Câți învățători au participat la excursie?

Soluție. a) Fiecare elev care a participat la excursie a răspuns la întrebarea pusă, deci numărul elevilor care au mers în excursie este egal cu $15+12+6=33$. **(10p)**

b) Cei 15 elevi care au dat răspunsul „4 colegi” fac parte din 3 clase diferite $(15:5=3)$, cei 12 copii care au dat răspunsul „3 colegi” fac parte din alte 3 clase diferite $(12:4=3)$, iar cei 6 copii care au dat răspunsul „2 colegi” fac parte din încă 2 clase diferite $(6:3=2)$. Prin urmare, numărul învățătorilor care au participat la excursie este egal cu $3+3+2=8$. **(10p)**

Notă. Orice altă soluţie corectă primeşte punctajul corespunzător.

*Prin noi, vei fi **tu** cel mai bun!*

Concursul de Matematică „Traian Lalescu”
Ediţia a XXIV-a, 13 mai 2023

1. Calculați:

$$2023+5+13\cdot\left[6-\left(126:6\cdot 2-12\right):15\right].$$

2. Determinați toate numerele de trei cifre $\overline{abc}$, cu proprietatea că $\overline{abc}=\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{ca}$.

3. Dacă două capre consumă 84 kilograme de furaje în două săptămâni, aflați câte kilograme de furaje consumă douăsprezece capre în patru zile.

4. Într-o cutie sunt 123 de bile, unele albe, altele roșii și restul galbene. Aflați câte bile albe sunt în cutie, știind că 76 dintre bile **nu** sunt roșii și 87 dintre bile **nu** sunt galbene.

5. Determinați numerele naturale *a* și *b*, știind că *a* împărțit la *b* dă câtul 12 și restul 7, iar suma dintre deîmpărțitul, împărțitorul, câtul și restul acestei împărțiri este 2210.

6. Două surori, Ana și Bogdana, au cumpărat mere de 26 de lei. Pentru a plăti merele, Ana a dat toți banii pe care îi avea, iar Bogdana a dat numai trei cincimi din suma sa. Dacă, însă, Ana ar fi dat trei cincimi din suma sa, iar Bogdana ar fi dat toți banii săi, atunci ar fi lipsit 4 lei.
   a) Calculați suma dintre jumătatea sumei inițiale a Bogdanei și trei zecimi din suma inițială a Anei.
   b) Aflați câți lei a avut inițial fiecare dintre cele două surori.

7. Într-o excursie cu școala, fiecare elev este întrebat câți dintre colegii lui de clasă participă la excursie. Cincisprezece dintre copii au răspuns: „4 colegi”, doisprezece copii au răspuns: „3 colegi”, iar șase copii au răspuns: „2 colegi”. În excursie au fost și toți învățătorii elevilor participanți și numai aceștia.
   a) Câți elevi au mers în excursie?
   b) Câți învățători au participat la excursie?

Notă. La toate problemele se cer rezolvări complete. Fiecare dintre problemele 1, 2, 3, 4 se notează cu câte 10 puncte, iar fiecare dintre problemele 5, 6, 7 se notează cu câte 20 de puncte. Se acordă 20 de puncte din oficiu.

Timp de lucru: 60 de minute.

Examenul de bacalaureat național 2013
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că numărul $n=\left(\sqrt{5}-1\right)^2+2\sqrt{5}$ este natural.

5p **2.** Determinați valorile reale ale lui m pentru care graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f\left(x\right)=x^2+mx+4$ intersectează axa Ox în două puncte distincte.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2\left(2-x^2\right)=\log_2 x$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare una dintre submulțimile mulțimii $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$, aceasta să aibă cel mult un element.

5p **5.** Se consideră punctele A, B și C astfel încât $\overrightarrow{AB}=\vec{i}+6\vec{j}$ și $\overrightarrow{BC}=4\vec{i}+6\vec{j}$. Determinați lungimea segmentului $[AC]$.

5p **6.** Se consideră numerele reale a și b astfel încât $a+b=\frac{\pi}{3}$. Arătați că $2\cos b=\cos a+\sqrt{3}\sin a$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se notează cu $D(x,y)$ determinantul matricei $A\left(x,y\right)=\begin{pmatrix}x & 1 & 2\\ 2 & x & 1\\ 1 & y & x\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3\left(\mathbb{R}\right)$.

5p **a)** Calculați $D(-1,2)$.

5p **b)** Determinați numărul real q pentru care matricea $A(2,q)$ are rangul egal cu 2.

5p **c)** Arătați că există cel puțin o pereche $\left(x,y\right)$ de numere reale, cu $x\neq y$, pentru care $D(x,y)=D(y,x)$.

2. Se notează cu x_1,x_2,x_3 rădăcinile din $\mathbb{C}$ ale polinomului $f=X^3+X-m$, unde m este un număr real.

5p **a)** Determinați m astfel încât restul împărțirii polinomului $f\left(X\right)$ la $X-1$ să fie egal cu 8.

5p **b)** Arătați că numărul $x_1^2+x_2^2+x_3^2$ este întreg, pentru orice $m\in\mathbb{R}$.

5p **c)** În cazul $m=2$ determinați patru numere întregi a,b,c,d, cu $a>0$, astfel încât polinomul $g=aX^3+bX^2+cX+d$ să aibă rădăcinile $\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2},\frac{1}{x_3}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-x$.

5p **a)** Calculați $f'(0)$.

5p **b)** Arătați că, pentru fiecare număr natural $n\geq 2$, ecuația $f(x)=n$ are exact o soluție în intervalul $\left(0,+\infty\right)$.

5p **c)** Fie x_n unica soluție din intervalul $\left(0,+\infty\right)$ a ecuației $f(x)=n$, unde n este număr natural, $n\geq 2$. Arătați că $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=+\infty$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos x$ și se notează cu S suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=\frac{\pi}{2}$.

5p **a)** Calculați aria suprafeței S.

5p **b)** Calculați volumul corpului obținut prin rotația suprafeței S în jurul axei Ox.

5p **c)** Demonstrați că $\int_0^{2\pi}f^n(kx)\,dx=\int_0^{2\pi}f^n(x)\,dx$, pentru orice numere naturale $n,k\geq 1$.